हिन्दीसमिति-ग्रन्थमाला—५१

यांत्रिकी

लेखक

आर्नोल्ड सोमरफेल्ड

म्यूनिख विश्वविद्यालय

अनुवादक

जगद्विहारी सेठ, इ० ए० एम० (अव

हिन्दी समिति

सूचना विभाग, उत्तर प्रदेश

प्रकाशकीय

यह पुस्तक उन व्याख्यानों का संग्रह है जो श्री आर्नाल्ड सोमरफेल्ट द्वारा म्युनिख विश्वविद्यालय में उच्चश्रेणी के विद्यार्थियों के सामने दिये गये थे। प्रशिक्षण सम्बन्धी ३०-४० वर्ष के अनुभव तथा गवेषणाओं का सार इन भाषणों में आ गया है। विषय का अध्यापन समाप्त हो जाने के बाद ये व्याख्यान सप्ताह में चार घंटे दिये जाते थे और दो घण्टे प्रति सप्ताह विद्यार्थियों द्वारा प्रस्तुत की गयी समस्याओं पर विचार करने तथा उनके समाधान के सुझाव देने में बिताये जाते थे। इसी से छात्रों पर इनका बड़ा प्रभाव पड़ता था। समस्त व्याख्यानमाला छ भागों में प्रकाशित हुई थी। प्रस्तुत पुस्तक इसके प्रथम भाग का अनुवाद है। गणितीय सैद्धान्तिक भौतिकी के अध्ययन-अध्यापन में रुचि लेने वालों के लिए तथा क्वाण्टम सिद्धान्त के विकास की भूमिका के रूप में इसकी उपयोगिता समझ कर ही हिन्दी समिति द्वारा इसका प्रकाशन किया जा रहा है।

हिन्दी समिति ग्रंथमाला का यह ५१ वाँ पुष्प है। इसके अनुवादक श्री जगद् बिहारी सेठ ३० वर्ष तक पहले भौतिकी के प्राध्यापक और फिर प्रिंसिपल के रूप में राजकीय शिक्षा विभाग में कार्य करने के बाद अवसर ग्रहण कर चुके हैं। आप छात्रावस्था से ही हिन्दी के प्रेमी रहे हैं। यह अनुवाद आपके अनुभव और हिन्दी के प्रति इस विशिष्ट अनुराग का ही परिणाम है।

लीलाधर शर्मा 'पर्वतीय'

सचिव, हिन्दी समिति।

हिन्दी अनुवादक का निवेदनः

श्री सोमरफेल्ड की व्याख्यान माला में छः ग्रंथ हैं जिनके नाम उन्हीं की, यथास्थान दी हुई, भूमिका में मिलेंगे। इनमें के प्रथम चार तथा षष्ठ ग्रंथ ही वे पूर्णतया लिख पाये थे जो उनके जीवन-काल में प्रकाशित हो सके थे। पाँचवें ग्रंथ की रचना वे अभी कर ही रहे थे कि उनकी मृत्यु हो गयी। परंतु मृत्यु के पहले वे उसको पूरा करने का कार्य उपयुक्त सुयोग्य विद्वानों को सौंप सके थे और परामर्श दे सके थे कि पुस्तक किस प्रकार समाप्त की जाय। अतएव पाँचवाँ ग्रंथ भी उन्हीं का कहलाता है। निस्सदेह, मूल ग्रंथ जर्मन भाषा में है। उनका अंग्रेजी अनुवाद अमेरिका, न्यूयार्क के एकेडेमिक प्रेस इनकारपो. प्रकाशकों ने प्रकाशित किया। विभिन्न ग्रंथों के अंग्रेजी अनुवाद विभिन्न उपयुक्त विद्वानों से कराये गये और वे विभिन्न वर्षों में प्रकाशित हुए थे।

प्रस्तुत ग्रंथ व्याख्यानमाला की प्रथम पुस्तक यांत्रिकी, का हिंदी भाषांतर है। मूल ग्रंथ १९४३ म प्रकाशित हुआ था और १९४४ में ही उसका द्वितीय सस्करण निकल गया था। अंग्रेजी अनुवाद ग्रंथ के चतुर्थ संस्करण का हुआ तथा वह १९५२ में प्रकाशित हुआ और १९५६ में उसका पुनर्मुद्रण हुआ। प्रस्तुत ग्रंथ इसी पुनर्मुद्रण से अनूदित है। अनुवाद करने आदि की अनुमति अमेरिकन प्रकाशकों ने सहर्ष प्रदान की। तदर्थ उनका यहाँ सर्वप्रथम धन्यवाद करना उचित ही है।

अनुवाद जहाँ तक हो सका अक्षरशः किया गया है। अंग्रेजी भाषांतर में दी हुई पादटिप्पणियाँ, तारक चिह्न, त्रिशूल चिह्न आदि द्वारा सूचित की गयी है। कहीं-कहीं हिन्दी अनुवादक ने कुछ अन्य टिप्पणियाँ देना भी उचित समझा है। इनमें 'अनुवादक' शब्द जोड़ दिया गया है। वर्तमान संक्रमण युग में यह भी उचित ही जान पड़ा कि पारिभाषिक शब्दावली हिन्दी-अंग्रेजी में ही न हो, वरन् अंग्रेजी-हिन्दी में भी दी जाय। गणितीय पदपुंज, संकेताक्षर, समीकरण आदि अंग्रेजी में ही दिये गये हैं।

अनुवादक

विषय-सूची

प्राक्कथन

(श्री पी० पी० एवाल्ड द्वारा लिखित)

सैद्धातिक भौतिकी के प्रस्तुत अध्यापन ग्रंथों के रचयिता, श्री अर्नाल्ड सोमरफेल्ड उन विशिष्ट विद्वानों में थे जिनके द्वारा, १९१० से १९३० तक के दो दशकों मे ही, भौतिक-विज्ञान-जगत् मे भारी परिवर्त्तन हो गया । सोमरफेल्ड के प्रेरणापूर्ण और अथक प्रयासो के बिना परमाणु के क्वाटम सिद्धात का न तो उतना प्रचड विकास होता और न उसका उतना विस्तृत प्रचार ही होता जितना कि हुआ । म्यूनिख में स्थित सोमरफेल्ड का 'सैद्धातिक भौतिक इंस्टिट्यूट' ऐसी सस्था हो गया जहाँ से परमाणु-सिद्धात के जर्मन तथा विदेशी, नवीन एव प्रौढ, विद्यार्थियों के गवेषणा-पत्रों की धारा वह निकली। उनका सुप्रसिद्ध ग्रंथ "ऐटम्बाउ अंड स्पेक्ट्राल्लिनीएन"[1] (परमाणु-रचना तथा वर्णक्रम-रेखाएँ) और उसके थोडे ही दिन बाद प्रकाशित उन्ही की लिखी पुस्तक, "वेलनमेकैनिक"[2] (तरंग-यांत्रिकी) बहुकाल पर्यंत इस भौतिक विषय के एकमात्र पूर्ण और प्रामाणिक ग्रथ रहे । उसके बाद के एक के बाद एक निकले सस्करणों ने ही नील्स बोर[3] के प्रारंभिक शोधपत्रों के बाद शीघ्रतापूर्वक विकसित परमाणु-सिद्धात की हृदयंगामी बातो को संसार के सामने प्रकट किया ।

अपने प्रशिक्षण एव पूर्वकालिक गवेषणाओं, दोनों के ही कारण सोमरफेल्ड उच्च-कोटीय भौतिकी की गणितीय विधियों मे पूर्ण निपुणता प्राप्त कर चुके थे । अतएव क्वाटम भौतिकी की नव-जात विधियो में, शीघ्र ही, विशेषतया १९२६ मे श्राडिंजेर[4] की तरंग-यान्त्रिकी के आविर्भाव के उपरात वे पूर्ण पंडित बन गये । और इसलिए, तथा इसलिए भी कि उन्हे चिरप्रतिष्ठित सिद्धात के रुचिकारक सौंदर्य में स्वय बड़ा आनन्द आता था, यह स्वाभाविक ही था कि सोमरफेल्ड अपने शिष्यों को भी चिरप्रतिष्ठित विधियो की सम्यक् प्रशिक्षा देते । गणितीय अनुष्ठान, उसका भौतिक भाष्य, तथा उसका प्रायोगिक प्रत्यक्षीकरण, इन सबके बीच की अनुरूपता के उभडे हुए से चित्र सोमरफेल्ड के व्याख्यानो मे खिंच जाते थे, जो उसके शिष्यो पर बडा प्रभाव डालते थे ।

1. "Atombou and Spektrallinien", 2. "Wellenmechanik"
3. Niels Bohr, 4. Schrodinger,

जिस समय सोमरफेल्ड ने अपने अध्यापन-व्याख्यान पुस्तकाकार प्रकाशनार्थ लिपि-बद्ध किये, उस समय उनकी अवस्था सत्तर वर्ष से भी अधिक थी और चालीस वर्ष पर्यंत अध्यापन करके वे कार्यावकाश प्राप्त कर चुके थे। दो कारणों से उन्होंने वैसा करना अपना कर्त्तव्य समझा—एक तो यह कि उस संकटकाल में उन शोधों का संरक्षण हो सके जिन्होंने भौतिकी को सफलता की पराकाष्ठा तक पहुँचाया था; दूसरा यह कि नूतन युग के भौतिकी-विद्यार्थियों के लिए उच्चकोटीय समस्याओं के ढाँचे पर बनाये हुए गणितीय विश्लेषण की बहुमूल्य उपलब्धियों की रक्षा हो सके। इन उपलब्ध साधनो को निर्दोष बनाने में सोमरफेल्ड ने तभी से काफी हाथ बँटाना प्रारंभ कर दिया था जब, १८९५ मे, भौतिकी में स्वेच्छफलनों[1] पर आचार्य (डाक्टर) पदवी प्राप्त करने के लिए उन्होंने अपना निबंध लिखा था। उनके शुरू-शुरू के विद्वत्तापूर्ण शोधो मे 'किसी किनारे पर तरगो के विवर्त्तन'[2] के कारणों पर यथार्थ प्रमाण को प्रस्तुत करना था। उन्होने रीमान[3] द्वारा व्यवहृत फलन-वाद[4] की विधियों को आगे बढ़ाया, जिसका परिणाम यह हुआ कि विवर्त्तन की उक्त समस्या का साधन 'बहु-विमितीय अवकाश मे प्रतिबिंब' की विधि द्वारा प्राप्त हो गया। इस विषय की विवेचना पाठको को प्रस्तुत व्याख्यान माला की पाँचवी पुस्तक, 'प्रकाशिकी'[5], में मिलेगी।

गोटिंजेन[6] के अपने प्रारंभिक काल से लेकर म्यूनिख मे क्वांटम युग के आरंभ तक, गोटिंजेन के प्रसिद्ध गणितज्ञ, फेलिक्स क्लाइन[7], के सहयोग से, चार ग्रंथों मे समाप्त, घूर्णमान दृढ़पिंडो के वाद[8] पर, सोमरफेल्ड ने अपने प्रामाणिक ग्रथ, 'थियोरी डेस क्राइसेल्स'[9] की रचना की। इस ग्रंथ मे फलनवाद, दीर्घवृत्तीय फलन, चतुर्वर्णायन[10], क्लाइन-केली के परामिति वृद[11], इत्यादि, जैसे गणितीय विषयो को दृढ़पिंड संबधी गतिविज्ञान की समस्याएँ हल करने मे लगाकर गणित के "शुद्ध" और "अनुप्रयुक्त" अगों का परस्पर घना संबंध दिखलाने का यत्न किया गया था। १८९९ से १९०५ तक, आखेन के टेक्नीख हाखशूल अध्यापक[12] की हैसियत में, सोमरफेल्डने इंजिनियरी

1. Arbitrary Functions in Physics 2. Construction of a strict solution for the diffraction of a wave by an edge 3. Riemann 4. Theory of Functions 5. "Optics" 6. Gottingen 7. Felix Klein 8. Theory of rotating rigid bodies 9. Theorie des Kreisels 10. Quaternions 11. Klein Caley parameters 12. Technische Hochschule.

की समस्याओं में गहरी दिलचस्पी ली। स्नेहनों का द्रवगति विज्ञान, एक ही शक्तिवाहक तार पर काम करते हुए एकाधिक विद्युज्जनित्रों के बीच की मिथ-क्रिया, रेलगाड़ियों के ब्रेकों का काम, तथा अन्य विषयों की समस्याएँ हल करने के लिए एक-जैसी विधियों के संबंध मे जो काम लिया गया, उसका महत्त्व चिरकाल तक बना रहेगा। बेतार की तार-प्रणाली का आविर्भाव हो जाने पर, रेडियो-तरगो के उत्सर्जन और प्रचरण विधियो के सबंध में सोमरफेल्ड और उनके शिष्यों के रचनापत्रों की शृंखला बँध गयी। ये उन गणितीय विधियों के उत्तम उदाहरण हैं जिनमें सोमरफेल्ड पूर्ण पारगत थे। विशेषत', इन तरगों के पृथिवी के चारों ओर विवर्त्तन की समस्या सम्मिश्र समाकलों[1] सबंधी वाद-विवाद मात्र बना दी गयी, जोकि उसके यथार्थ प्रमाण सिद्ध हुए (देखिए, छठे ग्रंथ का छठा अध्याय)।

जिन सब उपलब्धियों से सोमरफेल्ड ने भौतिक सिद्धांत को संपन्न किया, उनकी पूरी सूची यहाँ देने का अवसर नही; केवल इस प्राक्कथन के अंत मे दी हुई थोड़ी-सी रचनाओं का नाम दे देना ही यहाँ पर्याप्त होगा। परतु सोमरफेल्ड कैसे शिक्षक थे तथा प्रस्तुत ग्रंथ में अनूदित उनकी अध्यापन-प्रणाली के व्याख्यानों का कितना गौरव है, इस सम्बन्ध मे यहाँ कुछ जिक्र कर देना उचित जान पडता है।

सैद्धातिक-भौतिकी की जो अध्ययन-प्रणालियाँ म्यूनिख में स्थापित की गयीं वे दो प्रकार की थीं——व्यापक और विशिष्ट। पहले प्रकार के व्याख्यान हेमत मे १३ सप्ताह के और ग्रीष्म मे ११ सप्ताह के अध्ययन-काल मे चार घंटे (४०-५० मिनट के) प्रति सप्ताह दिये जाते थे। पूरी प्रणाली तीन वर्षो में समाप्त होती थी। इस प्रकार छ व्याख्यान-मालाएँ हुई जिनसे प्रस्तुत पुस्तकमाला के छ ग्रथ बनें। जो विद्यार्थी प्रायोगिक भौतिकी की अध्ययन-प्रणाली ले चुके थे उनके लिए प्रणालियाँ विषय-प्रवेश थीं। म्यूनिख में प्रयोगात्मक भौतिकी के निर्दर्शन पहले तो राटजेन[2] और बाद मे डब्लू० वीएन[3] की अध्यक्षता में दिये गये। प्रयोगात्मक भौतिकी में विद्यार्थी को भौतिक-जगत् की घटनाओं का तथ्यपूर्ण दर्शन तथा मुख्यतया गणित-हीन विधियों से उनके मात्रात्मक मान का ज्ञान कराया जाता था। सैद्धातिक भौतिकी के व्याख्यानो में प्रारंभिक बातें फिर से बतायी जाती थी परंतु अब इस दृष्टिकोण से कि समस्याएँ किस प्रकार गणितीय विधियो से हल की जायँ तथा किस प्रकार ऐसे एकीकारक सिद्धांत (वाद) का निर्माण किया जाय जो गूढ़ समस्याओ को हल करने में

1. Complex integrals 2. Rontgen 3. W. Wien

सफल हो। विभिन्न व्याख्यान-शृंखलाओं में ये बातें बदलती रहती थीं और इन व्याख्यानों के उत्तरार्ध मे तत्कालीन प्रासंगिक विषय सम्मिलित कर लिये जाते थे, जिस कारण ये व्याख्यान उन उच्चतर विद्यार्थियों के लिए जो पहले भी इस विषय को पढ़ चुके थे और भी चित्ताकर्षक हो जाते थे। व्याख्यानों के अतिरिक्त दो घंटे प्रति सप्ताह् समस्याओं के विचार-आलोचन में लगाये जाते थे।

विशिष्ट पाठ-क्रमों में दो घंटे प्रति सप्ताह व्याख्यान दिये जाते थे। ये उन विषयों पर थे जो व्यापक प्रणालियों में केवल संक्षिप्त रूप मे ही समझाये जा सकते थे या जो केवल तात्कालिक जानकारी प्राप्त करने के लिए थे। इस प्रकार के जो व्याख्यान सोमरफेल्ड देते थे वे या तो उन्हीं के अपने पहले के किये हुए कार्यों से संबंध रखते थे या ऐसे विषयों के अश होते थे जो कुछ दिनों बाद मौलिक रचनाओं के रूप में निकले। लोरत्ज[1] रूपान्तर को चतुः विमितीय अवकाश में हुए घूर्णन की भांति मानना (पुस्तक ३, § २७); तरग प्रकाशिकी से ज्यामितीय प्रकाशिकी में परिवर्तन (पु० ४, § ३५); विक्षेपक माध्यम मे संकेत-वेग पर विचार (पु० ४, § ३५); आदि इसके कुछ उदाहरण हैं। पहले दिये गये व्याख्यानो के कुछ कम-चित्ताकर्षक भागों को निकालकर बाद में ये विषय व्यापक पाठ्यक्रमों में सम्मिलित कर लिये गये थे।

व्याख्यान माला के अतिरिक्त विचार-गोष्ठियों और संभाषणों द्वारा भी उच्चतर विषयों की शिक्षा दी जाती थी। इनमें विद्यार्थी को निर्दिष्ट विषय का पर्यवेक्षण करना पड़ता था और उस पर वक्तृता देनी होती थी, जिनके लिए कई सप्ताहों के कठिन परिश्रमपूर्ण अध्ययन की आवश्यकता होती थी।

विद्यार्थी की दृष्टि से, सोमरफेल्ड के व्याख्यानों के आकर्षण का कारण उनकी सुबोधता थी—यथा, भौतिक दृष्टि से विषय-प्रवेश; उसका गणितीय सुव्यवस्थापन; व्यवहृत गणितीय विधियों का सहज किंतु व्यापक व्यक्तीकरण; और अंत में भौतिक प्रयोगो द्वारा उपलब्ध परिणामों पर सम्यक् विचार-आलोचन। कक्षा के बोर्ड पर उनकी गहरी, स्पष्ट, लिखाई; तथा उनके रेखाचित्र, इन दोनों के द्वारा, क्लास समाप्ति पर, विद्यार्थी व्याख्यान में बतायी हुई सब बातो का स्पष्ट रूप से पर्यवेक्षण कर सकता था। व्याख्यानों का विषय काफी ऊँचा होता था ताकि अच्छे छात्रों को भी वह आकर्षित रखता था। उस युनिवर्सिटी (विद्यापीठ) मे जहाँ न तो व्याख्यानादिकों में कोई हाजिरी ही ली जाती थी और न ही विद्यार्थियो के नाम की कोई जाँच-पड़ताल की

1, Lorentz

जाती थी, व्याख्यानों में इन सब बातों का होना आवश्यक था। अभ्यास के लिए दी हुई समस्याओं के हल करने में यदि कोई कुछ मौलिकता दिखलाता था तो चाहे वह नवागत ही क्यों न हो तुरत सोमरफेल्ड या उनके सहकारी का ध्यान आकर्षित होता था जिससे विद्यार्थी को बड़ा प्रोत्साहन मिलता था।

विद्यार्थी की अवस्था चाहे जो भी हो वास्तविक योग्यता और उत्तम बुद्धि तुरंत पहचान लेने की असाधारण शक्ति सोमरफेल्ड में थी। यही कारण था कि डिबाई[1], पाउली[2], हाइसेनबर्ग[3], अपने अध्ययन-काल के प्रारंभिक वर्षों में ही उन पर अनुरक्त हो गये थे। इस प्रकार के बहुतेरे वैज्ञानिकों में से यहाँ केवल उन तीन के नाम दिये गये हैं जो आज नोबल-पुरस्कार विजेता हैं। परन्तु औसतन अच्छे विद्यार्थी का भी काफी ध्यान रखा जाता था और अपेक्षाकृत कम जटिल समस्याएँ, कम उत्तरदायित्व की बातें, उसके सुपुर्द की जाती थीं ताकि वह भी अपनी योग्यता का उपयोग कर सके। अयोग्य विद्यार्थी स्वयं भाग जाते थे। इस प्रकार सोमरफेल्ड के शिष्यों का एक अपना ही चुना हुआ दल बन जाता था। परंतु इस दल में सदैव काफी संख्या में छात्र होते थे ताकि उसकी एक ऐसी धारा बहती रहती थी कि नवागत विद्यार्थी शीघ्र ही अपनी-अपनी नौका उसमें छोड़ सकें। आशा है कि सोमरफेल्ड की व्याख्यानमाला का यह भाषांतर इस धारा को दूर-दूर तक फैलावेगा ताकि अन्यान्य विद्वानों को उसमें अपनी-अपनी नौका छोड़ने की तैयारी में सहायता मिले।

सोमरफेल्ड के ग्रंथों पर लिखित कुछ रचनाओं की सूची :—

1. Anon, Current Biographies, 1950, pp. 537-538. (With Portrait),

2. P. Kirkpatrik, Am. J. Physics (1949). 17,5, 312-316. (Presentation of the Oerstedt Medal to Sommer feld by the American Association of Pnysics Teachers.

3. M. Born, Proc. Roy, Soc., London, A, (1952). (Obituary.)

4. P.P. Ewald, Nature (1951), 168, 364-366. (Obituary Notice.)

5. W. Heisenberg, Naturwissenschaften (1951). 38, 337.

6. M. V. Laue, Naturwissenschaften (1951). 38, 513-518. (A full appraisal of Sommerfeld's work.)

1. Debye, 2. Pauli, 3. Heisenberg,

प्रथम संस्करण की भूमिका

अपने पुराने शिष्यों के प्रोत्साहन तथा प्रकाशकों के बार-बार के आग्रह से मैंने निश्चय किया कि व्यापक अध्यापन-प्रणाली के अंतर्गत सैद्धांतिक भौतिकी पर, बत्तीस वर्ष पर्यंत यथा-नियम, म्यूनिख युनिवर्सिटी में दिये हुए व्याख्यानों को पुस्तकाकार प्रकाशित करूँ।

यह एक विषय-प्रवेशक पाठन-क्रम था जो न केवल युनिवर्सिटी और पालीटेकनिक इंस्टीट्यूट के भौतिकी के उच्चतर विद्यार्थी ही लेते थे किंतु गणित तथा भौतिकी की शिक्षण उपाधि के लिए पढ़ने वाले छात्र, खगोल-विज्ञान के शिक्षार्थी तथा भौतिकीय रसायन शास्त्र के कुछ विद्यार्थी भी व्याख्यानों के समय उपस्थित रहते थे। सभी विद्यार्थी सामान्यतः अपने अपने विद्यालय के तृतीय और चतुर्थ वर्षों के होते थे। व्याख्यान सप्ताह में चार बार दिये जाते थे और प्रश्नों का समाधान करने के लिए प्रति सप्ताह दो घंटों का समय अलग निर्धारित रहता था। नूतन भौतिकी पर जो विशिष्ट पाठन उक्त व्याख्यान-शृंखला के साथ ही साथ चलता था वह प्रस्तुत पुस्तकावली में सम्मिलित नहीं किया गया है। उसमें बतायी बातें मेरे वैज्ञानिक पत्रजातों, संक्षिप्त रचनाओं तथा अन्य ग्रंथों में आ गयी हैं। यद्यपि यह सच है कि क्वांटम-यांत्रिकी सदैव पृष्ठभूमि में विद्यमान रहती है और जहाँ-तहाँ उसका जिक्र भी आया है, फिर भी इन व्याख्यानों का मूल विषय चिरप्रतिष्ठित (क्लैसिकल) भौतिकी है।

इस पुस्तकमाला की पुस्तकों का क्रम वही है जो अध्यापन-प्रणाली का था, अर्थात्;

(१) यांत्रिकी।[1]
(२) विकृति-योग्य पिंडों की यांत्रिकी।[2]
(३) वैद्युतिक गतिविज्ञान।[3]

1. Mechanics 2. Mechinics of Deformable bodies 3. Electrodynamics

(४) प्रकाशिकी।[1]
(५) उष्मा-गतिकी तथा सांख्यिकीय यांत्रिकी।[2]
(६) भौतिकी में आंशिक अवकल-समीकरण-वृन्द।[3]

यान्त्रिकी के व्याख्यान बारी-बारी से एक वर्ष में स्वयं और दूसरे वर्ष गणित-विभाग के मेरे सहकर्मी देते थे। द्रवगतिकी, वैद्युतगतिकी तथा उष्मागतिकी का शिक्षाक्रम भी साथ-साथ चलता था, और वह शिक्षकों द्वारा पढ़ाया जाता था। सदिश विश्लेषण के व्याख्यान अलग ही दिये जाते थे और इसलिए मेरे व्याख्यानों में यह विषय नहीं लिया जाता था।

अपने व्याख्यानों की तरह ही इन पुस्तकों में भी गणितीय प्रारंभिक (यद्यपि भौतिक) बातों पर समय व्यतीत नहीं किया गया है; वरन् सीधे ही, भरसक शीघ्र, भौतिक समस्याओं पर ही पहुँचा गया है। उद्देश्य यह है कि पाठक के सम्मुख उन विस्तृत और विभिन्न बातों का जीवित-जाग्रत सा चित्र प्रस्तुत किया जाय जो यदि भौतिकीय तथा गणितीय उपयुक्त अवस्थाएँ उचित रीति से चुनी जावें तो वाद (सिद्धांत) के अन्तर्गत आती हैं। अतएव यदि यथाक्रम समर्थन तथा स्वयंसिद्ध रचना में कुछ छूट गया हो तो उसकी अधिक चिंता नहीं की गयी है। हर हालत में केवल गणितीय या तर्क संबंधी लंबे-चौड़े अनुसंधानों से मैं अपने व्याख्यानों के श्रोताओं को न तो डराकर भगा देना ही चाहता हूँ और न चित्ताकर्षक भौतिकीय बातों से उनका ध्यान हटा देना चाहता हूँ। मेरा विश्वास है कि व्याख्यानों में यह ढंग ठीक सिद्ध हुआ; इसलिए इन पुस्तकों में भी वही रखा गया है। यद्यपि यथाक्रम व्यवस्थापन के विचार से तो प्लांक[4] के व्याख्यान ऐसे हैं जिनमें कोई त्रुटि नहीं है, फिर भी मैं समझता हूँ कि मेरे व्याख्यानों में अधिक विषय आ सके हैं और गणितीय साधनों का अधिक अच्छा उपयोग किया जा सका है। मैं अपने पाठकों का ध्यान प्लांक के अधिक पूर्ण और अधिक पर्याप्त विवरण की ओर विशेषकर उष्मा-गतिकी और सांख्यिकीय यांत्रिकी के सम्बन्ध में प्रसन्नतापूर्वक आकर्षित करता हूँ।

प्रत्येक पुस्तक के अंत में जो समस्याएँ दी गयी हैं उन्हें मूल-रचना की संपूरक समझना चाहिए। वे विद्यार्थियों से प्राप्त हुई थी और प्रश्नों वाले घंटे में क्लास में वे पूछी गयी थी। प्रारंभिक संख्यात्मक समस्याएँ, जिनकी पाठ्य-पुस्तकों और समस्या-

1. Optics 2. Thermodynamics and Statistical Mechanics. 3. Partial Differential Equations in Physics. 4. Plank.

संग्रहों में भरमार होती है, इन पुस्तको मे साधारणतया नही दी गयी हैं। समस्याओं की संख्या अध्याय के अनुसार दी गयी है। (सेक्शन्स) प्रकरणों की संख्या लगातार दी गयी है परंतु समीकरणों की संख्याएँ प्रत्येक प्रकरण मे अलग-अलग प्रारंभ और समाप्त कर दी गयी हैं। इस प्रकार प्रत्येक पुस्तक मे पहले आये हुए समीकरण केवल अपनी और प्रकरण की संख्याओ द्वारा सूचित किये जा सकते हैं। किसी भी संख्या वाले प्रकरण को सुगमतापूर्वक ढूँढ़ लेने के लिए प्रत्येक पृष्ठ के ऊपरी कोने मे अध्याय और प्रकरण की संख्याएँ दे दी गयी हैं।

अपने अध्यापन-काल के वर्षो की बातों का स्मरण करने में मैं दो विशेष व्यक्तियों का कृतज्ञतापूर्वक नाम निर्देशन करना चाहता हूँ। वे हैं राटजेन और फेलिक्स क्लाइन।[1] राटजेन ने न केवल मुझे एक विशेष अधिकार युक्त कार्य-क्षेत्र मे बुलाकर वृत्तिक उत्साह के लिए बाह्य दशाएँ उत्पन्न की, अपितु उन्होंने सदा मेरा साथ दिया और कई वर्षो तक मेरे बढ़ते हुए कार्य का विस्तार और भी बढाया। इसके पहले ही फेलिक्स क्लाइन मेरी गणितीय बुद्धि को ऐसी चित्त-वृत्ति दे चुके थे जो कि अनुप्रयोगों के लिए सबसे अधिक ठीक है। व्याख्यान देने की कला में अपने विशिष्ट नैपुण्य द्वारा उन्होंने मेरे पढ़ाने की विधि को भी परोक्ष रूप से बहुत प्रभावित किया। विशेषतः यह कह देना चाहिए कि प्रस्तुत व्याख्यानो का अंतिम भाग प्रथम बार उस समय घोषित कर दिया गया था जब मैं अभी गार्टिजन में ही शिक्षक था और उस युनिवर्सिटी के रीमान, डिरीख्लेट, क्लाइन, इन तीन पंडित-वरो के नामों से सूचित होनेवाली गणितीय परंपरा[2] से खूब अनुप्राणित हो चुका था। उस समय मेरा अध्यापन-क्रम उतना विस्तीर्ण न था जितनी कि प्रस्तुत माला की छठी पुस्तक है परंतु उसने श्रोतागणों मे बड़ी हलचल पैदा कर दी थी। जब ये पहले के व्याख्यान बाद मे फिर से दिये गये तब मेरे शिष्य बहुधा कहा करते थे कि उन व्याख्यानों द्वारा ही हम (शिष्य) ऐसे गणितीय परिणामों का व्यवहार और अनुप्रयोग वास्तव में समझ पाये थे जैसे कि फोरियर की विधि, फलनवाद के अनुप्रयोग, सीमा पर के मान से सम्बन्धित समस्याएँ।[3]

1. Rontgen and Felix Klein,

2. Riemann—Dirichlet—Klein,

3. Fourier Methods, application of the theory of functions, boundary value problems,

अंत में इन ग्रंथों को इस आशा से प्रस्तुत कर रहा हूँ कि ये हमारे इस मनोरम विज्ञान में पाठक की रुचि आकर्षित करेंगे और उसे उतना ही आनन्द प्रदान करेंगे जितना कि उन लोगों को प्राप्त हुआ था जिन्होंने इस अध्यापन-प्रणाली से शिक्षा ग्रहण की और जिसका कि स्वयं मैंने अपने बहु-वर्षीय अध्यापन-काल में अनुभव किया।

म्यूनिख, सितम्बर १९४२ आर्नाल्ड सोमरफेल्ड

उपोद्घात

यांत्रिकी गणितीय भौतिकी की रीढ है। पिछली शताब्दी मे इस संबंध का प्रत्येक विषय समझाने के लिए यांत्रिकी आधारण तैयार कर लिया जाता था। परतु आजकल भौतिकी के लिए वैसी आवश्यकता नही रहती। फिर भी हम समझते है कि यांत्रिकी के सिद्धांत, जैसे कि संवेग (गतिमात्रा), ऊर्जा और लघुतम क्रिया संबंधी सिद्धान्त,[1] भौतिकी की प्रत्येक शाखा के लिए अत्यन्त महत्त्व के है।

इस ग्रंथ का नाम "यांत्रिकी" रखा गया है, "वैश्लेषिक यांत्रिकी" नही जैसा कि गणितज्ञ करते। इस पिछले नामका उल्लेख १७८८ मे लाग्रांज़[2] के महान् ग्रंथ मे हुआ था। उन्होंने सारी की सारी यांत्रिकी को गणितीय समीकरणों की संगत भाषा मे रचने का यत्न किया और उन्हें इस बात का गर्व था कि "मेरी सारी रचनाओं मे एक भी रेखाचित्र न मिलेगा।" इसके विरुद्ध, हम भरसक दृष्टान्तो और उपमाओं की सहायता लेंगे। इस ग्रंथ में पाठक को खगोल विद्या, भौतिकी, यहाँ तक कि कहीं-कही इंजिनियरी (निर्माण आदि विद्या) मे भी प्राप्त साकार अनुप्रयोग मिलेंगे जो सिद्धांतों को भली-भाँति समझने में सहायक होंगे।

इस पुस्तक का ठीक-ठीक नाम होना चाहिए, **"परिमित संख्या की स्वतंत्रता-युक्त निकायों की यांत्रिकी।"** तदनुसार द्वितीय, पुस्तक का नाम होता, "अपरिमित संख्या की स्वतंत्रतायुक्त निकायों की यांत्रिकी"। परतु (कदाचित्) स्वतंत्रता की संख्याओ" का अभिप्राय बहुत स्पष्ट समझ मे न आयगा और उसका स्पष्टीकरण इस पुस्तक के द्वितीय अध्याय के प्रारंभ मे ही किया जा सकेगा; अतएव हमे इस पुस्तक के लिए प्रचलित नाम, अर्थात् यांत्रिकी, से ही संतोष करना पडेगा। वास्तव मे वह ऐसा नाम है जिससे यह समझने में कोई दुविधा न होगी कि इस पुस्तक के अंतर्गत क्या है।

विषयारंभ हम न्यूटन के ग्रंथ "प्राकृतिक ज्ञान में गणितीय सिद्धान्त"[3] मे दिये हुए भौतिक विश्लेषण से करेंगे। इससे यह न समझना चाहिए कि न्यूटन के पहले इस

1. Momentum, energy, and least action 2. Lagrange (1788).
3. "Phisosophiae Naturalis Principia Mathematica (London, 1687)

विषय के पंडित थे ही नहीं। आर्किमिडीज, गैलिलियो, केप्लर और ह्यजेन्स[1] आदि पहले के पंडित हैं। परंतु इसमें संदेह नहीं कि न्यूटन ने ही पहले-पहल व्यापक यांत्रिकी की पक्की नींव डाली। आज भी कुछ थोड़े से परिवर्त्तन और वृद्धि के अतिरिक्त, जो नींव न्यूटन ने रक्खी थी वही व्यापक यांत्रिकी का स्वाभाविकतम तथा शिक्षा-शास्त्रानुसार सरलतम विषय-प्रवेश है।

सर्वप्रथम हम एकाकी संहति-बिंदु[2] अर्थात् कण की यांत्रिकी पर विचार करेंगे।

1. Archimedes, Galileo, Kepler and Huygens
2. Mechanics of the single mass point or particle.

प्रथम अध्याय

कण की यांत्रिकी

§ १. न्यूटन के स्वयंतथ्य

गति के नियम स्वयंतथ्यों के रूप में दिये जायेंगे। सारी अनुभूत बातों को वे यथार्थ रूप में संक्षेप में प्रकट कर देते हैं।

प्रथम नियम—यदि कोई बल उसे अपनी दशा बदलने को विवश न करे, तो प्रत्येक द्रव्यात्मक पिंड अपनी प्रस्तुत दशा में ही रहता है, चाहे यह दशा विराम की हो, चाहे ऋजुरेखा में एक समान गति की।*

इस नियम में जो बल की धारणा प्रस्तुत की गयी है, उसका स्पष्टीकरण हम साम्प्रति न करेंगे। यह भी देखिए कि विराम तथा (ऋजुरेखीय) एक समान गति,

* इसके तथा आगे की बातों के भी संबंध में यहाँ पर निम्नलिखित पुस्तक का उल्लेख कर देते हैं: Ernst Mach: Die Mechanik in ihrer Entwickelung (8th ed., F.A., Brockhaus, Leipzig, 1923). जिसके अंग्रेजी अनुवाद का नाम है: The Science of Mechanics (यांत्रिकी का विज्ञान) Open Court Publishing Co., LaSalle, Ill., 1942.

इस उत्तम, विवेचनापूर्ण, इतिहास का यांत्रिकी के सभी विद्यार्थियों को अध्ययन करना चाहिए, विशेषतः इसलिए कि प्रस्तुत पुस्तक में हम यांत्रिकी की धारणाओं को केवल इस प्रकार ही दे सकते हैं कि उनका तुरंत ही व्यवहार किया जा सके; उनका प्रादुर्भाव तथा स्पष्टीकरण कैसे हुआ, इन बातों को बताने का हमें अवसर नहीं मिलेगा। परंतु इससे यह न समझना चाहिए कि हम माख के उन प्रत्यक्षवादीय विचारों positivistic philosophy, से सहमत हैं जिनका विकास उन्होंने अपने ग्रंथ के चतुर्थ अध्याय के चतुर्थ प्रकरण में किया है जहाँ उन्होंने आर्थिक सिद्धांत Economy Principle, पर आवश्यकता से अधिक जोर दिया है तथा परमाणु-वाद का खंडन किया है और औपचारिक अविच्छिन्नता-वादों से सहमति प्रकट की है।

दोनों ही दशाएँ एक ही श्रेणी की समझी गयी हैं और पिंड की स्वाभाविक अवस्थाएँ मान ली गयी हैं। यह नियम स्वीकार कर लेता है कि पिंडों में अपनी इन स्वाभाविक दशाओं में ही बने रहने की प्रवृत्ति होती है। इस प्रवृत्ति को पिंड का अवस्थितित्व[1] कहते हैं। यह स्वयंतथ्य बहुधा न्यूटन के प्रथम नियम के बदले गैलिलियो कृत अवस्थितित्व नियम के नाम से पुकारा जाता है। इस बारे में यह कह देना चाहिए कि यद्यपि यह बिलकुल ठीक है कि (शून्य-प्राय नति के धरातल पर सरकते हुए पिंडों के अपने प्रयोगों के चरम परिणामस्वरूप) गैलिलियो यह नियम न्यूटन से बहुत पहले ही निर्धारित कर चुके थे, तथापि यह न्यूटन की ही विशेषता थी कि उन्होंने इस नियम को अपनी कार्यप्रणाली में सर्वोच्च स्थान दिया। न्यूटन के शब्द, "पिंड" (बॉडी) के स्थान पर फिलहाल "कण" या "संहति-बिंदु" शब्दों का उपयोग किया जायगा।

प्रथम नियम का गणित की दृष्टि से सूत्रीकरण करने के लिए हम "प्रिंसिपिया" में इस नियम से पहले आने वाली प्रथम और द्वितीय परिभाषाओं का उपयोग करेंगे।

द्वितीय परिभाषा—गति की मात्रा ही उसकी माप है और वेग तथा द्रव्य-मात्रा, दोनों ही के संयोग से बनती है।‡

अतएव "गतिमात्रा" हुई दो पदों का गुणनफल; एक तो वेग, जिसका तात्पर्य ज्यामितीयत: प्रकट है; * और दूसरा, "द्रव्य की मात्रा", जिसकी व्याख्या भौतिकतः

1. Inertia

‡ न्यूटन की प्रिंसिपिया का ऐंड्रयू मॉट (Andrew Motte) कृत अंग्रेजी अनुवाद—अनुवादक।

न्यूटन का जीवन काल था—२५ दिसंबर १६४२ से २० मार्च १७२७ तक। प्रिंसिपिया का प्रथम संस्करण १६८७ में प्रकाशित हुआ था। उसका तीसरा संस्करण १७२५ में निकला था। जैसा कि नाम ही से प्रकट है, प्रिंसिपिया उस समय के विद्वानों की भाषा लैटिन में लिखा गया था। अंग्रेजी भाषांतर, इस तृतीय संस्करण का अनुवाद श्रीमॉट द्वारा, १७२९ में प्रकाशित हुआ। इस अंग्रेजी भाषांतर का पुनर्मुद्रण, कैलिफोर्निया युनिवर्सिटी के गणितीय इतिहास के सम्मानित अध्यापक श्री फ्लोरिन कजोरी (Florin Cajori,) के द्वारा संपादित, १९३४ में केम्ब्रिज युनिवर्सिटी प्रेस ने प्रकाशित किया था—

* प्रकट तब जब कि वेग की माप के लिए अभिदेश प्रणाली चुन ली गयी हो।

करनी है। न्यूटन इस बात का प्रयत्न प्रथम परिभाषा में यों करते है कि द्रव्य की मात्रा अपने घनत्व तथा आयतन के संयोग से निर्धारित की जाती है। परतु स्पष्ट है कि यह तो परिभाषा की विडम्बना मात्र है क्योकि स्वयं घनत्व की परिभाषा इसके अतिरिक्त और कोई हो ही नहीं सकती कि वह एक इकाई आयतन मे आये हुए द्रव्य की मात्रा है। उसी प्रथम परिभाषा में न्यूटन यह भी कहते है कि "द्रव्य - मात्रा" के स्थान मे वे "मास" (संहति)[1] शब्द का उपयोग करेंगे। इस बात मे हम उनका अनुकरण करेंगे परतु संहति (एव बल) की भौतिकीय परिभाषा आगे चल कर करेंगे।

इस प्रकार गति की मात्रा संहति और वेग का गुणनफल हो गयी। वेग की भाँति गति-मात्रा भी दिशायुक्त राशि हुई, अर्थात् "सदिश"। हम लिखते हैं ‡

(1) गतिमात्रा $\mathbf{P}=m\times\mathbf{V}$ संहति×वेग

और गति संबंधी प्रथम नियम का सूत्रीकरण इस प्रकार करते है कि

(2) $\mathbf{P}=\text{const.}$ नियताक, बलों की अनुपस्थिति में।

इस प्रकार सूत्रीकृत अवस्थितित्व के नियम को हम अपनी यांत्रिकी मे सबसे पहले रखेंगे। वह कई शताब्दियों में हुए विकास का परिणाम है और उतना स्वयं प्रकट नही है जितना कि आज दिन हमे जान पड़ता है। उदाहरणतः, दर्शनशास्त्रज्ञ श्री कैंट[2], न्यूटन के बहुत दिनों बाद, "सजीव (प्रत्यक्ष) बलों के सच्चे निरूपण पर विचार" शीर्षक १७४७ मे लिखित अपनी रचना में कहते है कि "दो प्रकार की गतियाँ होती हैं--एक तो वे जो कुछ समय बाद नही रहती और दूसरी वे जो जारी रहती है।

1. Mass

‡ हम यह मान लेंगे कि पाठक सदिश बीजगणित की प्रारंभिक, मौलिक बातें जानते होंगे। परंतु सदिश की क्रियाओं के प्रादुर्भाव और यांत्रिकी (जिसमें तरलों की यांत्रिकी भी सम्मिलित है), इनमें घना संबंध होने के कारण हमें बहुधा यांत्रिकी की धारणाओं के साथ-साथ सदिश की धारणाओं के भी व्यक्तीकरण का अवसर मिलेगा।

संकेतन अर्थात् अंकन-पद्धति के बारे में कह देना चाहिए कि इस पुस्तक में सदिश सर्वथा मोटे अक्षरों द्वारा सूचित किये जायेंगे यथा, कोणीय वेग के लिये $\mathbf{W}$, जहाँ कहीं भी वह (अक्षीय) सदिश की भांति आता है। रेखा चित्रों में सदिशों को सूचित करने के लिए कभी-कभी उनके ऊपर तीर का चिन्ह दे दिया जायेगा।

2. Kant : Thoughts on the True Estimation of Living Forces.

जो गतियाँ कैण्ट के विचारानुसार अपने आप बंद हो जाती हैं, वे आधुनिक—एवं न्यूटन के—मतानुसार घर्पणीय बलों द्वारा कम की जाकर अंत में नष्ट हो जाती है।

"गति की मात्रा" यह शब्दपुंज जरा ठीक नहीं जँचता क्योंकि उससे mV का सदिश-लक्षण प्रत्यक्ष नहीं होता। उसके स्थान में "आवेग" शब्द का व्यवहार अधिक उचित होता क्योंकि उससे उस विशेष मात्रा के किसी विशेष दिशा में लगने वाले धक्के का बोध होता है जोकि किसी दिये हुए mV और विरामशील पिंड को टक्कर से उत्पन्न होता है। परंतु यांत्रिकी में पारिभाषिक शब्द "आवेश"[1] का उपयोग जरा दूसरे ही अर्थ में होता है, इसलिए हमें सदिश P के लिए "गतिमात्रा" या आधुनिक काल का "संवेग"[2] शब्द रखना ही पड़ेगा। अब हम अवस्थितित्व का नियम, या 'न्यूटन का गति का प्रथम नियम,' इन दोनों के स्थान में "संवेग के संरक्षण का नियम" कह सकते हैं।

इसके बाद अब हम न्यूटन के द्वितीय नियम पर विचार करेंगे। गति संबंधी वास्तविक नियम यही है। **गति में परिवर्त्तन, प्रारोपित बल के समानुपाती है, और जिस ऋजु रेखा में बल आरोपित हो, उसी दिशा में होता है।**

"गति में परिवर्त्तन" से निस्संदेह न्यूटन का अभिप्राय उस परिवर्त्तन से था जो समय के अंतर से ऊपर परिभाषित संवेग P में होता है, अर्थात् दिष्ट $\dot{P}$। न्यूटन के संकेतन में $\dot{P}$ के ऊपर के बिंदु से समय संबंधी अवकलन सूचित होता है, अर्थात् $\dot{P}=\frac{dP}{dt}$ यदि बल (अंग्रेजी का फोर्स) F अक्षर द्वारा सूचित किया जाय तो हम द्वितीय नियम इस प्रकार लिख सकते हैं —

$$\dot{P}=F \tag{3}$$

संवेग P द्वारा सूचित किया गया था। प्रस्तुत नियम दर्शाता है कि कालांतर में संवेग किस प्रकार परिवर्त्तित होता है और, इसलिए, संक्षेप में उसे "संवेग का नियम" कह सकते हैं।

अभाग्यवश, इस नियम को बहुधा, विशेषकर गणितीय आलेखों में, "न्यूटन का त्वरण संबंधी नियम" कह देते हैं। यह ठीक है कि यदि संहति m नियत समझी जाय तो (3) और (1) का संयोग (3a) से सर्वसम है जहाँ पश्चोक्त है—

$$m\dot{V}=F \text{ अर्थात् संहति} \times \text{त्वरण} = \text{बल।} \tag{3a}$$

1. Impulse 2. Moment

परंतु संहति सर्वदा नियत नही रहती। उदाहरणतः आपेक्षिकता-वाद मे संहति चर है। यहाँ न्यूटन का सूत्रीकरण (3) ही, भविष्यवाणीवत्, ठीक है। आगे चल-कर, चतुर्थ प्रकरण (§४) में, चर संहति के कई उदाहरण दिये जायेंगे। वहाँ (3) और (3*a*) सूत्रीकरणों के मिथ-संबंध[1] पर "विशेष दृष्टि" डाली जायगी। प्रसगवश, सरलता के विचार से जो यात्रिक विकास एकाकी सहति-विंदु के सन्निकटतम है, वह घूर्णन युक्त दृढ पिंड है। इस नियम पर विचार करने मे जो गति का समीकरण निकलता है वह (3) के समान है कि

"संवेग-घूर्ण (अर्थात् कोणीय सवेग) के परिवर्त्तन की दर=बल का घूर्ण (अर्थात् ऐंठ)"।

कोणीय संवेग के संबंध में (3*a*) जैसे समीकरण का निकलना असभव है। आपेक्षिकता की संहति-अनियतता की भाँति के एक दूसरे ही प्रभाव का यहाँ जिक्र कर देना चाहिए। इसमें संहति के स्थान में अवस्थितित्व-घूर्ण आना है, जो घूर्णनअक्ष के परिवर्त्तन के अनुसार परिवर्तित होता रहता है।

अब बल की धारणा संबंधी अपने विचार बिलकुल स्पष्ट कर लेना चाहिए। किर्कॉफ* बल को तो केवल मात्र संहति और त्वरण के गुणन से प्राप्त राशि कहकर उसकी पदच्युति करना चाहते थे। हर्ज़ † ने भी विचाराधीन निकाय को अन्य, व्यापकत. परोक्ष, प्रस्तुत निकाय से मिथ-क्रियाशीलनि कायों से सयोजित कर, बल को हटाकर उसके स्थान पर उपयुक्त मिथ-क्रिया ही बैठा देने का यत्न किया। हर्ज़ ने यह कार्यक्रम प्रशंसनीय सागत्यपूर्वक समाप्त किया; परतु उसके कोई सफल परिणाम न निकले और नौसिखुए के लिए तो वह विशेषकर अनुपयुक्त है।

हमारा विचार तो यह है कि अपने स्नायुओं को काम मे लाते समय जो हमारा अनुभव होता है उससे हमे सीधे ही सीधे बल का गुणात्मक बोध हो जाता है। फिर पृथिवी हमें स्वाकृष्टि अर्थात् गुरुत्व द्वारा एक तुलनात्मक मानक प्रदान करती है

1. *Inter-relation,*

* Gustav (गुस्टाफ) Kirchhoff. Vol I of his Vorlesungen uber mathematische Physik (गणितीय भौतिकी पर विचार) p. 22

† Heinrich Hertz. Miscellaneous Papers (विविध रचनाएँ) Vol., III, Principles of Mechanics, (यांत्रिकी के सिद्धांत) Macmillan, New York, 1896.

जिससे हम अन्य सब बलों की मात्रात्मक माप कर सकते हैं। इस काम के लिए हमें केवल उपयुक्त वजन द्वारा किसी भी बल के प्रभाव का संतुलन मात्र करना होता है। (घिरनी और डोरी द्वारा हम गुरुत्व के ऊर्ध्वाधर बल को किसी भी दिये हुए बलकी क्रिया की दिशा के प्रतिकूल लगा सकते है।) इसके अतिरिक्त यदि हम कई एक-ही भार के पिंड, अर्थात् "बट्टों का कुलक",[1] बनावें, तो एक ऐसा परीक्षामूलक मापक्रम तैयार हो जाता है जिससे बल की मात्रात्मक माप की जा सकती है।

बल की धारणा के लिए वही बात लागू है जो अन्य सब भौतिकीय धारणाओं या नामों को लागू है कि—शाब्दिक परिभाषाओं में बहुत कम आशय होता है; भौतिक अभिप्राययुक्त परिभाषा वैसे ही बन जाती है जैसे ही कि किसी प्रस्तुत राशि की माप की विधि निर्दिष्ट कर दी जाय। इस प्रकार के निर्देशन में प्रायोगिक प्रक्रिया का ब्योरा देने की आवश्यकता नहीं होती किंतु केवल राशि की माप करने के सिद्धांत मात्र का कह देना पर्याप्त है।

गुरुत्व के उपयोग वाला उपर्युक्त निर्देशन संवेग के नियम (3) के दाहिनी ओर के संकेत को साकारता प्रदान करता है; इस प्रकार वह एक वास्तविक भौतिकीय कथन हो जाता है। यह सच है कि बायीं ओर के संकेत में संहति, m, आती है जिसकी अभी कोई परिभाषा नहीं की गयी है। इसका यह मतलब नहीं कि संहति की परिभाषा इस नियम की केवल मात्र अंतर्वस्तु है। क्योंकि नियम यह दर्शाता है कि बल जो राशि बल निर्धारित करता है वह $\mathbf{p}$ नहीं $\dot{\mathbf{p}}$ या कदापित् $\ddot{\mathbf{p}}$ है। चतुर्थ प्रकरण (§ ४) में देखेंगे कि यदि संहति चर हो तो उसकी परिभाषा कैसे प्राप्त की जाती है। आपेक्षिकता सम्बन्धी संहति उदाहरणवत् होगी।

तृतीय नियम—क्रिया सदा प्रतिक्रिया के बराबर होती है, या दो पिंड जो आकर्षण शक्ति एक दूसरे पर लगाते हैं वह सदा मात्रा में बराबर परन्तु दिशा में प्रतिकूल होती है।

यह क्रिया और प्रतिक्रिया का सिद्धांत है। वह कहता है कि प्रत्येक दाब के लिए प्रतिकूल दिशा में भी दाब होता है। प्रकृति में बल सदा द्वैत रूप में प्रकट होता है। गिरता हुआ पत्थर पृथिवी को उसी जोर से आकर्षित करता है जिससे कि पृथिवी पत्थर को।

1. Set of weights

इस नियम के कारण एक एकाकी संहति विन्दु की यांत्रिकी से यौगिक निकायों की यांत्रिकी को पहुँचना संभव हो सका है। अतएव यदि एक उदाहरण दें तो कह सकते हैं कि निर्माण संबंधी स्थैतिकी[1] के सारे क्षेत्र के लिए वह मौलिक है।

वलों के समांतर चतुर्भुज सम्बन्धी नियम को हम अपना **चतुर्थ नियम** मानेंगे, यद्यपि न्यूटन के लेखों में वह केवल मात्र अन्य गति संबंधी नियमों के परिवर्द्धन या उपप्रमेय (कॉरोलरी) की भाँति मिलता है। चतुर्थ नियम कहता है कि यदि एक ही संहति-विंदु पर दो वल लग रहे हों तो उनका संयुक्त फल ऐसा होता है मानों उनसे वने हुए समांतर चतुर्भुज के विकर्ण जितना वल वहाँ लग रहा है। मतलव यह कि **वलों का योग सदिशवत् होता है**। यह स्वयं-प्रकट सा जान पड़ता है, क्योंकि द्वितीय नियम में हमने वल, $\mathbf{F}$, को सदिश, $\dot{\mathbf{P}}$, के वरावर रख दिया था। परंतु वास्तव में, जैसा कि माख ने जोर देकर कहा था, चतुर्थ नियम में यह स्वयतथ्य समाया हुआ है कि किसी संहतिविंदु पर लगा हुआ प्रत्येक वल सहति की गति में इस प्रकार परिवर्तन करता है मानो वही अकेला वहाँ लग रहा है। अतएव वलों का समांतर चतुर्भुज स्वयसिद्धतः एक ही विंदु पर एक ही साथ लगे हुए अनेक वलो के प्रभावों की स्वतन्त्रता या, अधिक व्यापकतया, **बलों के अध्यारोपण का सिद्धांत** स्थापित करता है। निस्सदेह यह पिछली अभ्युक्ति एवं उससे पहले कहे हुए गति के नियमवृंद हमारे सारे अनुभवो के आदर्शीकरण तथा उनका यथार्थ सूत्रीकरण मात्र है।

वल की धारणा प्रस्तुत करने के बाद अव हम यहाँ **कार्य या कर्म** (W) की धारणा इस परिभाषा द्वारा प्रस्तुत करेंगे कि

$$(4) \qquad dW = \mathbf{F} \times \mathbf{ds} = F\, ds = \cos\, (\mathbf{F},\, \mathbf{ds})$$

अतएव कर्म "वल वार दूरी"[2] के वरावर नही जैसा कि वहुधा कहा जाता है, किंतु "पथ की ओर वल के घटक वार पथ-दैर्घ्य" या "वल वार वल की ओर पथ-दैर्घ्य के घटक" के।

इस अभ्युक्ति से कि "वलों का योग सदिशीय होता है", कोटिपूरक वात तुरंत निकल आती है कि "कर्म का योग वीजगणितीयत: होता है।" वास्तव में,

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \ldots\ldots = \mathbf{F};$$

और, सदिशों के अदिक् गुणन से,

$$(5) \qquad \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{ds} + \mathbf{F}_2 . \mathbf{ds} + \ldots = \mathbf{F} . \mathbf{ds}.$$

1. Structural statics 2. Force times distance

यहाँ $\mathbf{F}$ परिणामी बल है। अदिश्-गुणन[1] की परिभाषा (4) में अंतर्भावित है। इससे यह अपने-आप हो जाता है कि, उदाहरणतः, (5) के प्रथम गुणन में केवल ds_1 अर्थात् दूरी का प्रथम बल $\mathbf{F}_1$ की ओर का घटक, आता है। अवश्य (5) के स्थान में हम लिख सकते हैं

$$(6) \qquad dW_1+dW_2+\ldots=dW,$$

जैसा कि ऊपर कहा जा चुका है।

कर्म की धारणा से शक्ति (पावर) की धारणा संबधित है; शक्ति=एक इकाई काल में किया हुआ कर्म।

इन उपोद्घातीय कथनों को समाप्त करने के पहले हमें यह ठीक कर लेना होगा कि यहाँ तक आयी हुई यान्त्रिक राशियों की माप कैसे की जाय। इस काम के लिए दो मापक पद्धतियाँ है अर्थात् भौतिकीय (या निरपेक्ष) और व्यावहारिक (या गुरुत्वाकर्षणीय) मीटरीय पद्धति। दोनो में भेद यह है कि निरपेक्ष पद्धति में ग्राम (या किलोग्राम) संहति का मात्रक (इकाई) है; गुरुत्वाकर्षणीय पद्धति में किलोग्राम (या ग्राम) बल का मापक है। पश्चोक्त पद्धति में हम किलोग्राम के भार की बात करते हैं और कहते हैं कि

एक किलोग्राम-भार=$g\times$एक किलोग्राम संहति [$1kg$-भार=$g\times 1kg$संहति।]

यहाँ g गुरुत्वाकर्षणीय त्वरण है जो कि पृथ्वी के स्थान पर निर्भर करता है। ध्रुवों पर उसका मान भूमध्यरेखा पर होने वाले मान से तनिक अधिक है क्योंकि पृथ्वी-केन्द्र से ध्रुवों की दूरी भूमध्य रेखा की दूरी से जरा कम है, एवं अपकेन्द्र बल भी कम है। इसलिए Kg (किग्रा) भार स्थान पर निर्भर करता है। किग्रा-भार का नमूना (न्यादर्श)[2] एक स्थान से दूसरे स्थान पर नही ले जाया जा सकता। इस कारण, गुरुत्वाकर्षणीय पद्धति यथार्थ माप के लिए उचित नही। इसके विपरीत, भौतिकीय पद्धति को "निरपेक्ष मापन पद्धति" कहते है। परतु फिर भी, गुरुत्वीय पद्धति के हम इतने अभ्यस्त हो गये है कि बहुत से स्थानो मे जहाँ वास्तव मे "सहति" शब्द का व्यवहार करना चाहिए वहाँ, वैज्ञानिक लेखो में भी, "भार" शब्द का व्यवहार सदा के लिए होने लगा है। उदाहरणतः हम कहते है कि विशिष्ट भार, जबकि कहना चाहिए विशिष्ट सहति या घनता। इसी प्रकार कहते है परमाणव या आणव भार[3] यद्यपि यहाँ गुरुत्वाकर्षण से उत्पन्न त्वरण से कुछ भी सबध नहीं।

1. Scalar product 2. Sample
3. Atomic or molecular weight

गॉस[1] ने निरपेक्ष पद्धति को जन्म दिया था; परंतु वैसा करने मे वे काफी हिच-किचाये थे। प्रारंभ में वे भी बल को ही मौलिक मात्रक बनाने के पक्ष मे थे, क्योंकि पार्थिव चुम्बकत्त्व संबंधी उनकी मापों में संहति की अपेक्षा भार का ही महत्त्व अधिक होता था। परंतु वे अपने इन परिणामों को सारे भूगोल के लिए लागू करना चाहते थे। अतएव मात्रक (यूनिट) के लिए उन्हें ऐसी राशि लेनी पड़ी जिसका मान स्थान-स्थान पर नही निर्भर करता।

नीचे हमने दोनों पद्धतियों को साथ-साथ रख दिया है; साथ ही व्युत्पन्न मात्रक भी दे दिये गये है—डाइन, अर्ग, जूल, वाट, अश्व-शक्ति या अ० श०।[2]

निरपेक्ष पद्धति (Absolute System) (स ग स) (*CGS*)	गुरुत्वीय पद्धति (Gravitational system (म क स) *MKS*
सेंटीमीटर (सें० मी०) ग्राम (संहति) *Cm* *g* (mass)	मीटर किलोग्राम (भार) सेकंड *m* *Kg* *weight* sec
1 किलोग्राम भार (kg weight) $=9{\cdot}81\times10^5$ ग्राम (*g*) सेमी (*cm*) से०$^{-2}$ (sec)$^{-2}$ $=9.81\times10^5$ डाइन (dyne)	1 ग्राम संहति (g mass) $=\frac{1kg}{1000}\times\frac{1}{g}$ Sec^{-2} m^{-1}
1 अर्ग (erg) = 1 dyne × 1*cm*	1 कर्म-मात्रक (unit of work) = 1 किग्रा (*kg*) × 1 मीटर (*m*)
1 जूल (joule) = 10^7 अर्ग	
1 मीटर किलोग्राम भार (*mkg*weight) = 1000g × 100 अर्ग $=9.81\times10^7$ erg = 9.81 जूल (joule)	
1 वाट (Watt) = 1 जूल (joule)— sec^{-1}	1 शक्ति-मात्रक (unit of power) = 1*kg m* sec^{-1}
1 किलोवाट (killowatt) = 1000 joule sec^{-1} $=\frac{1HP}{0.736}=1.36$HP	1HP = 75*kg m* sec^{-1} $=75\times1000^1\times10c\times981$erg, sec^{-} $=75\times9.81$ वाट = 0.736 किलोवाट (*kw*)

बता देना चाहिए कि उपयुक्त सार्व-राष्ट्रिय आयोगों के एक निर्णय के अनुसार १९४० में स ग स (*CGH*) पद्धति के स्थान पर एक निरपेक्ष म क स (*MKS*) पद्धति होने वाली थी। इस पद्धति में सेंटीमीटर के स्थान पर मीटर आता है और संहति का मात्रक ग्राम के बदले किलोग्राम (सहस्रग्राम) बन जाता है; समय का मात्रक सेकंड ही रहता है। यह निर्णय ज्यार्जी[1] के एक प्रस्ताव से मिलता जुलता है, जिसमें दिखाया है कि यह पद्धति केवल वैद्युतगतिकी ही में, एक अतिरिक्त स्वतंत्र चतुर्थ वैद्युत मात्रक के साथ, अपने उपयोग दर्शाती है (देखिए इस व्याख्यानमाला की तृतीय पुस्तक)। यांत्रिकी में प्रस्तावित परिवर्त्तन से यह लाभ होगा कि जूल और वाट की परिभाषाओं मे कष्टदायी दस-की-घातें लुप्त हो जाती हैं। म और क के नवीन वृहत्तर मात्रकों में कार्य और शक्ति के मात्रक निम्नलिखित हो जाते हैं।

$$1 M^2KS^{-2} = 10^7\ cm^2 g\ sec^{-2} = 1$$ joule जूल

और $1 M^2KS^{-3} = 10^7\ cm^2 g\ sec^{-3} = 1$ watt. वाट

नयी पद्धति में बल का मात्रक न्यूटन (newton) कहलाता है।

एक-न्यूटन(newton) $= 1 MKS^{-2} = 10^5\ cm\ g\ sec^{-2} = 10^5$ dyne(डाइन)।

यह भी ज्यार्जी पद्धति की उपयोगिता समझी जा सकती है; क्योंकि इसमें बल का नया मात्रक, अधिकतर सुभीते के गुरुत्वीय मात्रक, किलोग्राम-भार (*kg*-weight) के पास पहुँच जाता है। बल का पुराना मात्रक, डाइन बहुत सी बातों के लिए असुविधा-जनक तथा बहुत छोटा है।

§ २ आकाश, काल और अभिदेश-पद्धतियाँ*

आकाश[2] और समय संबंधी न्यूटन के विचार नवयुग के हम लोगों को सारहीन से जान पड़ते हैं और केवल मात्र तथ्य को ही अपने विश्लेषण का आधार बनाने वाले उनके घोषित संकल्प का विरोध सा करते प्रतीत होते हैं। वे कहते हैं कि—

"निरपेक्ष आकाश, अपने ही स्वभाव वश, किसी भी बाहरी दशा पर न निर्भर करता हुआ, सदा एक-जैसा तथा अचल रहता है।

1. G. Giorgi,

* विषयारंभ करनेवाले को यदि इस प्रकरण में दिये गूढ़ विचार कदाचित् अपरिचित ज्ञात हों तो वह इसका तथा प्रकरण ४ का अध्ययन कुछ समय बाद कर सकता है।

2. Space

"निरपेक्ष, यथार्थ तथा गणितीय काल या समय, अपने आप, और अपने स्वभाववश, समभावपूर्वक, किसी भी बाहरी दशा पर न निर्भर करता हुआ बहता है। समय का दूसरा नाम स्थायीपन है।"

इन दो उद्धरणों से यह परिणाम निकलता है कि न्यूटन ने यह न सोचा कि निरपेक्ष काल कहाँ से निकाला जायगा तथा अचल निरपेक्ष आकाश में और एक जैसी चाल से चलते हुए आकाश मे क्या भेद था। ये बातें इसलिए और भी अधिक आश्चर्य-प्रद हैं क्योंकि उन्होंने विराम की तथा एक समान गति की दशाओं को अपने प्रथम नियम में एक ही श्रेणी मे रखा था। इसके दूसरी ओर, निरपेक्ष और सापेक्ष गति का भेद स्पष्ट करने का यत्न उन्होंने अपने सुप्रसिद्ध "डोल के प्रयोग" द्वारा किया।* इस प्रयोग मे बटे हुए रस्से द्वारा एक डोल को लटका कर उसे पानी से भर देते हैं। इसके बाद डोल को एकाएक छोड़ देते हैं और जैसे जसे लपेट खुलती है, डोल अपने समिति-अक्ष पर घूर्णन करने लगता है। पहले तो पानी का पृष्ठ समतल रहता है यद्यपि पानी और डोल का सापेक्ष वेग काफी अधिक होगा। परंतु धीरे-धीरे पानी, डोल की दीवारों के घर्षण से, गतियुक्त हो कर दीवारों पर चढने लगता है और उसका पृष्ठ सुपरिचित परवलयजीय आकार के गढे के रूप में हो जाता है। अत में एक स्थिर दशा आती है *जिसमें पानी और डोल के बीच कुछ भी सापेक्ष गति नहीं रहती।* परन्तु इस समय पानी की आकाश में "निरपेक्ष" गति अधिकतम होगी और तदनुसार उसके पृष्ठ की वक्रता भी अधिकतम होगी।

वास्तव मे यह प्रयोग केवल यही दिखलाता है कि घूर्णन युक्त डोल ऐसी अभिनिर्देश पद्धति[1] नही प्रस्तुत करता जिससे पानी की गति समझी जा सके। तो क्या पृथिवी भी ऐसी ही अनुपयुक्त अभिनिर्देश पद्धति प्रस्तुत करती है? वह भी घूर्णन करती है और साथ ही सूर्य के चारों ओर एक कक्षा पर चलती है। व्यापकतः, यांत्रिकी में एक आदर्श अभिनिर्देश-पद्धति के लिए क्या-क्या प्रतिबंध या शर्तें हैं? अभिनिर्देश-पद्धति से ऐसे ढांचे का मतलब है जिससे किसी सहति-बिंदु के स्थान तथा समय का बीतना, ये

* "यह प्रयोग मैंने स्वयं किया है," ऐसा कहने में कदाचित् न्यूटन का उन तत्कालीन विद्वानों, संभवतः अपने ही देश में हुए फ्रेंसिस बेकन (Francis Bacon), की ओर संकेत था जो बिना स्वयं किये हुए प्रयोगों के परिणामों का वर्णन किया करते थे।

1. Reference system

जाते जानी जा सकें। इसके लिए हम निर्देशांकों[1] की कार्तीय (Cartesian) पद्धति x, y, z, तथा काल-मापक्रम[2] t, ले सकते हैं।

अपने कामकाज के लिए, उपयुक्त अभिदेश पद्धति चुनने में हमें खगोलज्ञों पर निर्भर करना होगा। निर्देशांक अक्षों के लिए स्थिर तारावृन्द पर्याप्त नियत दिशाएँ प्रस्तुत करते हैं और नाक्षत्र दिन[3] पर्याप्त नियत कालांतर प्रस्तुत करता है। परंतु साथ ही साथ, सैद्धांतिकतया हमें एक अरुचिकर पुनरुक्ति का सामना करना पड़ता है। आदर्श अभिदेश-ढांचा वह है जिसमें पर्याप्ततः बल-स्वतंत्र पिण्ड के लिए गैलिलियो का अवस्थितित्वनियम[4] यथेष्ट यथार्थता से पालित होता हो। इस प्रकार प्रथम नियम केवल एक औपचारिक सर्वसमिका या परिभाषा की श्रेणी में बदल दिया जाता है। केवल एक सार्थक बात जो कि नियम में बच जाती है, और जो केवलमात्र औपचारिक नहीं है, यह है कि इस नियम से यह अवश्य सिद्ध होता है कि उपयुक्त गुणपूर्ण अभिदेश पद्धतियाँ विद्यमान अवश्य हैं। हमारे और अनुभव सूचित करते हैं कि खगोलविद्यानुसार स्थिति और समय का निर्धारण इस प्रकार की आदर्श पद्धति के बहुत ही पास पहुँच जाता है।

मूलतः, हमारा आशय तब भी यही होता है जब हम कहते हैं कि यांत्रिकी के नियम अवस्थितित्वीय ढांचे के अस्तित्व को पहले से ही मान लेते हैं; अर्थात् एक काल्पनिक अग-सस्थान (गठन) जिसके अक्षावृद केवल मात्र अवस्थितित्व के अधीन चलते हुए पिंडों के प्रक्षेप-पथ हैं।

अब प्रश्न यह उठता है कि यह आदर्श अभिदेशपद्धति निर्धारित कहाँ तक है। क्या ऐसी पद्धति एक ही है, x, y, z, t, की या कदाचित् ऐसी असंख्य पद्धतियाँ हैं? न्यूटन का प्रथम नियम इस प्रश्न का उत्तर तुरंत ही दे देता है क्योंकि वह बताता है कि कोई भी दो पद्धतियाँ, x, y, z, t, और x', y', z', t', तुल्य हैं, बशर्ते कि उनमें भेद केवल एकसमान स्थानातरात्मक गति का ही हो। गणितीय रूप में

$$
\begin{aligned}
x' &= x + \alpha_0 t \\
y' &= y + \beta_0 t \\
z' &= z + \gamma_0 t \\
t' &= t
\end{aligned}
\tag{1}
$$

अवकाशीय निर्देशांकों x, y, z, को अपने मूलबिंदु के प्रति घूर्णन करा के, इस रूपांतर

1. Coordinates 2. Time scale 3. Sidereal day 4. Law of inertia

(1) को हम व्यापकीकृत कर सकते हैं। इसका मतलब यह हुआ कि (1) के x, y, z के स्थान पर नये निर्देशांक ξ, η, ζ (यूनानी अक्षर क्साई, ईटा, जीटा) रख दिये जायें जो ऐसे हों कि

(2) $$\xi^2+\eta^2+\zeta^2=x^2+y^2+z^2$$

यह प्रतिबंध एक स्वेच्छ (अनियत) लम्बकोणीय रूपांतरण परिभाषित करता है। यदि दैशिक कोटिज्याएँ हों α_k, β_k, γ_k, तो इससे निकलता है

(3)

	x	y	z
ξ	α_1	α_2	σ_3
η	β_1	β_2	β_3
ζ	γ_1	γ_2	γ_3

इस अनुसूची को बायें से दायें या ऊपर से नीचे. दोनों प्रकार से पढ़ सकते हैं। (2) के कारण ये α, β, γ निम्नलिखित सुज्ञात संबंध सतुप्ट करते हैं कि

(4) $$\sum\alpha^2_k=\sum\beta^2_k=\sum\gamma^2_k=1;\ \sum\alpha_k\beta_k=\ldots\ldots=0$$ इत्यादि।

यदि अब हम (1) के दक्षिणांश के x, y, z के स्थान पर (3) के ξ, η, ζ रख दे तो हमें निम्नलिखित व्यापकीकृत रूपातरण अनुसूची* मिल जाती है

(5)

	x	y	z	t
x'	α_1	α_2	α_3	α_o
y'	β_1	β_2	β_3	β_o
z'	γ_1	γ_2	γ_3	γ_o
t'	0	0	0	1

उच्चकोटीय यात्रिकी के लिए चिह्नित पद्धति x',y',z',t' उतना ही अच्छा अभिदेश ढाँचा है जितना कि अचिह्नित पद्धति x, y, z, t। इस तथ्य को उच्चकोटीय यांत्रिकी का आपेक्षिकता सिद्धान्त कहते हैं। इसके बाद (5) को गैलीलियन रूपांतरण कहेंगे। यह चारों निर्देशाकों के लिए रैखिक रूपातरण है। प्रथम तीन निर्देशाकों में तो यह लवकोणीय रूपातरण है, काल-निर्देशाक को वह निश्चर[1] छोड़ देता है ($t'=t$)। इस पिछली अभ्युक्ति का यह आशय है कि उच्चकोटीय यात्रिकी का आपेक्षिकता-सिद्धांत काल को निरपेक्ष रखता है जैसा कि न्यूटन ने उसे स्वीकृत किया था।

* देखिए कि यह अनुसूची केवल बायें से दायें पढ़ी जा सकती है, ऊपर से नीचे नहीं; क्योंकि यह रूपान्तरण अब लवकोणीय (orthogonal) नहीं रहा।

1. Invariant

परंतु वैद्युतगतिकी के क्षेत्र में, विशेषतः प्रकाश-संबंधी घटनाओं के वैद्युतचुम्बकीय वाद में, एक नयी स्थिति प्रस्तुत होती है। इस क्षेत्र के आधार मैक्सवेल[1] के समीकरण हैं जिनके लिए आवश्यक है कि वेग c, से निर्वात में प्रकाश का प्रचारण इस अभिदेश-ढाँचे से स्वतंत्र हो जहाँ से इस प्रक्रिया का प्रेक्षण हो रहा हो। यदि किसी गोलीय तरंग का उद्गम निर्देशांकों का मूलबिंदु मान लिया जाय तो अभिनिर्देश-ढाँचा अचिह्नित हो या चिह्नित, तदनुसार उसके तरंगाग्र का समीकरण क्रमशः

(6) $$x^2+y^2+z^2=c^2t^2 \text{ या } x'^2+y'^2+z'^2=c^2t'^2$$

होगा। अब निर्देशांकों के नामों को निम्नलिखित प्रकार से बदल देना सुविधाजनक होता है

(7) $$x=x_1,\ y=x_2,\ z=x_3,\ ict=x_4$$

यहाँ i कल्पित मात्रक है (अर्थात् $i=\sqrt{-1}$)। चिह्नित निर्देशांकों की अंकन पद्धति में भी हम इसी प्रकार का परिवर्त्तन करेंगे। तो अब समीकरण वृन्द (6) यों हो जायँगे

(8) $$\sum_1^4 x^2{}_k=0,\ \sum_1^4 x'^2{}_k=0;$$

और इस तथ्य के लिए कि प्रकाश का प्रचारण (प्रोपेगेशन) अभिनिर्देश ढाँचे पर निर्भर नहीं करता, यह आवश्यक है कि †

(9) $$\sum_1^4 x'^2{}_k=\sum_1^4 x^2{}_k$$

समीकरण (2) तो त्रिविमितीय अवकाश में लंबकोणीय रूपांतरण था; परंतु समी० (9) में हमें चतुःविमितीय अवकाश में लंबकोणीय रूपांतरण मिलता है; यद्यपि यह सच है कि चौथा निर्देशांक काल्पनिक है। परंतु इस कारण (3), (4) और (5) के अनुरूप समीकरणों के अस्तित्व में कोई बाधा न पड़ेगी। x_k और x'_k में जो संबंध (5) के द्वारा बनता है उसे लोरेंत्स रूपांतरण कहते हैं। हेंड्रिक अंतून लोरेन्त्स

1. Maxwell

† क्योंकि समीकरणों (8) के एक समीकरणको दूसरे का परिणाम होना अवश्यंभावी है। उनकी रेखीयता (linearity) के कारण यह भी अवश्यम्भावी है कि (8)में का एक संबंध दूसरे का समानुपाती हो। इस संबंध के पारस्परिक होने के कारण समानुपात के नियतांक का एक होना भी अवश्यंभावी है।

(Hendrik Antoon Lorentz) हालैंड देश के सैद्धान्तिक भौतिकी के एक महा विद्वान् थे। लोरेंत्स रूपातरण हम यहाँ व्यापकीकृत अनुसूची के रूप मे देते है—

(10)

	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1'	α_{11}	α_{12}	α_{13}	α_{14}
x_2'	α_{21}	α_{22}	α_{23}	α_{24}
x_3'	α_{31}	α_{32}	α_{33}	α_{34}
x_4'	α_{41}	α_{42}	α_{43}	α_{44}

इस तालिका मे तुरत प्रकट हो जाता है कि अभिदेश-पद्धति के परिवर्तन में अब काल निर्देशांक (काल्पनिक रूप x_4 में) उतना ही आता है जितने कि अवकाश निर्देशांक गण। समीकरण (9) की निश्चरता-मांग के अवश्यभावी परिणाम वश काल की निरपेक्षता अब नष्ट हो जाती है।

लोरेंत्स के व्यापक रूपातरण की अपेक्षा यह विशेष रूपातरण अधिक शिक्षाप्रद है जिसमें दो आकाश-निर्देशाक, मान लीजिए x_1 और x_2 ज्यों के त्यों रहने देते है और केवल x_3 तथा x_4 का रूपातरण करते है। तब (10) के स्तम्भों की पहली और दूसरी पक्ति के

$$\alpha_{11}=\alpha_{22}=1$$

के अतिरिक्त अन्य सब α_{ij} का शून्य हो जाना अवश्यंभावी है क्योंकि (बायें से दायें तथा ऊपर से नीचे भी पढने पर) $x'_1=x_1$, $x'_2=x_2$; फिर, (4) के अनुरूप निम्न-लिखित प्रतिबंध निकलते है

(11) $$\alpha^2_{33}+\alpha^2_{34}=\alpha^2_{33}+\alpha^2_{43}=\alpha^2_{43}+\alpha^2_{44}=\alpha^2_{34}+\alpha^2_{44}=1;$$

और इसलिए

$$\alpha^2_{33}=\alpha^2_{44},\quad \alpha^2_{34}=\alpha^2_{43}$$

यदि $\delta=\pm 1$, तो लिख सकते है

(11 *a*) $$\alpha_{34}=\delta\alpha_{43};$$

और तब यह अवश्यंभावी है कि

(11 *b*) $$\alpha_{44}=-\delta\alpha_{33};$$

क्योंकि लंबकोणियता[1] का अन्य प्रतिबध है —

$$\alpha_{33}\alpha_{34}+\alpha_{43}\alpha_{44}=0$$

1. Orthogonality

अब चिह्नित निर्देशांकों कोअचिह्नित निर्देशांकों के पदों में हल करने के लिए ($11a$, $11b$) का उपयोग करते हैं। साथ ही (7) की सहायता से अपने पहले के निर्देशांकों z, t, z', t' पर पहुँच जाते है और निम्नलिखित संबंध व्यक्त करते हैं—

$$(12) \qquad z' = \alpha_{33}\left(z + i\delta c \frac{\alpha_{43}}{\alpha_{33}} t \right),$$

$$t' = -\delta\alpha_{33}\left(t + i \frac{\delta\alpha_{43}}{c\,\alpha_{33}} z \right)$$

इन समीकरणों में से प्रथम यह दिखलाता है कि

$$(12a) \qquad -i\delta c \frac{\alpha_{43}}{\alpha_{33}} = v$$

को उस वेग के सर्वसम[1] समझना चाहिए जिससे z'-अक्ष z-अक्ष के समांतर, अचिह्नित समुदाय की दृष्टि से उसकी (अर्थात् z की) धनात्मक दिशा में, चलता है। समीकरण ($12a$) की सहायता से (12) समीकरण निम्नलिखित हो जाते हैं—

$$z' = \alpha_{33}(z - vt)$$

$$(13) \qquad t' = -\delta\alpha_{33}\left(t - \frac{v}{c^2} z\right)$$

अंत में हमें α_{33} का निर्धारण करना चाहिए। इस काम के लिए हम समी० (9) का उपयोग करते है। पहले के निर्देशांको में यह अब $z'^2 - c^2t'^2 = z^2 - c^2t^2$ में सरलीकृत हो जाता है। यहाँ पर अब (13) से प्राप्त z' और t' के मानों का प्रवेश कराइए। तो बायी ओर $2vzt$ वाला गुणनखड लुप्त हो जाता है। बायीं और दायी ओर के z^2 और t^2 के गुणनखंडो की तुलना से, निम्नलिखित संबंध मिलता है—

$$\alpha_{33}^2 = \frac{1}{1 - v^2/c^2}$$

सीमा में, c को अपरिमित ($c \to \infty$) कर देने से $\alpha_0 = \beta_0 = 0$ तथा $\gamma_0 = -c$ और, स्वभावतः, समी० (13) गैलिलियन रूपांतर (1) बन जाता है। इसके लिए हमें δ को -1 रखना पड़ेगा और α_{33} का धन चिह्न लेना पड़ेगा। तब हमें निम्नलिखित लाक्षणिक द्विविमितीय लोरेंत्स रूपांतर प्राप्त होता है—

1. Identical

$$z' = \frac{z - vt}{(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}},$$

(14)

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}z}{(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}}$$

यहाँ $\beta = \frac{v}{c}, (1-\beta^2)^{\frac{1}{2}} > 0$

जैसा कि हम देख चुके हैं, (14) मे समय के आपेक्षिकताकरण[1] तथा हर, $\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}$, में समाविष्ट z– निर्देशाक के मापक्रम मे परिवर्त्तन का कारण यह है कि प्रकाश का वेग, c, परिमित है। यह तथ्य उच्चकोटीय यान्त्रिकी के आपेक्षिकता सिद्धांत से मेल नहीं खाता।

यदि यह सत्य है कि सभी वैद्युतगतिकीय प्रभावो का प्रचारण परिमित वेग, c, से होता है तो इसका परिणाम यह होगा कि ऐसे प्रभावो के लिए सर्वदा गैलिलियन रूपांतर के स्थान में या तो व्यापक रूप (10) में या विशिष्ट रूप (14) मे, लोरेंत्स रूपांतरों को ही काम मे लाना चाहिए। इस तथ्य को हम विद्युतगतिकी का आपेक्षिकता-सिद्धान्त कहते है। परतु प्रकट है कि यान्त्रिकी को भी यह तथ्य अपनाना पड़ेगा कि प्रकाश का प्रचारण परिमित वेग से होता है। हाँ, साधारण यान्त्रिकी मे जो वेग मिलते हैं वे c की अपेक्षा बहुत ही छोटे होते हैं। यही कारण है कि यान्त्रिकी की बातों मे, हम कार्यविधितः, समी० (14) में सूचित काल और अवकाश निर्देशाकों के मापक्रम के परिवर्त्तन की उपेक्षा कर सकते है।

लोरेंत्स रूपांतरण मे समाविष्ट भौतिकीय तथ्यों की सपन्नता पर इस व्याख्यान-माला की तृतीय पुस्तक में विचार किया जायगा। यहाँ पर केवल उन परिवर्त्तनों का अनुसंधान करेंगे जो अपने नये आपेक्षिकता-सिद्धांत के कारण, मौलिक राशि (p) अर्थात् सवेग की धारणा में हमें करने पड़ेगे।

हम (p) को सदिश कह आये है। इसका आशय यह है कि निर्देशांक पद्धति के परिवर्त्तन में (p) के तीनों घटकों का रूपान्तरण निर्देशांकों [अर्थात् सदिश-त्रिज्या

1. Relativisation

$\mathbf{r}=(x,y,z)$] की ही भाँति होता है। अतएव कहते हैं कि $(\mathbf{p})$ अनुपरिणम्य[1] है $(\mathbf{r})$ का।

यह गैलिलियन रूपांतरण के दृष्टिकोण से ही समर्थनीय है जहाँ समय को निरपेक्ष मानते हैं। लोरेंत्स रूपान्तरण के दृष्टिकोण से सदिश त्रिज्या चार घटकों वाली राशि, चतुः सदिश

$$(15)\qquad \mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4)$$

है। इसी प्रकार आपेक्षिकतात्मक संवेग भी चतुः सदिश है अर्थात् यदि आपेक्षिकता-वाद में उसका कोई अर्थ होना है तो वह $(\mathbf{x})$ का अनुपरिणम्य होगा। यह चतुः सदिश निम्नलिखित प्रकार प्राप्त होता है—

(क) समीकरण (15) के चतुःसदिश होने के कारण, दो निकटस्थ बिंदुओं के बीच की निर्देशांकीय दूरी

$$(16)\qquad \mathbf{dx}=(dx_1,dx_2,dx_3,dx_4)=(dx_1,dx_2,dx_3,icdt);$$

भी एक चतु.सदिश है।

(ख) इस दूरी का परिमाण निश्चय ही लोरेंत्स रूपांतरण में निश्चर है। गुणन-खंड ic को छोड़ कर, वह निम्नलिखित है—

$$(17)\qquad d\tau=\left[dt^2-\frac{1}{c^2}(dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2)\right]^{\frac{1}{2}}$$

मिंकोवस्की[2] का अनुसरण करते हुए हम $d\tau$ को **उचित काल** का अल्पांश कहेंगे। dt से भिन्नतः वह आपेक्षिक तात्मकतया[3] निश्चर है। समी० (17) से हम गुणन-खड dt निकाल देंगे और तीन विमितियों का साधारण वेग v का प्रवेश करा देंगे ताकि निम्नलिखित संबध प्राप्त हो

$$(17a)\qquad d\tau=dt\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}=dt(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}$$

(ग) चतु.सदिश (16) को निश्चर (17a) से भाग देने पर एक अन्य सदिश मिलता है जिसे हम निम्नलिखित चतु.सदिश वेग कहेंगे

$$(18)\qquad \frac{1}{(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{dx_1}{dt},\ \frac{dx_2}{dt},\ \frac{dx_3}{dt},\ ic\right)$$

1. Co-variant 2. Minkowski 3. Relativistically

(घ) थोड़ा पहले हमने वेग निरादिश को अभिदेश ढाँचे से स्वतन्त्र संहति m से गुणा करके सवेग सदिश (p) प्राप्त किया था। इसी प्रकार चतु.सदिश (18) को एक अभिदेश-ढाँचा-स्वतन्त्र 'संहति गुणनखंड' से गुणा करके हम एक सवेग चतु.-सदिश (p) की प्राप्ति करेंगे। इस संहति-गुणनखंड को विराम संहति m_0 कहेंगे। और अब मिलेगा

$$(19) \qquad \mathbf{p} = \frac{m_0}{(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dx_3}{dt}, ic\right)$$

वंधनी के (कोष्ठक) पहले लिखी हुई राशि को चल-संहति (rest mass) या केवल संहति कहना उचित होगा क्योंकि $\beta=0$ के लिए वह विराम संहति हो जाती है। अतएव हम निश्चयपूर्वक कहते हैं कि

$$(20) \qquad m = \frac{m_0}{(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

यह संबंध १९०४ में लोरेंत्स ने बड़ी विशेष कल्पनाओं (विकार्य[1] इलेक्ट्रन) के अधीन व्युत्पन्न किया था। आपेक्षिकता सिद्धांत द्वारा व्युत्पन्न करने पर ये विशेष कल्पनाएँ अनावश्यक हैं। समी० (20) का समर्थन शीघ्रगामी इलेक्ट्रानों के बहुतेरे यथातथ प्रयोगों द्वारा हो चुका है। विशेषतः उल्लेखनीय माइकेलसन और मार्ले[2] के प्रयोगों द्वारा तथा अन्य कतिपय प्रकाश संबंधी प्रयोगों द्वारा वह आपेक्षिकतावाद का आधार है। यहाँ हमारे कार्य का क्रम उलटा रहा है और हमनें समी० (20) एक औपचारिक-सी रीति से आपेक्षिकता सिद्धांत के सहारे निर्गमित किया है। यह न केवल तर्कशास्त्रानुसार स्वीकार्य है अपितु इन विषय-प्रवेशक व्यक्तिकरणों की संक्षिप्तिता के कारण विशेषतया उपयोगी भी है। संहति की वेग पर निर्भरता के कारण न्यूटन के गति संबंधी नियमों में और क्या-क्या परिवर्तन करने पड़ेंगे, इसकी आलोचना हम चतुर्थ प्रकरण (§४) में करेंगे।

यहीं पर हमें अनुज्ञेय अभिदेश-ढाँचो के प्रश्न पर इन विचारों की समाप्ति करनी चाहिए, यद्यपि वह कुछ-कुछ स्थूल भाव से ही हो सकता है। वैसा करने के लिए हमें अद्यावधि विवरित आपेक्षिकता के विशेष वाद से आइस्टाइन ही के १९१७ के आपेक्षिकता के व्यापक वाद को जाना होगा। विशेष आपेक्षिकता में वे ही अभिदेश पद्धतियाँ अनुज्ञेय हैं जो एक दूसरे से लोरेंत्स-रूपान्तरण द्वारा प्राप्त होती हैं, और वे

1. Deformable 2. Michelson and Morley

निषिद्ध हैं, जो, उदाहरणतः, परस्पर प्रथम सिद्धांत के आधार पर प्राप्त होती हैं। व्यापक आपेक्षिकता में सभी अभिदेश पद्धतियाँ अनुज्ञेय हैं। उनके बीच रूपांतरणों को (10) की भाँति रैखिक तथा लंबकोणीय होने की आवश्यकता नहीं है, किन्तु वे स्वेच्छ (अनियत) फलनों, $x'_k = f_k(x_1, x_2, x_3, x_4)$, द्वारा व्यक्त किये जा सकते हैं। अतएव यहाँ हमें वे पद्धतियाँ मिलती हैं जो गतियुक्त हैं और जिनमें एक दूसरे की अपेक्षा जैसी चाहे वैसी विकृति हो सकती है। परिणामवश, अवकाश और काल में उस निरपेक्ष लक्षण का नाम-निशान तक नहीं रह जाता जो उन्हें न्यूटन के भौतिक विश्लेषण में मिला था। वे केवलमात्र भौतिक घटनाओं की वर्गीकरण व्यवस्थाएँ रह जाते हैं। इस वर्गीकरण के लिए यूक्लिड की ज्यामिति पर्याप्त नहीं होती, उसके स्थान में रीमान प्रतिपादित अधिकतर व्यापक मैत्रिक ज्यामिति[1] लेनी पडती है। अब यह करना होता है कि भौतिक नियमों को ऐसा रूप दिया जाय कि यहाँ जिन-जिन अभिदेश ढाँचों पर विचार किया जाय उन सभी में वे वैध रहें अर्थात् ऐसा रूप जो चतुःविमितीय अवकाश के स्वेच्छ बिंदु रूपांतरणों $x'_k = f_k(x_1 \ldots x_4)$ में निश्चर रहे। व्यापक आपेक्षिकता वाद की सार्थक अतर्वस्तु[2] यही है कि ऐसा हो सकता है। इस प्रकार के निश्चर सूत्रीकरण में यांत्रिकी के नियम जो गणितीय गहन रूप धारण करते हैं उनका विवेचन हम इस पुस्तक में नहीं कर सकते। यहाँ यही कहना पर्याप्त है कि व्यापक वाद[3] से न्यूटनीय गुरुत्वाकर्षण निकल ही नहीं आता, उसका अधिकतर यथातथ सूत्रीकरण होता है।

इस प्रकरण की समाप्ति हम "आपेक्षिकता-वाद" नाम पर एक टिप्पणी देकर करते हैं। इस वाद का सार्थक कार्य-संपादन उतना इस बात में नहीं हुआ है कि अवकाश और काल का पूर्णतया आपेक्षिकताकरण[4] हो गया है जितना कि इस बात के प्रमाण में कि प्रकृति के नियम अभिदेश ढाँचे के चुनाव से बिलकुल स्वतंत्र हैं, अर्थात् प्राकृतिक घटनाएँ निश्चर हैं, प्रेक्षक के दृष्टिकोण में चाहे कोई परिवर्तन क्यों न हो। "प्राकृतिक घटनाओं की निश्चरता का वाद" या, जैसा कि कभी-कभी प्रस्ताव किया गया है, "दृष्टिकोण वाद" ये नाम "आपेक्षिकता का व्यापक सिद्धांत" से अधिक सार्थक या उपयुक्त होंगे।

1. More general metric geometry 2. Content 3. General theory
4. Relativisation

§ ३. संहति-बिंदु की ऋजु-रेखीय गति

मान लीजिए कि कण की गति x-अक्ष में हो रही है। यदि उक्त कण पर किन्हीं बलों का प्रभाव पड़ रहा हो तो उनके केवल x-घटकों के ही प्रभाव कार्यकर होंगे। मान लीजिए कि इन घटकों का परिणामी[1] X है।

तो यहाँ $\mathbf{V}=v=\dfrac{dx}{dt}$ और $p=m\dfrac{dx}{dt}$ है।

अतएव

$$(1) \qquad \dot{p}=X$$

और यदि m नियत हो तो

$$(2) \qquad m\frac{d^2x}{dt^2}=X$$

इस गति-समीकरण के समाकलन का अध्ययन हम तीन स्थितियों में करेंगे—X विशुद्ध फलनवत दिया हुआ है, (क) समय का [$X=X(t)$]; (ख) स्थान का [$X=X(x)$]; या (ग) वेग का [$X=X(v)$]।

(क) $X=X(t)$.

इसको समानुकलित करने से प्राप्त होता है

$$(3) \qquad v-v_0=\frac{1}{m}\int_{t_0}^{t}X(t)\,dt=\frac{1}{m}Z(t).$$

यहाँ $Z(t)$ की परिभाषा यह है कि वह बल का समय समाकल[2] है और कालांतर t_0 से t तक में हुए संवेग[3] के परिवर्त्तन के बराबर है।

एक और समाकलन से प्रक्षेप-पथ का समीकरण यह प्राप्त होता है

$$(4) \qquad x-x_0=v_0\ (t-t_0)+\frac{1}{m}\int_{t_0}^{t}Z(t)\,dt.$$

(ख) $X=X(x)$.

यह बल क्षेत्र को स्थान के फलनवत् देने की प्रतिरूपक[4] स्थिति है। इसका समाकलन 'ऊर्जा के संरक्षण' वाले सिद्धांत के उपयोग से प्राप्त होता है।

1. Resultant 2. Integral 3. Momentum 4. Typical

यदि हम समी० (2) के दोनों पार्श्वों को $\frac{dx}{dt}$ से गुणा करें तो

$$(5) \qquad m\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}=X\frac{dx}{dt}.$$

इस समीकरण का बायी ओर का अंग पूर्ण अवकल[1] है :

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right\}.$$

समी० (1.4) में दी हुई व्यापक परिभाषा के अनुसार, उसके दाये अंश के लिए $dW=Xdx$ लिख सकते है और dW को dx पथ पर किया हुआ कर्म कहेंगे। जो समीकरण इस प्रकार प्राप्त होता है उसका मतलब है कि **गतिज-ऊर्जा का परिवर्तन किये हुए कर्म के बराबर होता है।**

क्योंकि **गतिज ऊर्जा** अर्थात् संहति बिंदु की गति की ऊर्जा की परिभाषा हम इस प्रकार करते है—

$$(6) \qquad T=E_{kin}\left[\text{ऊ}_{\text{गति}}\right]=\frac{m}{2}v^2.$$

गतिज ऊर्जा का पुराना नाम था, सजीव (अर्थात् प्रत्यक्ष) (live) बल (लाइबनित्स[2]) जिससे बल शब्द की अस्पष्टता प्रकट होती है। उन्होने दो प्रकार के बलों के भेद बताये थे—सजीव अर्थात् प्रत्यक्ष बल (vis viva), आज दिन की गतिज ऊर्जा; और चालन बल (vis motrix) जिसको आज दिन हम केवल "बल" के नाम से पुकारते हैं। हेल्महोल्त्स[3] ने भी बल और ऊर्जा में बहुत भेद नहीं किया था क्योंकि जो पुस्तक उन्होंने आज से बहुत अधिक दिन नहीं हुए (१८४७ में) ऊर्जा की अविनाशिता के संबंध में लिखी थी उसका नाम रखा था, "बलों की अविनाशिता के बारे में"।

गतिज ऊर्जा की परिभाषा के साथ-साथ स्थितिज ऊर्जा (V) की परिभाषा भी दे देनी चाहिए—

$$(7) \qquad dV=-dW=-Xdx; \quad V=E_{pot}\,(\text{ऊ}^\circ\text{ स्थित})=-\int Xdx$$

1. Differential 2. Leibniz 3. Helmholtz

एक-विमितीय कण-यांत्रिकी के लिए तो स्थितिज ऊर्जा की यह परिभाषा पर्याप्त है। द्वि-विमितीय या त्रि-विमितीय बल क्षेत्रों में V का अस्तित्व क्षेत्रों की प्रकृति पर निर्भर करता है (देखिए § ६ उप-प्रकरण ३,)। समी० (7) द्वारा V एक योगात्मक नियतांक[1] के भीतर तक ही निर्धारित किया जा सकता है।*

इन परिभाषाओं के आधार पर समाकलित समीकरण (5) से ऊर्जा के अविनाशत्व का नियम हमें मिल जाता है,

$$T+V=\text{नियतांक}=E \tag{8}$$

(गतिज ऊर्जा+स्थितिज ऊर्जा=नियतांक)

यहाँ E ऊर्जा-नियतांक अर्थात् सम्पूर्ण ऊर्जा है।

ऊर्जा की अविनाशिता का सिद्धांत न केवल भौतिकीय दृष्टि से अति महत्त्वपूर्ण है, उसमें विलक्षण गणितीय शक्ति भी है। क्योंकि, जैसा हम देख चुके हैं, वह न केवल गति-समीकरण का प्रथम समाकलन करा देता है—जिस कारण उसका दूसरा नाम "ऊर्जा का समाकल" है—अपितु साथ ही, कम से कम प्रस्तुत स्थिति (ख) में, द्वितीय समाकलन भी संभव कर देता है। यदि (8) को निम्नलिखित रूप में लिखें

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=\frac{2}{m}[E-V(x)],$$

तो हम dt के लिए

$$dt=\left[\frac{m}{2(E-V)}\right]^{\frac{1}{2}} dx. \text{ लिख सकते हैं}$$

अतएव

$$t-t_0=\left(\frac{m}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\int_{x_0}^{x}\left(\frac{dx}{E-V}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{9}$$

इस प्रकार t, x का ज्ञात फलन है और इस कारण x भी t के पदों में व्यक्त किया जा सकता है। इसीलिए (9) गति का पूर्णतया समाकलित समीकरण है।

1. Additive constant

* क्योंकि समाकल का मान होगा $\int Xdx+$एक नियतांक।

(ग) $X = X(v)$.

इस स्थिति में गति-समीकरण होगा।

$$m \frac{dv}{dt} = X(v),$$

जिसका पुनर्लेखन यों करते हैं

$$dt = \frac{m\,dv}{X};$$

जिससे तुरंत ही निम्नलिखित समीकरण प्राप्त हो जाता है—

$$t - t_0 = m \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{X} = F(v). \tag{10}$$

इससे हम v को t के पदों में हल कर सकते हैं, अर्थात् $v = f(t)$; अतएव

$$\frac{dx}{dt} = f(t),$$

जिससे यह परिणाम निकलता है कि

$$x - x_0 = \int_{t_0}^{t} f(t)\, dt.$$

उदाहरण

१—पृथिवी की भूमि के पास अबाध पतन (गिरता हुआ पत्थर)

नीचे से ऊपर की ऊर्ध्वाधर दिशा को हम x की धनात्मक दिशा मानेंगे। यहाँ बल की माप नियत है,

$$X = -mg, \tag{11}$$

अर्थात् वह t, x, और v से स्वतन्त्र है। यहाँ समाकलन की तीनों विधियाँ (क), (ख), (ग) काम में लायी जा सकती हैं।

हम (क) और (ख) का उपयोग करेंगे और मान लेंगे कि "गुरुत्वाकर्षणीय संहति" तथा "अवस्थितित्वीय संहति" बराबर हैं,

$$m_{\text{inert}} = m_{\text{grav}} = [m_{\text{अव}} = m_{\text{गुरु}}] \tag{12}$$

यहाँ $m_{\text{अव}}$ द्वितीय नियम द्वारा परिभाषित संहति है, तथा $m_{\text{गुरु}}$ गुरुत्वाकर्षण नियम में आयी हुई संहति है और इस लिए हमारे बल समीकरण (11) में भी वही आती है।

बेसेल[1] ने अनुभव किया कि लोलक-प्रयोगों[2] H द्वारा* समी० (12) की प्रयोगात्मक परीक्षा करने की आवश्यकता है। परन्तु इसका उससे अधिक यथातथ प्रमाण इयोतवास[3] ने ऐंठन तुला के अपने प्रयोग द्वारा दिया था। बाद में, समी० (12) ने ही आइस्टाइन के गुरुत्वाकर्षण वाद को प्रथमतः प्रेरित किया था।

(क) $\ddot{x}=-g$. समाकलन नियताकों का उपयुक्त चुनाव कर ($t=0$ के लिए $v=0$ और $x=h$), हमें अंत में निम्नलिखित संबंध प्राप्त होते हैं—

$$\dot{x}=-gt, \quad x=h-\frac{g}{2}t^2.$$

(ख) यतः $dV=-mgdx$, $V=mgx$ और $T+mgx=E$. यदि $v=0$ जब $x=h$, है तो $E=mgh$ हो जायगा, अतएव

$$\frac{m}{2}v^2+mgx=mgh.$$

इससे $x=0$ के विशेष मान के लिए $v^2=2gh$ आता है या

$$v=(2gh)^{\frac{1}{2}}. \tag{13}$$

इस समीकरण को उलटने से प्राप्त होता है

$$h=\frac{v^2}{2g}, \tag{13a}$$

जो कि वह ऊँचाई है जहाँ तक किसी भी संहति को उठाना पड़ेगा ताकि गुरुत्वाकर्षणीय क्षेत्र में इस ऊँचाई से गिरने पर किसी विशेष वेग v की प्राप्ति हो। वेग v के स्थान पर उक्त ऊँचाई का उपयोग करना अधिक सुविधाजनक है, विशेषतः इंजीनियरी के बहुत से प्रश्नों में, जैसे कि पिटाट (Pitot) नलिका† में किस

* प्रसंगवश, पाठक का ध्यान न्यूटन की 'यांत्रिकी' में दिये हुए एक मनोरंजक वाक्य की ओर दिला देना चाहिए। उस ग्रंथ के आरंभ में, प्रथम परिभाषा के नीचे न्यूटन कहते हैं, "लोलकोंसे अति सावधानी से किये हुए प्रयोगों द्वारा मैंने सत्यापित कर लिया है कि संहति और भार समानुपाती है।"

† यह एक खोखली नलिका है जो कि तरल के बहने में गत्यात्मक दाब की माप के लिए व्यवहृत की जाती है। विमानों में वायु की चाल जताने के लिए बहुधा

1. Bessel 2. Pendulum experiments 3. Eotvos

ऊँचाई तक पानी पहुँचता है, अपकेंद्रित्र[1] में वाष्प की ऊँचाई क्या होगी, इत्यादि। न्यूटन के डोल वाले प्रयोग में पानी कितना चढ़ता है, यह भी इसी प्रकार (13_a) से जाना जा सकता है।

२.—बड़ी ऊँचाई से अबाध पतन (उल्का)

इस स्थिति में आकर्षण नियत नहीं रहता। अब उसके बदले गुरुत्वाकर्षण नियम का उपयोग करना होगा कि

$$m\frac{d^2r}{dt^2}=-\frac{mMG}{r^2} \tag{14}$$

यहाँ m उल्का की संहति है, M पृथिवी की, और G गुरुत्वाकर्षणाक अर्थात् गुरुत्वाकर्षणीय नियतांक है। निर्देशांक x के स्थान पर पृथिवी केंद्र से उल्का की दूरी r रखी गयी है। यतः अब दूरी का फलन बल है इस कारण समाकलन की (ख) रीति का व्यवहार करना पड़ेगा।

विशिष्टतः, यदि पृथिवी की त्रिज्या a हो तो पृथिवी तल के लिए यह विधि निम्नलिखित समीकरण प्रस्तुत करती है

$$mg=\frac{mMG}{a^2}$$

ताकि mMG को (14) से निकाल सकते हैं और

$$\frac{d^2r}{dt^2}=-g\,\frac{a^2}{r^2} \text{ हो जाता है}$$

इस संकेतन[2] से (7) देता है

$$dV=-dW=mga^2\frac{dr}{r^2},$$

जिस कारण स्थितिज ऊर्जा, जिसका शून्य मान अनन्त ऊँचाई पर होगा, हो जाती है—

उसका उपयोग होता है। देखिए Glazebrook, *Dictionary of Applied Physics*, Vol, V, P-2.

1. Centrifuge 2. Notation

(15) $$V(r) = -mg\frac{a^2}{r}.$$

अतएव समी० (8) से प्राप्त होता है

$$\frac{m}{2}\!-\!\Big) \;-\; \frac{\,'\,}{r} \;= W = -\frac{mga^2}{R}$$

जहाँ R पृथिवी-केन्द्र से एक ऐसी परिकल्पित दूरी है जहाँ उल्का प्रारंभ में विराम स्थिति में थी। इस प्रकार हमें

(16) $$\frac{dr}{dt} = a\left[2g\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$ प्राप्त होता है

और समी० (9) के अनुरूप,

(16a) $$t = \frac{1}{a(2g)^{\frac{1}{2}}}\int \frac{dr}{\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

समी० (16a) के समाकलन का पूरा-पूरा ब्यौरा देने की आवश्यकता नहीं है क्योंकि (16) की केवल इन दो स्थितियों से ही हमारी दिलचस्पी है अर्थात्

(i) $R = \infty, \quad r = a.$

पृथिवी तल पर उल्का निम्नलिखित वेग से पहुँचती है

$$\frac{dr}{dt} = (2ga)^{\frac{1}{2}},$$

अर्थात् पृथिवी के गुरुत्वाकर्षणीय क्षेत्र में, अपरिमित (अनन्त) दूरी से प्रारंभ हुआ अबाध पतन पृथिवी तल तक पहुँचने में वही वेग प्राप्त करेगा जो कि नियत गुरुत्व-त्वरण (g) में ऊँचाई h ($=a$, पृथ्वी की त्रिज्या) से अबाध पतन में प्राप्त होता है। [देखिए समीकरण (13)]।

(ii) $R = a + h; \; h \ll a; \; r = a.$

यहाँ, कम होते हुए गुरुत्वाकर्षणीय त्वरण को ध्यान में रखते हुए परंतु यह मान कर कि उल्का बहुत ही बड़ी दूरी से गिरना प्रारंभ नहीं करती, हमें (13) के पतन वेग में केवल प्रथम शोधन करना है। समी० (16) से निम्नलिखित व्युत्पन्न होता है—

$$\frac{dr}{dt}=\left[=2ga\left(1-\frac{1}{1+\frac{h}{a}}\right)\right]^{\frac{1}{2}}=(2ga)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{h}{a}-\frac{h^2}{a^2}+\dots\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=(2ga)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{h}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{1}{2}\frac{h}{a}+\dots\right)$$

$$=(2gh)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{1}{2}\frac{h}{a}+\dots\right)$$

३---वायु में अबाध पतन

हम मान लेंगे कि वायु का प्रतिरोध वेग के वर्गफल का समानुपाती है। इस मान्यता को सर्वप्रथम न्यूटन ने रखा था और वह अनुभव से ठीक साबित हुई है, बशर्ते कि गिरते हुए पिंड का आकार बहुत छोटा न हो तथा उसका वेग न तो बहुत कम (शून्यप्राय) हो और न इतना बड़ा कि ध्वनि के वेग की बराबरी करे। इस दशा में परिणामी बल होगा

$$X(v)=-mg+av^2,$$

जहाँ चिन्ह यह दर्शाते हैं कि वायु का प्रतिरोध गुरुत्वाकर्षणीय बल का विरोध करता है। यहाँ पृष्ठ २४ की (ग) विधि लागू है और गति समीकरण यों हो जाता है—

$$\frac{dv}{dt}=-g+\frac{a}{m}v^2. \qquad (17)$$

यदि $\frac{a}{mg}=b^2$ रख दें, तो (17) निम्नलिखित बन जाता है

$$\frac{dv}{dt}=-g(1-b^2v^2).$$

इससे हम, $t_o=0$ रखकर, (10) का अनुरूप यह प्राप्त करते हैं

$$-gdt=\frac{dv}{2}\left(\frac{1}{1-bv}+\frac{1}{1+bv}\right),$$

$$-gt=\frac{1}{2b}\cdot In\left(\frac{1+bv}{1-bv}\right).$$

अतएव,

$$\frac{1+bv}{1-bv} = e^{-2bgt}$$

और

$$bv = \frac{e^{-2bgt}-1}{e^{-2bgt}+1} = -\frac{\sinh bgt}{\cosh bgt} = -\tanh bgt \qquad (18)$$

जहाँ (ज्याति[1]) (को-ज्याति[2]), (स्पज्याति[3]) अति परवलयिक फलन हैं। अतएव $|bv|$ काल $t=0$ पर शून्य (०) से, एकदिक् परिवर्तनशीलतया बढ़कर $t\to\infty$ काल पर 1 के मान के पास पहुँचता है। स्वयं v का सीमित मान निम्नलिखित है—

$$|v| = \frac{1}{b} = \left(\frac{mg}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$$

इसको समी० (18) से भी तुरंत निकाल सकते हैं क्योंकि उक्त सीमित मान के लिए $\frac{dv}{dt}$ शून्य हो जाता है।

समीकरण (18) के उपयोग से हम वायु के प्रतिरोध संबंधी वह पहला-पहल शोधन प्राप्त करते हैं जिसे निर्वात में अबाध पतन के लिए व्युत्पादित सूत्र से जोड़ देना होगा। स्पज्याति के श्रेणी-विस्तार अर्थात्

$$\tanh\alpha = \frac{\sinh\alpha}{\cosh\alpha} = \frac{\alpha+\frac{\alpha^3}{6}}{1+\frac{\alpha^2}{2}} = \alpha\left(1-\frac{\alpha^2}{3}\right)$$

और $\alpha=bgt$ के लिए, (18) के अनुसार हम प्राप्त करते हैं,

$$v=-gt\left(1-\frac{(bgt)^2}{3}\right)$$

1. Sine 2. Cosine 3. Tangent

४—सरलावर्त्त दोलन

सरलावर्त्त दोलन तब होते हैं जब कभी भी किसी संहतिबिंदु m पर क्रिया करता हुआ प्रत्यानयन बल X विस्थापन x का समानुपाती होता है। यदि समानुपातीयता-गुणनखंड k हो तो

$$X=-kx$$

और निश्चर (नियतांक) m लेकर गति-समीकरण निम्नलिखित होगा

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx \qquad (19)$$

बल के निर्देशांक का एक निर्दिष्ट फलन होने के कारण यह पृष्ठ २१ की (ख) स्थिति हुई और इसलिए वहाँ दी हुई कार्यविधि का उपयोग कर इस समीकरण को हल करने के लिए ऊर्जा समाकल का व्यवहार करेंगे। अतएव पहले तो सरलावर्त्त बघन बल की स्थितिज ऊर्जा का निर्धारण करना होगा। यहाँ पर

$$dW=Xdx=-\frac{k}{2}\,d\,(x^2)$$

अतएव (7) के अनुसार V के लिए उचित शून्य बिंदु लेते हुए,

$$V=-\int_o^x dW=\frac{k}{2}x^2$$

तो ऊर्जा-समीकरण होगा

$$mv^2+kx^2=2E.$$

प्रारंभिक प्रतिबंधों के लिए हम

$$t=0 \text{ पर, } \begin{cases} x=a \\ v=\dot{x}=0. \end{cases} \text{ ले सकते हैं} \qquad (19a)$$

परिणामवश $2E$ का मान ka^2 हो जाता है, और

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=\frac{k}{m}\,(a^2-x^2),$$

$$\left(\frac{k}{m}\right)^{\frac{1}{2}} dt=\frac{dx}{(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

समी० (19*a*) में दिये प्रारंभिक प्रतिबंधों को सम्मिलित करते हुए, इसका क्षेत्रफलन[2] निम्नलिखित संबंध देता है—

1. Harmonic 2. Quadrature

(20) $\omega t = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a} - \frac{\pi}{2}\right)$, जहाँ $\omega = \left(\frac{k}{m}\right)^{\frac{1}{2}}$

प्रतिलोमीकरण द्वारा अंत में

(21) $x = a \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = a \cos \omega t$. प्राप्त होता है

अतएव (21) मे आयी संक्षिप्तिका ω का भौतिक अभिप्राय स्पष्ट है। वह "वृत्तीय आवृत्ति" है, अर्थात् 2π काल-मात्रकों में कपनों की सख्या। यदि दोलनों का आवर्त्त-काल T और उनकी आवृत्ति* ν हो तो निम्नलिखित सूत्र प्राप्त होता है।

(22) $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu.$

संक्षेपण की सहायता से (19) को यों भी लिख सकते हैं—

(23) $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$

ऊर्जा–समीकरण का लाभ यह है कि उससे सदैव अभीष्ट अंत पर पहुँच जाते है, बल X चाहे किसी प्रकार भी x पर निर्भर करे। परंतु प्रस्तुत प्रश्न के लिए जहाँ X और x का संबंध रैखिक है, एक दूसरी ही अधिक सुदर विधि विद्यमान है। यह इस प्रत्यक्षतः सत्याभासक[1] कार्यविधि पर आधारित है कि किसी भी कोटि के नियतगुणाकों[2] वाले समांग[3] रैखिक अवकल समीकरण निम्नलिखित प्रति-स्थापन से सदैव हल किये जा सकते हैं (यहाँ x परतत्र और t स्वतंत्र चर है)—

(24) $x = Ce^{\lambda t}$

बशर्ते कि λ अपने अवकल समीकरण से प्राप्त हुए बीजीय समीकरण के मूलों में से एक हो। इस प्रकार एक विशिष्ट समाधान की उपलब्धि होती है। व्यापक समाधान इस प्रकार के सब विशिष्ट समाधानों के निम्नरूप में अध्यारोपण से प्राप्त होता है।

(24 a) $x = \sum C_j e^{\lambda_j t}$

उपर्युक्त λ में बीजीय समीकरण, (24) के (23) में प्रतिस्थापन से प्राप्त होता है और प्रस्तुत स्थिति में द्वितीय घात का[4] है,

* देखिए कि ω वृत्तीय आकृति है अर्थात् 2π काल में कंपनों की संख्या; और ν आवृत्ति है अर्थात् प्रति एक मात्रक काल (एक सेकंड) में कंपनों की संख्या।

1. Plausible 2. Constant co-efficients 3. Homogenous

4. Of second degree

$$\lambda^2+\omega^2=0;\text{ जिसके मूल हैं } \lambda=\pm i\omega.$$

अतएव व्यापक सूत्र यह हुआ,

$$(24b)\qquad x=C_1e^{i\omega t}+C_2e^{-i\omega t}$$

नियताक C_1 और C_2 सीमांत प्रतिबंधों (19 a) द्वारा निर्धारित किये जाते हैं,

$$x=0,\ C_1i\omega-C_2\omega i=0,\ C_1=C_2$$

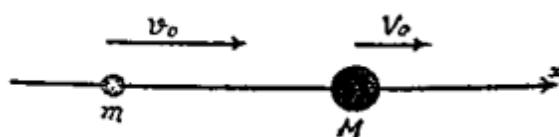
$$x=a,\ a=C_1+C_2=2C_1,\ C_1=\frac{a}{2}$$

इस प्रकार अंतिम समाधान निम्नलिखित हुआ जो (21) से मेल खाता है,

$$x=a\cos\omega t.$$

आगे चलकर (अध्याय ३, § १९ में) इस विधि का विस्तृत उपयोग विविध प्रकार के (अवमर्दित, प्रणोदित, युग्मित, इत्यादि) दोलनों के संबंध में किया जायगा। ऐसी बात के लिए शर्त केवल यही है कि दोलनवृन्द रैखिक अवकल समीकरणों द्वारा दिये जा सकें। इस उपप्रकरण का जो शीर्षक सरलावर्त्त दोलन दिया है, वह इस बात की ओर ध्यान आकर्षित कराता है कि इनमें प्रत्यानयन बल निर्देशाक में रैखिक है, जिस कारण परिणामी गति एक एकाकी नियत आवृत्ति ω की होती है। यदि बधन बल अनावर्त्ती अर्थात् अ-रेखीय हो तो यह विधि काम नहीं करती। उस स्थिति में ऊर्जा-अनुकल वाली कुछ कम सरल विधि से काम लेना पड़ता है।

५—दो कणों की टक्कर

टक्कर के पहले (देखिए आकृति १) मान लीजिए कि संहति-द्वय m और M के वेग क्रमात् v_o और V_o है, और टक्कर के बाद उनके वेग v और V हो जाते हैं।

आकृति १.—दो संहतियों m और M की टक्कर। टक्कर के पहले के वेग, v_o और V_o, बाद के V और v.

टक्कर की प्रकृति चाहे कुछ हो, चाहे वह प्रत्यास्थ[1] हो चाहे अप्रत्यास्थ, दोनों संहतियों m, M के बीच जो बल सचारित होंगे, तथा इन बलों का समय-समाकल Z, इन बातों के लिए "क्रिया-प्रतिक्रिया" वाला न्यूटन का स्वयंतथ्य, अवश्य वैध होना चाहिए। अतएव, समी० (3) के अनुसार,

$$(25) \qquad m(v-v_o)=Z=-M(V-V_o),$$

और इसलिए यह भी कि

$$(25a) \qquad mv+MV=mv_o+MV_o.$$

यह समीकरण कहता है कि निकाय[2] का संपूर्ण सवेग सुरक्षित रहेगा।

अब $(25a)$ में निकाय के संहति-केन्द्र के निर्देशाक (ξ) का उपयोग करें

$$(25b) \qquad \xi=\frac{mx+MX}{m+M}$$

तो प्राप्त होता है

$$\dot{\xi}=\dot{\xi}_o.$$

यह परिणाम बताता है कि टक्कर का संहति-केन्द्र के वेग पर कुछ भी प्रभाव नही पड़ता।

अतएव निर्वात में दागे हुए गोले का संहति-केन्द्र सदा अपने परावलयिक पथ[3] में अविचलित रहेगा, चाहे किसी स्थान पर गोला फटकर छोटे-छोटे टुकड़ों में भी हो जाय और प्रत्येक टुकड़ा अपना-अपना स्वतत्र प्रक्षेप-पथ[4] ग्रहण करता जान पड़े।

यहाँ तक दो अज्ञात राशियाँ, v तथा V, और एक समीकरण $(25a)$ प्राप्त हुआ है। टक्कर की समस्या का पूरा समाधान जानने के लिए एक और संबंध अर्थात् समीकरण की आवश्यकता है।

पहले प्रत्यास्थ टक्कर लीजिए। प्रत्यास्थ टक्कर की परिभाषा यह है कि इस मिथक्रिया में सवेग और गतिज ऊर्जा, दोनो ही सुरक्षित (जैसे के तैसे) रहते हैं। इसके लिए इस बात की आवश्यकता है कि--

$$(26) \qquad \frac{m}{2}v^2+\frac{M}{2}V^2=\frac{m}{2}v_o^2+\frac{M}{2}V_o^2$$

अर्थात्

$$m(v^2-v_o^2)=M(V_o^2-V^2).$$

1. Elastic 2. System 3. Parabolic path 4. Trajectory

परंतु (25) के उपयोग से

$$m(v-v_o)=M(V_o-V).$$

इन दोनों समीकरणों के भाजन से प्राप्त होता है

$$v+v_o=V_o+V$$

अर्थात्

(26*a*) $$V-v=-(V_o-v_o).$$

यह समीकरण कहता है कि टक्कर लगने के बाद, एक संहति की अपेक्षा दूसरी का वेग, टक्कर से पहले के उसके आपेक्षिक योग के बराबर, पर विपरीत होता है।

समीकरणों (25*a*) और (26*a*) का संयोग अर्थात्

$$mv+MV=mv_o+MV_o$$

$$v-V=-v_o+V_o$$

अब टक्कर के बाद के वेगों को पूर्णतया निर्धारित कर देता है—

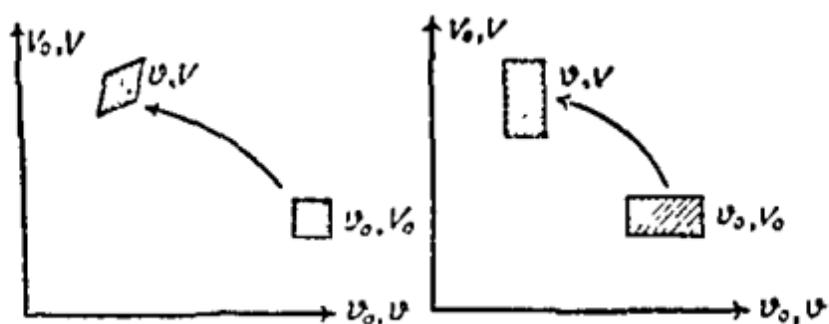
$$v=\frac{m-M}{m+M}v_o+\frac{2M}{m+M}V_o,$$

(27) $$V=\frac{M-m}{m+M}V_o+\frac{2m}{m+M}v_o.$$

देखिए कि वेग के आदि के मानों, v_o तथा V_o, से अंत के मानों, v तथा V, के "रूपांतरण"[1] के सारणिक[2] (Δ) का निरक्षेप मान एक (1) है। क्योंकि—

$$\Delta=\begin{vmatrix}\frac{m-M}{m+M} & \frac{2M}{m+M}\\ \frac{2m}{m+M} & \frac{M-m}{m+M}\end{vmatrix}=-\left(\frac{M-m}{m+M}\right)^2-\frac{4mM}{(m+M)^2}=-1.$$

इसका आशय यह है कि यदि आदि वेगों के मानों को एक अधिक्षेत्र में होने दें (अर्थात् सीमाओं के बीच रखें), तो v-V अवकाश में रूपान्तरित पृष्ठांश का क्षेत्रफल वही होगा जो कि आदि के पृष्ठांश का था ; अर्थात् इस प्रकार का रूपांतरण **क्षेत्रफल संरक्षक** होगा (देखिए आकृति २क)। यह नियम गैसों के गत्यात्मक

1. Transformation 2. Determinant

बाद की टक्कर-प्रक्रियाओं में महत्त्व का है तथा लियोविले के प्रमेय[1] (देखिए इस माला की पंचम पुस्तक) से संबंधित है।

आकृति २ क—वेग सीमाएँ, टक्कर के पहले और बाद। चित्रांकन क्षेत्र-फल संरक्षक है अर्थात् दोनों क्षेत्रफल बराबर हैं।

आकृति २ ख—संहतियों के बराबर ($m=M$) होने की स्थिति में चित्रांकन न केवल क्षेत्रफल-संरक्षक, किन्तु कोण-संरक्षक भी है।

यदि दोनों संहतियाँ बराबर हों, ($m=M$) जैसे दो बराबर के बिलियर्ड गेंद, तो समी० (27) निम्नलिखित हो जाते हैं—

(27*a*) $$v=V_o,\ \ V=v_o$$

अब रूपांतरण न केवल क्षेत्रफल-संरक्षक वरन् कोण-संरक्षक भी हो जाता है। देखिए आकृति २ख, जहाँ रूपांतरित आयत[2] आदि के आयत से केवल भुजाओं के परस्पर बदलने से प्राप्त हुआ है। विशेषतः, बिलियर्ड के खेल में यदि एक गेंद स्थिर हो और दूसरे की उससे बिलकुल सीधी टक्कर हो तो यह दूसरा, टक्कर से पहले चलता हुआ गेंद, अपना सारा वेग पहले को दे देता है और स्वयं स्थिर हो जाता है [मिलाइए (27*a*), $V_o=0$ रखकर]।

इसके प्रतिकूल यदि एक संहति दूसरी से बहुत ही अधिक बड़ी हो, $M \gg m$ तो इन दोनों की टक्कर के बाद बड़ी संहति का वेग प्रायः ज्यों का त्यों रहता है और छोटी संहति बड़ी संहति के पीछे उस वेग से जाती है जो बड़ी के वेग से

1. Liouville's theorem 2. Transformed rectangle

दोनों का आदि का आपेक्षिक वेग घटाने से मिलता है। क्योंकि यदि $m \ll M$, तो समीकरणद्वय (27) का निम्नलिखित सरलीकरण हो जाता है,

(27*b*) $$v=-v_0+2V_0=V_0-(v_0-V_0), \quad V=V_0$$

टक्करों संबधी यह विवेचन पूर्ण करने के लिए अप्रत्यास्थ टक्करों के बारे में संक्षेप में कहेंगे। परमाणवीय भौतिकी में इस प्रकार की अप्रत्यास्थ टक्करों ("दूसरे प्रकार की टक्करों") का अनुसंधान करते हैं। ऐसी टक्कर में इलेक्ट्रान जैसा एक कण अपनी ऊर्जा का कुछ भाग खो बैठता है जो कि टक्कर के दूसरे कण अर्थात् परमाणु को 'उत्तेजित" करने में लगती है। इस प्रकार की उत्तेजना पाकर परमाणु की ऊर्जा संबधी दशा अपनी निम्नतम अवस्था से एक अधिकतर ऊंचे ऊर्जा-स्तर में पहुँचायी जाती है। इस प्रकार की प्रक्रिया में, टक्कर के बाद की गति के विचार से, आदि की कुछ ऊर्जा का ह्रास हो जाता है, अतएव प्रत्यास्थ टक्करो के समीकरण इस दूसरे प्रकार की टक्कर के बाद की गतियाँ ज्ञात करने में नही लगाये जा सकते [देखिए, समस्याएँ I.1 से I.4 तक]।

यहाँ हम केवल उस "पूर्णतया अप्रत्यास्थ टक्कर" पर विचार करेंगे जो कि इंजीनियरी की समस्याओं मे बहुधा आती है। ऐसी टक्कर निम्नलिखित प्रतिबंध द्वारा परिभाषित की जाती है—

$$v=V,$$

अर्थात् टक्कर के बाद दोनों संहतियाँ, m तथा M, एक ही वेग से जाती है मानो वे दृढ़तापूर्वक परस्पर बंधी हुई हों। इस बात पर पहले भी ज़ोर दे आये हैं कि संवेग का समीकरण सब दशाओं में वैध रहता है। अब वह यों हो जाता है।

(28) $$(m+M)\,v=mv_0+MV_0$$

जो अकेला ही एकाकी अज्ञात v के निर्धारण मे पर्याप्त है। इस टक्कर में कितनी ऊर्जा का ह्रास होगा, यह जानने योग्य है। वह होगा—

$$\frac{m}{2}v_0^2+\frac{M}{2}V_0^2-\frac{m+M}{2}v^2$$

अथवा, समी० (28) की सहायता से v के सरल निरसन[1] के बाद,

(28 *a*) $$\frac{\mu}{2}(v_0-V_0)^2 \quad ,$$

1. Elimination

जहाँ μ का मान इस प्रकार व्यक्त है—

(28 b) $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m} + \frac{1}{M}$, अतएव $\mu = \frac{mM}{m+M}$ इस μ को लघुकृत संहति[1] कहते हैं। ऊर्जा का ह्रास इस लघुकृत संहति के आदि के सापेक्ष वेग $(v_0 - V_0')$ से चलने की गतिज ऊर्जा के बराबर है।

समीकरणो (28 *a*, *b*) में समाविष्ट प्रमेय प्रथमतः जनरल लाजरस कार्नो[2] द्वारा प्रतिपादित किया गया था। [जनरल कार्नो एक गणितज्ञ थे। फ्रांस की राज्यक्रांति में आप सार्वदेशिक सैनिक सेवा के संघटक थे। उष्मा-गतिकी के क्षेत्र में सुविख्यात सादी कार्नो के आप पिता थे।]

४. चर अर्थात् परिवर्तनशील संहतियाँ

निम्नोक्त दृष्टांत हमें न्यूटन के द्वितीय गति-नियम के गुणदोष विवेचक मानाकन[3] में सहायता देंगे। इस नियम को हम इस समीकरण (1.3) के रूप में रखेंगे कि "संवेग (गतिमात्रा) का परिवर्त्तन बल के बराबर है"; न कि (1.3*a*) के कम व्यापक रूप में कि "संहति × त्वरण=बल"। अब हमें इस बात का बोध होगा कि संवेग के परिवर्तन की गति से क्या समझना चाहिए। हम दिखावेंगे कि यदि संहति परिणमनशील (चर) भी हो तो भी किन्ही परिस्थितियों में (1.3) वाला व्यापक-रूप (1.3*a*) की स्थिति में पहुँचाया जा सकता है।

एक परिचित दृष्टान्त लीजिए—कड़ी गर्मियों में पानी छिड़कने की गाड़ी पक्की सड़क को गीला कर देती है। गाड़ी के मोटर-इंजन में इतनी ही शक्ति है कि वह सड़क और पहियों के बीच के, वायु के, तथा धुराधार[4] के, इन सब के घर्षण को संभाल भर सके। अतएव ऐसा जान पड़ता है मानो गाड़ी किन्ही बलो के अधीन न हो। मान लीजिए, खाली गाड़ी की नियत अर्थात् अचर संहति और उसकी टकी में किसी समय बचे हुए पानी की संहति, इन दोनों का योग m है। समझिए कि प्रति काल-मात्रक में निकले हुए पानी की संहति $\mu = -\dot{m}$ है और उसके पीछे की ओर निकलने का वेग, गाडी के विचार से q और सडक के विचार से $v-q$ है, जहाँ v स्वयं गाड़ी का वेग है।

1. Reduced mass 2. General Lazarus Carnot 3. Evaluation
4. Axle

अब यदि (I.3) के सूत्र से यंत्रवत् (अर्थात् बिना सोचे-समझे) काम ले तो

(1) $\dot{\mathbf{p}} = \dot{p} = \frac{d}{dt}(mv) = 0.$ मिलता है।

इससे

(I a) $m\dot{v} = \mu v$ निकलेगा

तो गाड़ी का त्वरण पानी निकलने के वेग q से स्वतंत्र होगा। परंतु यह बात कुछ आत्मविरोधक सी है, क्योंकि बाहर जाते हुए पानी की प्रधार का प्रत्याक्षेप[1] (बंदूक की तरह) कुछ प्रभाव डालेगा, ऐसी प्रत्याशा की जा सकती है।

वास्तव में हमने संवेग के परिवर्तन की गति के लिए वह ठीक पद-पुंज नहीं लिया है जिससे कि (I.3) में मतलब है। उसमें न केवल वह अंग आयेगा जो (1) में लिया गया है, अपितु पानी की प्रधारों के संवेग के लिए भी एक पद लेना होगा। यह $\mu(v-q)$ प्रति काल-मात्रक है। स्पष्टतया,

$$p_t = mv_t, \quad p_{t+dt} = (m+dm)(v+dv) + \mu dt(v-q).$$

अतएव संवेग-परिवर्त्तन की शोधित गति के लिए निम्नलिखित पदसमूह प्राप्त होता है—

(2) $$\dot{p} = \frac{d}{dt}(mv) + \mu(v-q) = 0.$$

या, इसको ध्यान में रख कि $\mu = -\dot{m}$, उक्त पदसमूह सरल करने से

(3) $m\dot{v} = \mu q$ प्राप्त होता है।

समीकरण (I.3a) के दृष्टिकोण से, गाड़ी से निकलते हुए पानी का प्रतिक्षेप गाडी पर त्वरणकारी बल का काम करता है, जैसे कि घास सींचने के घूर्णक यंत्रों में प्रतिक्रियाकारी पानी का पहिया काम करता है।

अपने दृष्टान्त के लिए छिड़काव गाडी के स्थान पर हम अंतर्ग्रहीय राकेट[2] ले सकते थे जिससे कदाचित चंद्र तक पहुँच सकें। राकेट विस्फोटक गैसों के अपसारण[3] से नोदित होगा। देखिए, प्रश्न I.5।

इस परिणाम को हम दो अभ्युक्तियों में व्यापकीकृत करेंगे जो अपने प्रदर्शक उदाहरणों के, क्रमात् (2) तथा (3) समीकरणों के तुल्य है—

1. Recoil 2. Interplanetary rocket 3. Expulsion

या तो हम (1.3) का दृष्टिकोण ले और प्रश्न के पिंड मे अन्तर्भावित संवेग-परिवर्तन के साथ उस संवेग का भी योग कर दे जो प्रति काल-मात्रक संवहनतया[1] दिया या लिया जाता हो। इस पश्चोक्त संवेग का हिसाब उसी अभिदेश-ढाँचे मे करना होगा जिसमें कि अनुसंधानाधीन पिंड के संवेग का हिसाब लगाया गया हो। तब $\dot{m}$ का चिह्न स्वय उस चिह्न को ठीक कर लेता है जोकि इस पद के पहले लगाना होगा। अब गति का समीकरण यह हो जाता है—

$$(4) \qquad \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) - \dot{m}\mathbf{V}' = \mathbf{F}\,,$$

जहाँ $\mathbf{V}'$ संवहनीय वेग है। अपने दृष्टात मे हमने $-\dot{m}=\mu$ और $|\mathbf{V}'|=|\mathbf{v}|-q$ लिया था।

या हम (1.3*a*) का दृष्टिकोण ले। परतु इसके लिए जो प्रत्याक्षेपी संवेग प्रति काल-मात्रक आयें या जायेगा उसे एक प्रकार का वाह्य वल समझ कर जोड देना होगा। ऐसा करने से हमें (3) के अनुरूप निम्नलिखित गतिसमीकरण प्राप्त होगा,

$$(5) \qquad m\,\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F} + \dot{m}\,\mathbf{V}_{rel}$$

इसमे $\mathbf{V}_{rel}$ संवहनीय संवेग का प्रेक्षणाधीन पिंड के तई आपेक्षिक वेग है जिसकी धन दिशा वही है जो $\mathbf{V}$ की थी। उक्त दृष्टांत मे $|\mathbf{V}_{rel}|=-q$ और फिर वही $-\dot{m}=\mu$.

दो विशेष स्थितियाँ ध्यान देने योग्य है —

(क) $\mathbf{V}'=0$. संहति के जो अश आ मिलते है या चले जाते है उनके वेग शून्य है और इसलिए उनका संवेग कुछ नही है।

इस स्थिति में गति-समीकरण का रूप न्यूटनीय है, $\dot{\mathbf{p}}=\mathbf{F}$. उदाहरण, प्रश्न 1.6 का जल-विंदु और 1 7 की जजीर।

(ख) $\mathbf{V}'=\mathbf{V}$ या, तुल्यत', $\mathbf{V}_{rel}=0$. यहाँ, सहति के चर होते हुए भी, गति-समीकरण का रूप सहति×त्वरण=वल ही रहता है। उदाहरण—प्रश्न (1.8) की मेज के किनारे पर लटकती हुई जजीर।

स्थिति (ख) मे कार्नो ऊर्जा ह्रास, समी० (3.28*a*), शून्य है। अतएव ऊर्जा-समीकरण अपने साधारण रूप मे लागू है। स्थिति (क) में किसी दी हुई समस्या

1. Convectively

में ऊर्जा-अविनाशिता नियम का कौन-सा रूप लागू होगा, यह प्रकट नहीं है और पहले उसका अनुसंधान कर लेना होगा।

इन शिक्षाप्रद अभ्युक्तियों की समाप्ति हम आपेक्षिकतात्मक संहति-परिणमन की समस्या देकर करेंगे। इस संबंध में हम इलेक्ट्रान का विशेष रूप से उल्लेख करेंगे, यद्यपि समीकरण (2.20) स्वभावतः केवल इलेक्ट्रान के ही लिए नहीं, सभी संहतियों के लिए लागू है। यहाँ संहति-परिणमन इलेक्ट्रान की अपनी केवल आंतरिक बात है; किसी संवेग के इधर-उधर से आ मिलने या जा निकलने का प्रश्न नहीं उठता। अतएव स्थिति (क) की नाईं गति-समीकरण, $\dot{\mathbf{p}}=\mathbf{F}$ होगा अर्थात्, (2.20) को ध्यान में रखते हुए

$$(6)\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{m_o\mathbf{V}}{[1-\beta^2]^{\frac{1}{2}}}\right)=\mathbf{F}.$$

पहले इलेक्ट्रान की ऋजुरेखीय गति पर विचार करेंगे। यहाँ $\mathbf{F}$ अनुदैर्घ्यतया[1] काम करता है अर्थात् $\mathbf{V}$ की दिशा में; जिस कारण $\mathbf{F}=F_{long}$ और $\mathbf{V}=v$.

समीकरण (6) को "संहति×त्वरण=बल" के रूप में परिवर्तित कर देंगे। इस शताब्दी के प्रारंभिक वर्षों में वैसा करने की यही रीति थी, यद्यपि यह अनावश्यक रूपसे जटिल थी। इस काम के लिए बायी ओर दिखलाया अवकलन[2] करेंगे—

$$(6a)\quad \frac{m_o\dot{v}}{(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}}+m_o v\frac{d}{dt}(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}=\frac{m_o}{(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}}\left(\dot{v}+\frac{v\beta\dot{\beta}}{1-\beta^2}\right)$$

कारण कि $\beta=v/c$, अतएव

$$\dot{\beta}=\frac{\dot{v}}{c},\ \text{और इसीलिए}\ v\beta\dot{\beta}=\beta^2\dot{v}.$$

परिणामत., समी० (6 *a*) निम्नलिखित हो जाता है

$$(6b)\qquad \frac{m_o\dot{v}}{(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}}\left(1+\frac{\beta^2}{1-\beta^2}\right)=\frac{m_o}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}}\dot{v}=F_{long}$$

अतएव त्वरण $\dot{v}$ को गुणक "अनुदैर्घ्य संहति" होगी—

1. Longitudinally 2. Differentiation

(7) अनुदैर्घ्य सहति $m_{long} = \dfrac{m_o}{(1-\beta^2)^{\frac{3}{2}}}$.

यदि बल F अनुदैर्घ्यतया के स्थान पर अनुप्रस्थनया[1] काम करता हो, अर्थात् वह प्रक्षेप-पथ के अभिलव हो तो केवल वेग की दिशा मे परिवर्तन होगा, मात्रा मे नही। इस स्थिति मे β शून्य होगा; और तब (6) से

$$\frac{m_o}{(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}}\ \dot{v} = F_{trans} \text{ ही प्राप्त होगा।}$$

इस कारण, उक्त समय (शताब्दी के प्रारभ मे), अनुदैर्घ्य सहति से भिन्न एक "अनुप्रस्थ संहति" का उपयोग कराया गया, जो यों था —

(8) अनुप्रस्थ संहति $m_{trans} = \dfrac{m_o}{(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}}$.

उलझनों को ध्यान मे रखते हुए हम जोर देकर कहते है कि यदि गतिसमीकरण के (6) वाले वृद्धियुक्त रूप से काम लें तो सहति का दो प्रकार का होना नितात अनावश्यक हो जाता है।

अब हम आपेक्षिकतावाद के ऊर्जा-समीकरण का रूप निर्धारित करेंगे। इसके लिए हम (6) को $\dfrac{dx}{dt} = v = \beta c$ से गुणा करें, तो दायी ओर प्राप्त होता है—

(9) $F\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{dW}{dt}$ = प्रतिकाल-मात्रक किया हुआ कर्म या शक्ति;

बायी ओर प्राप्त होता है—

$$m_o c^2\ \beta\frac{d}{dt}\left(\frac{\beta}{[1-\beta^2]^{\frac{1}{2}}}\right) = m_o c^2 \beta\dot{\beta}(1-\beta^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

हम अपना निश्चय तुरंत करा सकते है कि यह t मे पूर्ण अवकलज[2] अर्थात् निम्नलिखित है —

(10) $m_o c^2 \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}}\right)$.

1. Transversally 2. Derivative

यतः (10) बराबर है (9) के और (9) है काम करने की गति; अतएव (10) को गतिज ऊर्जा (T) की काल संबंधी परिवर्तनगति होनी चाहिए। इसलिए प्राप्त होता है—

$$T = m_0c^2 \left(\frac{1}{[1-\beta^2]^{\frac{1}{2}}} + \text{नियतांक} \right).$$

यह नियतांक अवश्यमेव -1 होगा क्योंकि β के शून्य होने पर गतिज ऊर्जा T का भी शून्य होना अवश्यम्भावी है। अतएव "आपेक्षिकतात्मक गतिज ऊर्जा" होगी

$$T = m_0c^2 \left(\frac{1}{[1-\beta^2]^{\frac{1}{2}}} - 1 \right). \tag{11}$$

समीकरण (2.20) को ध्यान मे रखते हुए हम इसे निम्नलिखित प्रकार से भी लिख सकते है .

$$T = c^2(m - m_0). \tag{12}$$

अर्थात्, शब्दों मे, **"गतियुक्त और विराममय इलेक्ट्रानों की ऊर्जाओं का अन्तर, उनकी संहतियों के अन्तर और c^2 के गुणनफल के बराबर है।"** (जब कि गतियुक्त और विराममय इलेक्ट्रॉनों की ऊर्जाओं का अंतर है गतिज ऊर्जा या "सजीव बल")। इस प्रकार हमने सरलतम स्थिति के लिए "संहति और ऊर्जा की तुल्यता" का नियम ("ऊर्जा के अवस्थितित्व" का नियम) सत्यापित कर दिया। परमाणवीय भार निर्धारण के सारे क्षेत्र में और नाभिकीय भौतिकी तथा उसके ब्रह्मांड विज्ञान संबंधी अनुप्रयोगों में यह महत्त्वपूर्ण मौलिक नियम है।

पूर्णता के लिए बता देना चाहिए कि β के छोटे-छोटे मानों के लिए (11) का श्रेणीबद्ध विस्तार कर सकते है जिससे, प्रथम सन्निकटन में, गतिज ऊर्जा T का सरल रूप,

$$T = m_0c^2\left(\tfrac{1}{2}\beta^2 + \tfrac{3}{8}\beta^4 + \dots\right) = \frac{m_0}{2}c^2\beta^2\left(1 + \tfrac{3}{4}\beta^2 + \dots\right) \to \frac{m_0}{2}v^2,$$

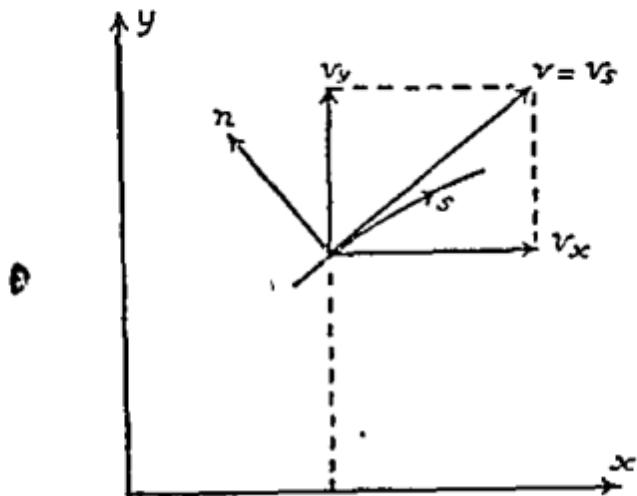
प्राप्त हो जाता है, जैसी कि प्रत्याशा की जा सकती है।

§ ५. समतल में और आकाश में अकेले संहति बिंदु की चलगतिकी तथा स्थैतिकी

चलगतिकी गतियों का ज्यामितीय वर्णन करती है। उनके भौतिक अस्तित्व की

ओर उसका ध्यान नहीं जाता। स्थैतिकी का सम्बन्ध बलों से, उनकी संरचना और उनकी समता से है। बलो से उत्पन्न गतियों से उसे कोई मतलब नहीं।

(१) समतल चल-गतिकी

विषयारंभ हम कार्त्तीय[1] निर्देशाकों मे वेग तथा त्वरण के विघटन और सघटन अर्थात् विखडन और संयोजन, सबधी सूत्रों के लेखन से करेंगे।

आकृति ३—समतल में वेगों का विघटन और सघटन।
कार्त्तीय निर्देशाक, x, y; नैज[2] निर्देशाक s, n.

वेग—

(1) $\mathbf{V}=(v_x,\ v_y)=\left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)=(\dot{x},\dot{y})$;

(2) $\left|\mathbf{V}\right|=(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{\frac{1}{2}}=v.$

त्वरण—

(3) $\dot{\mathbf{V}}=(\dot{v}_x,\ \dot{v}_y)=\left(\dfrac{d^2x}{dt^2},\ \dfrac{d^2y}{dt^2}\right)=(\ddot{x},\ \ddot{y})$;

(4) $\left|\dot{\mathbf{V}}\right|=(\ddot{x}^2+\ddot{y}^2)^{\frac{1}{2}}$

1. Cartesian 2. Intrinsic

वेग और त्वरण को कार्तीय निर्देशांकों में विघटित करने के स्थान पर उन्हें अतः संहति-बिंदु के चलने से रचित वक्र के निज निर्देशांकों के पदों में भी विघटित कर सकते हैं। वक्र के चाप की लम्बाई के लिए s लिखिए। निम्नाक्षर s का स्वयं पथ की दिशा से मतलब होगा जो वक्र के बिंदु पर बदल सकती है; निम्नाक्षर n वक्र के किसी स्थान पर s से लंबवत् दिशा बतलावेगा। तो अब होगा

$$(5) \qquad v_s = \pm v \; ; \; v_n = 0.$$

यह तो नगण्य है, परन्तु त्वरण $\mathbf{V}$ का $\dot{\mathbf{V}}_s$ और $\dot{\mathbf{V}}_n$ में विघटन सार्थक है। यदि पथ की स्पर्श-रेखा और x दिशा के बीच का कोण α हो तो स्पर्शरेखा की ओर का त्वरण होगा

$$(6) \qquad \dot{v}_s = \dot{v}_x \cos\alpha + \dot{v}_y \sin\alpha \; ;$$

और अभिलंब त्वरण[1] होगा---

$$(7) \qquad \dot{v}_n = -\dot{v}_x \sin\alpha + \dot{v}_y \cos\alpha$$

परन्तु

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds} = \frac{\dot{x}}{\dot{s}} = \frac{v_x}{v}, \qquad \sin\alpha = \frac{dy}{ds} = \frac{\dot{y}}{\dot{s}} = \frac{v_y}{v},$$

इस कारण

$$(8) \qquad \dot{v}_s = \frac{1}{v}\left(v_x \dot{v}_x + v_y \dot{v}_y \right) = \frac{1}{2v}\frac{d}{dt}\left(v_x^2 + v_y^2\right)$$

$$= \frac{1}{2v}\frac{d}{dt} v^2 = \frac{dv}{dt} = |\dot{v}|$$

इस समीकरण में कहा गया है कि स्पर्शरेखीय त्वरण ही वेग के मान का परिवर्तन है, उसका दिशा-परिवर्तन चाहे कुछ भी हो। इससे भिन्न समीकरण, (7)

$$(9) \qquad \dot{v}_n = \frac{1}{v}(v_x \dot{v}_y - v_y \dot{v}_x) = \frac{1}{v}(\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x})$$

$$= v^2 \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{v^2}{\rho}, \text{ देता है,}$$

जहाँ $\frac{1}{\rho}$ पथ की वक्रता* है।

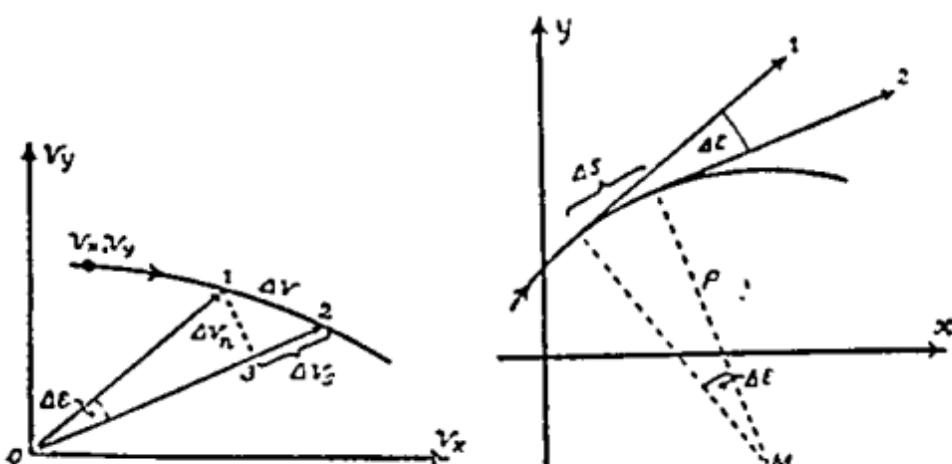
1. Normal acceleration

*देखिए उदाहरणार्थ Franklin, Treatise on Advanced Calculus, पृष्ठ २९५।

अतएव अभिलम्बीय[1] त्वरण वेग-परिवर्तन पर नहीं, किन्तु स्वयं वेग पर और प्रक्षेप-पथ[2] के रूप पर निर्भर करता है। यदि वहाँ $\frac{dv}{dt}=0$ तो त्वरण, वेग और [illegible] पथ के भी अभिलम्बवत् होगा।

अब हम ये ही सबंध हैमिल्टन' प्रवर्तित वेगालेख्य* द्वारा सीधे ही अवकल[3] ज्यामितीय प्रकार से व्युत्पन्न करेंगे।

आकृति ४ क—समतल में गति का वेगालेख्य ध्रुवीय रेखांकन में वेग-द्वय V_1 और V_2 ध्रुव o से खींचे गये हैं।

आकृति ४ ख—समतल में गति के प्रक्षेपपथ और वक्रता-त्रिज्या।

आकृति ४ क और आ० ४ ख की परस्पर तुलना से वेगालेख्य का अर्थ स्पष्ट हो जाता है। आ० ४ ख में xy-तल में गति का प्रक्षेप-पथ दिखलाया गया है। दो पास-पास के, $\triangle s$ दूरस्थ, बिंदुओं पर जो वेग हैं वे पथ की स्पर्श-रेखाओं द्वारा दिखलाये

1. Normal 2. Trajectory 3. Differential

* अंग्रेजी में इसे होडोग्राफ Hodograph कहते हैं। ग्रीक शब्द, होडास (hodos) का अर्थ 'पथ' है और इसलिए इसको पथालेख्य कहना चाहिए। परंतु जैसाकि पुस्तक के मूल-लेखक श्री सोमरफेल्ड इस स्थान पर दी हुई टिप्पणी में कहते हैं, "होडोग्राफ=पथालेख्य, जो कि भ्रामक है।" ठीक नाम वेगालेख्य ही है, या सोमरफेल्ड के शब्दों में, "वेग का ध्रुवीय रेखाचित्र"।

गये हैं; उनके बीच का कोण $\Delta \epsilon$ है। यही कोण वक्रता केंद्र M पर भी होता है। यदि वक्रता की त्रिज्या ρ हो तो

(10) $\Delta s = \rho . \Delta \epsilon$

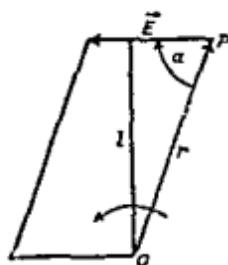
आ० ४ क में ये ही दो वेग एक सार्व मूल-विंदु, O, से खींचे गये हैं। दोनों वेगों की दिशाएँ दोनों रेखाचित्रों में वही हैं। दो निकटस्थ सदिशों $\overrightarrow{O1}$ और $\overrightarrow{O2}$ पर ध्यान दीजिए, जिनके बीच का कोण $\Delta \epsilon$ है। विंदु 1 के $\overrightarrow{O2}$ पर प्रक्षेप[1] से विंदु 3 मिलता है। सदिश $\Delta \mathbf{V} = \overrightarrow{12}$ के विघटन से $\Delta v_s = \overrightarrow{32}$ और $\Delta v_n = \overrightarrow{13}$ मिलते हैं। अतएव निम्नलिखित संबंध प्राप्त होते हैं जो (8) और (9) से सहमत हैं—

$$\dot{v}_s = \frac{\overrightarrow{32}}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt};$$

$$\dot{v}_n = \frac{\overrightarrow{13}}{\Delta t} = \frac{\Delta \epsilon . v}{\Delta t} = \frac{\Delta \epsilon}{\Delta s} v^2 = \frac{v^2}{\rho}.$$

पश्चोक्त के लिए (10) का स्मरण कीजिए। समस्या I.9. से तुलना कीजिए।

(२) समतल स्थैतिकी[2] तथा चल-गतिकी में घूर्ण की धारणा

आकृति ५—विंदु O के प्रति $\vec{E}$ सदिश का घूर्ण।

किसी सदिश राशि $\mathbf{E}$ का किसी अभिदेश-विंदु O के प्रति घूर्ण इस प्रकार परिभाषित होता है कि वह उस सदिश के अनुप्रयोग-विंदु (P) से अभिदेश-विंदु (O) तक की सदिश त्रिज्या ($\mathbf{r}$) तथा उस सदिश ($\mathbf{E}$) का सदिश गुणनफल है; अर्थात्

(11) $\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{E}$

अतएव घूर्ण $\mathbf{N}$ एक समांतर चतुर्भुज के क्षेत्रफल द्वारा निरूपित होगा जिसकी संलग्न भुजाएँ होंगी $\mathbf{r}$ तथा $\mathbf{E}$ और जो $\mathbf{r}$ से $\mathbf{E}$ की ओर की दिशा में घूर्णन करता होगा,

1. Projection 2. Plane statics

जैसा कि तीर द्वारा आकृति ५ में दिखाया गया है। परिमाण में यह निम्नलिखित होगा

(11a) $$|\mathbf{N}| = l\,|\mathbf{E}| = r\,|\mathbf{E}|\sin\alpha.$$

जहाँ l है O से E पर यह अभिलंब, जो O के प्रति E की "उत्तोलक बाहु"[1] है। यदि E एक बल F हो तो बल का घूर्ण अर्थात् ऐंठ L प्राप्त होता है जहाँ

(12) $$\mathbf{L} = \mathbf{r}\times\mathbf{F}$$

किसी बल, F, का घूर्ण, स्थैतिकी में एक धारणा है जिसका आविष्कार बहुत पहले स्वयं आर्किमिडीज ने किया था। यदि F के कार्तीय घटकों को X और Y से सूचित करें तो प्रारंभिक सदिश बीजगणित से सहज ही यह प्राप्त होता है—

(12a) $$L_z = xY - yX$$

घूर्ण की धारणा चल-गतिकी एवं बल-गतिकी में भी महत्त्व की है, अभी समतल की बातों पर ही विचार करेंगे। तो गतिकी के लिए,

वेग का घूर्ण $= \mathbf{r}\times\mathbf{v}$

त्वरण का घूर्ण $= \mathbf{r}\times\dot{\mathbf{v}}$

संवेग का घूर्ण = कोणीय संवेग $= \mathbf{r}\times\mathbf{p} = m(\mathbf{r}\times\mathbf{v})$

कार्तीय निर्देशांकों में (12a) के नमूने पर, प्राप्त होता है—

(13) $$\mathbf{r}\times\mathbf{v} = x\dot{y} - y\dot{x}; \qquad \mathbf{r}\times\dot{\mathbf{v}} = x\ddot{y} - y\ddot{x}.$$

वेग और त्वरण के घूर्णों में निम्नलिखित संबंध है

(14) $$\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{v}} = \frac{d}{dt}\,\mathbf{r}\times\mathbf{v}.$$

यह इस प्रकार व्युत्पन्न होता है कि $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}$ और $\mathbf{v}\times\mathbf{v} = 0$; अतएव

(14a) $$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}\times\mathbf{v}) = \mathbf{r}\times\frac{d\mathbf{v}}{dt}\;\mathbf{v}\times\mathbf{v} = \mathbf{r}\times\dot{\mathbf{v}}.$$

निर्देशांकों में विघटन द्वारा प्राप्त प्रचलित प्रमाण ठीक समी० (14a) जैसा चलता है—

(14b) $$\frac{d}{dt}(x\dot{y} - y\dot{x}) = x\ddot{y} + \dot{x}\dot{y} - y\ddot{x} - \dot{y}\dot{x} = x\ddot{y} - y\ddot{x}.$$

1. Lever arm

आकृति ५ में यदि स्वेच्छ सदिश **E** के स्थान पर विंदु P का किसी भी (अ स्वेच्छ) पथ में होता हुआ वेग **V** समझा जाय, तो एक अन्य सरल संबध निक जा सकता है, इस वार कोणीय सवेग और तथोक्त क्षेत्रफलीय वेग के वीच। वह मूलविंदु O से खींची हुई सदिश त्रिज्या को चलाने से, वुहारे हुए, अत्यणु अल ds का क्षेत्रफल, **r×ds** वाले समातर चतुर्भुज के क्षेत्रफल का आधा होगा; कारण क्षेत्रफलीय वेग होगा—

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt}=\tfrac{1}{2}(\mathbf{r}\times\mathbf{V})$$

अतएव क्षेत्रफलीय वेग और कोणीय सवेग का संबंध यह निकलता है—

$$\mathbf{r}\times\mathbf{p}=2m\frac{d\mathbf{S}}{dt}. \tag{15}$$

(३) चल-गतिकी आकाश में

यहाँ सदिश को त्रिविमितीय प्रक्षेप-पथ संबंधित इन तीन दिशाओं में विघ करते हैं—पथ के स्पर्श रेखीय (**s**), मुख्य-अभिलंब (n) और द्वितीय लंब[2] b (जो उ दोनों दिशाओं के लम्बवत् होता है)। तो निम्नलिखित प्राप्त होंगे—

$$\mathbf{V}=(v,o,o)$$

$$\dot{\mathbf{V}}\left(\dot{v},\frac{v^2}{\rho},\ o\right)$$

यहाँ ρ वक्रता त्रिज्या[3] है जिसका प्रवेश (9) और (10) में हुआ था और प्रस्तुत स्थिति में प्रक्षेप पथ के आश्लेषक समतल[4] में होगी।

यदि वेग या त्वरण के घूर्णो को लें तो उनकी परिभाषा अव भी वही रहती अर्थात् **r×v** और **r×V̇**; परंतु आकृति ५ को अब त्रि-विमितीय समझना होगा परिमाण तथा घूर्णन-दिशा के अतिरिक्त अब वहाँ खींचे समांतर-चतुर्भुज का अवका में स्थान भी होगा। इस स्थान को समातर चतुर्भुज के समतल के अभिलंब द्वारा सूचि करने की प्रथा प्रचलित हो गयी है क्योंकि वैसा करने से मूर्त कल्पना करने सहायता मिलती है। अभिलंब की दिशा वह लेना लोक-प्रचलित हो गया है जो उ

1. Infinitesimal element 2. Binormal 3. Radius of curvature
4. Osculating plane

ओर होती है जिस ओर घूर्ण की घूर्णन-दिशा में (r से V या V' की ओर π से कम के कोण से) घुमाने से कोई दक्षिणवर्त्ती पेच चले। घूर्ण का सदिश निरूपण एक तीर का रूप धारण करता है जिसका नोंक उस अभिलम्ब की दिशा में हो और जिसकी लंबाई घूर्ण के परिमाण के बराबर हो। अतएव आकृति ५ के घूर्ण की दिशा कागज के समतल के लम्बवत् ऊपर की ओर हुई। इस प्रकार का तथा अक्षीय और ध्रुवीय सदिशों के प्रभेद का पूर्ण अनुसंधान हम अध्याय ४ प्रकरण २३, तक स्थगित रखेंगे।

यहाँ तक स्वच्छन्दतया लिये हुए किसी भी अभिनिर्देश-विंदु O के लिए घूर्ण का वर्णन किया गया है। आगे के उप-प्रकरण में बतावेंगे कि किसी दिये हुए अक्ष के प्रति घूर्ण का क्या मतलब है।

(४) स्थैतिकी अवकाश में; विंदु तथा अक्ष के प्रति बल का घूर्ण

किसी अभिनिर्देश विंदु O के प्रति किसी बल **F** का घूर्ण निम्नलिखित संबंध द्वारा पूर्णतया निश्चित हो जाता है—

(16) $$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

जहाँ **r** अभिदेश विंदु O से बल के अनुप्रयोग विंदु P तक की सदिश त्रिज्या है; अर्थात् यदि O निर्देशांकों का मूल-विंदु लिया जाय तो

(16a) $$\mathbf{r} = x, y, z$$

ऊपर दिये हुए, दक्षिणवर्त्ती पेच[1] के कायदे द्वारा, घूर्ण **L** एक सदिश की भाँति अनुरूपित किया जा सकता है। सदिश की लंबाई $|\mathbf{L}|$ होगी। अब प्रश्न उठता है कि निर्देशांक अक्षों की ओर **L** के घटक क्या होंगे? इन्हें हम घूर्ण-सदिश[2] के उन तीन अक्षों पर के प्रक्षेपों द्वारा निश्चित कर सकते हैं। उदाहरणत,

(17) $$L_z = |\mathbf{L}| \cos [\mathbf{L}, z].$$

परंतु $|\mathbf{L}|$ एक समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल है जिसकी भुजाएँ हैं **r** तथा **F**। अतएव (17) का दक्षिण अंग इस समातर चतुर्भुज के क्षेत्रफल का x, y समतल पर प्रक्षेप हुआ। प्रक्षिप्त भुजाएँ होंगी—

$$\mathbf{r}_{proj} = (x, y); \ \mathbf{F}_{proj} = (X, Y),$$

इस कारण, (17) की सहायता से, (12a) की भाँति, निम्नलिखित प्राप्त होता है—

1. Righthand screw 2. Moment vector

$$(17a) \qquad L_z = xY - yX,$$

और इसी भांति,

$$(17b) \qquad L_x = yZ - zY; \quad L_y = zX - xZ$$

L के इन, L_x, L_y, L_z घटकों को बल F, के x, y, z अक्षों के प्रति होने वाले घूर्ण कह सकते है। मिलाइए, समस्या 1.10.

जो कुछ निर्देशाक अक्षो के बारे में कहा गया है वह किसी भी अक्ष, a के लिए भी लागू है। जैसे कि (17) में, वैसे ही, बल **F** का अक्ष a के प्रति घूर्ण, अक्ष (a) पर स्थित बिंदु O के प्रति घूर्ण लेकर और संगत घूर्ण सदिश को a पर प्रक्षिप्त कर निश्चित किया जाता है। या, जैसे कि $17a, b$ में, O के प्रति घूर्ण के क्षेत्रफल को a के लबवत् तल पर प्रक्षिप्त कर निकाला जा सकता है। एक तीसरी विधि में बल के अनुप्रयोग के बिंदु से a तक की न्यूनतम दूरी ली जाती है, जिस दूरी को उत्तोलन बाहु, l, कहेगे। इस विधि मे F को तीन घटकों में विघटित करते है—F_a, a के समातर; F_l, l की दिशा मे, और F_n, l और a दोनों के लंबवत्। इस प्रकार प्राप्त करते है—

$$(18) \qquad L_a(\mathbf{F}) = L_a(F_a) + L_a(F_l) + L_a(F_n).$$

दक्षिण पक्ष के प्रथम दो पद शून्य होंगे; क्योंकि यदि बल a के समांतर हो या a को प्रतिच्छिन्न[1] करे तो उसका a के प्रति कोई घूर्ण नही हो सकता। केवल तीसरा पद रह जाता है जो a के लबवत् एक बल के कारण है। यह बल l लंबी उत्तोलक बाहु द्वारा काम करता है। इसलिए समी० (18) के स्थान पर (18a) यो बन जाता है

$$(18a) \qquad L_a(\mathbf{F}) = L_a(F_n) = F_n . l.$$

इस अवसर पर दो सदिशो के गुणनफल के विभिन्न सकेतनो के बारे में कुछ कह देना उचित होगा। निम्नलिखित तालिका दिखाती है कि दुभार्ग्यत. ये संकेतन, ऐतिहासिकतया एवं राष्ट्रीय व्यवहारतः एक दूसरे से कितने भिन्न हैं।*

1. Intersect

* अंग्रेजी भाषांतर में द्वितीय स्तंभ के अतिरिक्त तृतीय से सप्तम स्तंभों में सादे रोमन अक्षरों (AB) के स्थान पर कटीले अक्षर ($\mathscr{AB}$) दिये हैं।

1	2	3	4	5	6	7
गुणनफल का नाम	यह पुस्तक	जर्मन संस्करण सोमर्फेल्ड	गिब्ज Gibbs	हेवीसाइड Heaviside	इटली मे	ग्रासमान Grassmann
अदिश या भीतरी	**A.B**	(AB)	AB	AB	$A \times B$	$A\|B$
सदिश या बाहरी	$\mathbf{A} \times \mathbf{B}$	$[AB]$	$A \times B$	VAB	AVB	AB या $\|AB$

कुछ व्याख्यात्मक टिप्पणियाँ दी जाती है। महान् उष्मागतिकी वेत्ता[1] विलार्ड गिब्ज[2] ने अपने विद्यार्थियों के लिए सदिश विश्लेपण अर्थात् सदिश गणित का, जो उस समय कम ही ज्ञात था, संक्षिप्त सारांश तैयार किया। कुछ थोडे से परिवर्त्तनो के साथ उसके संकेतन का ही अंग्रेजी और अमेरिकन विद्वान् अब भी व्यवहार करते है। तत्पश्चात् हेवीसाइड[3] के संकेतन का साधारणतया परित्याग कर दिया गया, जिसमे सदिश[4] गुणन के लिए V अक्षर का व्यवहार किया गया था। इटैलियन संकेतन मार्कोलांगो[5] ने प्रारंभ किया था। हर्मान ग्रास्मान[6] ने अपनी 'वितान-गणित'[7] मे खंडों (वृत्त खडों) और बिंदुओं द्वारा हिसाब लगाने की एक तर्कसगत प्रणाली विकसित की थी। उनके मतानुसार, दो निर्देशित खडों, a तथा b के बीच सरलतम संबंध है उनका 'तलीय परिमाण'[8] अर्थात् a और b से बनाया हुआ समातर चतुर्भुज, जिसको वे, इस कारण, ab द्वारा, यद्यपि कभी-कभी $[ab]$ द्वारा भी, सूचित करते हैं। ग्रास्मान के संकेतन की सदिश गुणन सूचक ऊर्ध्वाधर रेखा का "कोटिपूरक"[8] से मतलब है, अर्थात् वह तलीय परिमाण के लंबवत् सदिशीय तीराग्र (ऐरो पाइंट) को जाना दिखलाती है।

1. Thermodynamist 2. Willard Gibbs 3. Heaviside
4. Vector, 5. Marcolongs 6. Hermann Grassmann
7. Ausdeh nungslehre (Extension Analysis 1844 and 1862)
8. Plangrosse, planar magnitude complementary

§ ६. स्वतन्त्रतापूर्वक चलते हुए संहति-बिंदु का गति-विज्ञान (बल-गतिकी); केप्लर समस्या; स्थितिज ऊर्जा की धारणा

(१) स्थिर सूर्य मानकर केप्लर की समस्या

स्वतन्त्रतापूर्वक चलते हुए संहति बिंदु[1] का यह सरलतम दृष्टांत, जिसकी कल्पना की जा सकती है, हमारे विश्व के चित्र के लिए भी अत्यन्त महत्वशाली है। यह है ग्रहों की गति, जो एक द्विविमितीय समस्या है, और यदि विचारणीय विषय हुआ पृथिवी, तो गति क्रान्तिवृत्त[2] में होती है। मान लेंगे कि सूर्य अपने स्थान में स्थिर रहता है। इस मत का समर्थन सूर्य की आपेक्षिक संहति की महानता करती है-

सूर्य, 330,000, गुरु 320; पृथ्वी, 1; चंद्र $\frac{1}{81}$*

हम इस समस्या पर जिसमें सूर्य की गति का प्रश्न भी है, इस प्रकरण के भाग (२) में विचार करेंगे। सूर्य की संहति M लीजिए तथा ग्रह की m यदि लें तो न्यूटनीय आकर्षण होगा—

$$F = G\frac{mM}{r^2},\ G = (\text{गुरुत्वाकर्षणीय नियतांक})\ ।$$

अथवा, सदिशीयतया,

$$(1)\qquad \mathbf{F} = -G\frac{mM}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}.$$

यह बल अचर बिंदु O अर्थात् सूर्य-केंद्र से होकर जाता है, जोकि सदिश-त्रिज्या ($\mathbf{r}$) के लिए मूल बिंदु का काम देता है। परिणामतः

$$\mathbf{r}\times\mathbf{F} = 0;$$

और इसलिए द्वितीय नियम से,

$$\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{p}} = 0;$$

तथा, (§ 14) को ध्यान में रखते हुए,

$$\mathbf{r}\times\mathbf{p} = \text{नियत}\ ।$$

1. Mass point, 2. Ecliptic

* ये संख्याएँ Kaye & Labe's Tables में यों दी गयी हैं—333,434; 318·4, 1.000; .0123.

अर्थात् सूर्य के चारों ओर का कोणीय संवेग नियत है, और इसलिए समी० (5.15) का क्षेत्रफलीय वेग भी नियत है। यही केप्लर का द्वितीय नियम है—

सूर्य से ग्रह तक की सदिश-त्रिज्या समान काल में समान क्षेत्रफल में विस्तीर्ण रहती है।

इस नियत क्षेत्रफलीय वेग को दो से गुणन करने के फल को (क्षेत्रफलीय का नियतांक) C मान लीजिए, अर्थात्

$$2\frac{ds}{dt}=C \tag{2}$$

आ० ६—केप्लर समस्या के लिए ध्रुवी निर्देशांक। सूर्य, मूलबिंदु। सदिश त्रिज्या द्वारा आस्तीर्ण क्षेत्रफल।

अब हम ध्रुवीयकोण ϕ प्रस्तुत करते हैं जिसे खगोलज्ञ "सत्य कौणिकान्तर"* (वास्तविक असमता) कहते हैं (देखिए आकृति ६) इससे प्राप्त होता है।

$$dS=\tfrac{1}{2}r^2d\,\phi;\ \ 2\frac{ds}{dt}=r^2\dot{\phi}=C.$$

अतएव

$$\dot{\phi}=\frac{C}{r^2}\,. \tag{3}$$

*खगोल शास्त्र में सत्य कौणिकांतर को अभिभानु (perihelion) से नापते हैं, परंतु यहां वह अपभानु से नापी समझी गयी है और उसका मतलब है, "सूर्य के दृष्टि कोण से ग्रह की अपभानु (aphelion) से कोणीय दूरी।"

अंग्रेजी शब्द है anomaly; शाब्दिक अर्थ असमता, विषमता, विशृंखलता, आदि। खगोल विज्ञान में इस शब्द को सूर्य-ग्रह सदिशत्रिज्या-चालित कोण के लिए लेते हैं, क्योंकि यद्यपि क्षेत्रफलीय वेग नियत है इस कोण की गति असम है। अतएव "अनामली" के लिए "कौणिकांतर" शब्द रखा गया है। कई प्रकार के कौणिकांतर होते हैं। यदि कोण अभिभानु से नापा गया हो तो खगोल विज्ञान में उसे सत्य कौणिकांतर कहते हैं। यदि वह दीर्घ वृत्तीय केन्द्र से नापा जाय तो उसे उत्केन्द्रीय कहते हैं। कोणीय वेग को सम मानकर जो कोण निकलता है उसे माध्य कौणिकांतर कहते हैं।

केपलर के प्रथम नियम, अर्थात् प्रक्षेपपथ के समीकरण, की व्युत्पत्ति के लिए वलों को कार्त्तीय निर्देशाकों की ओर विघटित करेंगे । m से भाग देने के बाद गति-समीकरण हो जाता है--

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = -\frac{GM}{r^2}\cos\phi \tag{4}$$

$$\frac{d\dot{y}}{dt} = -\frac{GM}{r^2}\sin\phi$$

दोनो समीकरणो के दोनों पक्षो को यदि ϕ से गुणा कर दें और (3) का उपयोग करे तो हम प्राप्त करते हैं

$$\frac{d\dot{x}}{d\phi} = -\frac{GM}{C}\cos\phi$$

$$\frac{d\dot{y}}{d\phi} = -\frac{GM}{C}\sin\phi$$

ये अब समाकलित किये जा सकते हैं । यदि A और B समाकलन नियतांक (समाकलनांक) हों तो

$$\dot{x} = -\frac{GM}{C}\sin\phi + A \tag{5}$$

$$\dot{y} = +\frac{GM}{C}\cos\phi + B$$

इसका आशय यह हुआ कि ग्रहीय गति का वेगालेख्य निम्नलिखित वृत्त है—

$$(\dot{x}-A)^2+(\dot{y}-B)^2=\left(\frac{GM}{C}\right)^2 \tag{5a}$$

इस विषय पर समस्या 1.11 में पुन. विचार करेंगे । यहाँ, (5) के वामांगो को ध्रुवी निर्देशाको में रूपातरित करेंगे,

$x=r\cos\phi,\quad y=r\sin\phi$

अतएव

$$\dot{x}=\dot{r}\cos\phi-\dot{r}\,\phi\sin\phi=-\frac{GM}{C}\sin\phi+A$$

$$\dot{y}=\dot{r}\sin\phi+\dot{r}\dot{\phi}\cos\phi=\frac{GM}{C}\cos\phi+B$$

अब प्रथम समीकरण को $-\sin\phi$ से और द्वितीय को $\cos\phi$ से गुणा करने के बाद, दोनों गुणनफलों का योग कर, $\dot{r}$ को निरसित कर देंगे। तो प्राप्त होगा—

$$r\dot{\phi}=\frac{GM}{C}-A\sin\phi+B\cos\phi$$

अथवा, (3) का स्मरण करते हुए,

$$\frac{1}{r}=\frac{GM}{C^2}-\frac{A}{C}\sin\phi+\frac{B}{C}\cos\phi \tag{6}$$

ध्रुवी निर्देशाकों मे यह एक शाकव(शंकु) काट[1] का समीकरण है जिसका मूलविंदु शाकव काट की एक नाभि (फोकस) का सपाती है। अतएव हमें केप्लर का यह प्रथम नियम प्राप्त होता है "ग्रह एक दीर्घवृत्त की रचना करता है या दीर्घवृत्त पर चलता है जिसकी एक नाभि पर सूर्य (विराजमान) है"। इस सबंध मे ध्यान दीजिए कि दो अन्य प्रक्षेपपथ उतने ही सभव है जितने कि दीर्घवृत्त, अर्थात् परवलय और अतिपरवलय; परंतु प्रकट होना चाहिए कि ये ग्रहों पर लागू नही है वरन् केवल धूमकेतुओं पर ही है। इनकी विवेचना यहाँ नही करेंगे, परतु पाठक का ध्यान समस्या 1.12 की ओर आकर्षित कर देते है।

केप्लर के प्रथम नियम की जो व्युत्पत्ति यहाँ दी गयी है वह प्राय: अन्य सब पुस्तकों मे दी गयी व्युत्पत्ति से भिन्न है। इनमें ऊर्जा समीकरण से प्रारभ करते है, जिसकी व्युत्पत्ति अब हम करेंगे। इसके लिए हम (4) के समीकरणों को लेंगे और उनके दायें अंगो मे $\cos\phi$ के स्थान पर $\frac{x}{r}$, $\sin\phi$ के स्थान पर $\frac{y}{r}$ लिखेंगे। तत्पश्चात्, पहले समीकरण को $\dot{x}$ से, दूसरे को $\dot{y}$ से गुणा कर, गुणनफलों का योग करने से प्राप्त करेंगे—

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)=-\frac{GM}{r^2}\frac{d}{dt}\quad(x^2+y^2)=-\frac{GM}{r^2}\frac{dr}{dt}$$

इसका t के लिए समाकलन निम्नलिखित देता है—

$$\tfrac{1}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)=\frac{GM}{r}+E \tag{7}$$

इस समीकरण का बायाँ अंग m से विभाजित गतिज ऊर्जा है। दायें पक्ष का प्रथम पद, चिह्न के अतिरिक्त, m से विभाजित स्थितिज ऊर्जा है (देखिए इसी प्रकरण का तृतीय भाग)। अतएव E हुई m से विभाजित पूर्ण ऊर्जा। इस समीकरण (7) का रूप वही है जो कि (3.8) के एक-विमितीय गति के ऊर्जा-समीकरण का था।

ऊर्जा-समीकरण (7) से पथ-समीकरण (6) तक पहुँचने की यथासंभव सरलतम विधि के लिए, स्मरण करिए कि ध्रुवी निर्देशांकों में किसी रेखा के अल्पांश का वर्ग निम्नलिखित होता है—

$$dx^2+dy^2=dr^2+r^2d\,\phi^2.$$

इसलिए प्राप्त होता है—

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2=\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2$$

$$=\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2\left\{\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2+r^2\right\},$$

अथवा, (3) के ध्यान से,

$$C^2\left\{\left(\frac{1}{r^2}\cdot\frac{dr}{d\phi}\right)^2+\frac{1}{r^2}\right\}$$

यदि $S=\frac{1}{r}$ रख दें तो यह हो जाता है—

$$C^2\left\{\left(\frac{ds}{d\phi}\right)^2+S^2\right\}$$

अतएव हमारा ऊर्जा समीकरण (7) निम्नलिखित में रूपांतरित हो जाता है—

$$\tfrac{1}{2}\,C^2\left\{\left(\frac{ds}{d\phi}\right)^2+S^2\right\}-GMs=E.$$

इसका ϕ के लिए अवकलन करने से प्राप्त होता है—

$$\frac{ds}{d\phi}\left\{C^2\left(\frac{d^2s}{d\phi^2}+s\right)-GM\right\}=0$$

कारण कि $\frac{ds}{d\phi}\neq 0$, अतएव कोष्ठक लुप्त हो जायगा। इस प्रकार हमें निम्नलिखित रैखिक समांग समाकल समीकरण प्राप्त होता है, जिसमें s के द्वितीय कोटि के नियत अवकल गुणाक होंगे—

$$\frac{d^2 s}{d\phi^2} + S = \frac{GM}{C^2}$$

इस प्रकार के समीकरण का व्यापक साधन दो पदों का योग होता है, एक तो असमघात[1] समीकरण का कोई एक विशिष्ट साधन और दूसरा समघात समीकरण का व्यापक साधन (समाधान)।

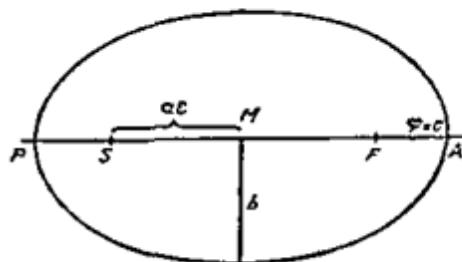
प्रकटतया

$$S = \text{नियत} = \frac{GM}{C^2}$$

असमघात समीकरण का एक विशिष्ट समाकल[2] है। समघात समीकरण का व्यापक साधन $\sin\phi$ और $\cos\phi$ का योग है। अब हम A/C और B/C को अपने समाकलनांक बना सकते हैं और अततः प्राप्त करते हैं —

$$S = \frac{GM}{C^2} - \frac{A}{C}\sin\phi + \frac{B}{C}\cos\phi$$

जो कि बिलकुल वही है जिसे (6) में प्राप्त किया था।

अब हम इस समीकरण का विशिष्टीकरण इस प्रकार करेंगे कि $\phi = 0$ वाली रेखा पर जो एक नाभि (F) से चलकर दूसरी नाभि (S) से भी होकर जाती है; अर्थात् जो रेखा $\phi = 180°$ के साथ, दीर्घवृत्त का दीर्घ अक्ष है (देखिए आ० ७)। उस पर स्थित है बिंदुद्वय P (perihelion, परिसौर बिन्दु या अभिमानु, सूर्य से निकटतम बिंदु) तथा A (aphelion, अपभानु या सूर्य से दूरतम बिंदु), जहाँ r क्रमात् अल्पतम और महत्तम होता है। अतएव हम यह प्रतिबंध लगाते हैं कि,

आकृति ७—केप्लर दीर्घवृत्त और उसके नाभिद्वय (S, F), दीर्घ तथा लघुअक्ष (ea) उत्केंद्रता, अपभानु (A) तथा अभिभानु (P), उत्केंद्रता (E)।

1 Inhomogeneous equation 2. Integral

$$\frac{dr}{d\phi}=0,\quad \phi=\begin{cases}0\\ \pi\end{cases} \text{ के लिए,}$$

जो, (6) के द्वारा, $A=O$ कर देता है।

इसके अतिरिक्त यदि दीर्घवृत्त की उत्केंद्रता ϵ हो तो आकृति ७ दिखलाती है कि

अभिभानु पर $r=SP=a(1-\epsilon),\ \phi=\pi;$

अपभानु पर, $r=SA=a(1+\epsilon),\ \phi=0$

तो, समी० (6) के अनुसार प्राप्त होता है कि

$$\text{अभिभानु पर,}\ \frac{1}{a(1-\epsilon)}=\frac{GM}{C^2}-\frac{B}{C}$$

$$\text{अपभानु पर,}\ \frac{1}{a(1+\epsilon)}=\frac{GM}{C^2}+\frac{B}{C}$$

इनको जोड़ने और घटाने से हम प्राप्त करते हैं, क्रमात्,

$$(8)\qquad \frac{GM}{C^2}=\frac{1}{a(1-\epsilon^2)},\ \frac{B}{C}=-\frac{\epsilon}{a(1-\epsilon^2)}$$

अंत में क्षेत्रफलीय वेगांक C को आवर्तकाल T के पदों में प्रकट करेंगे। समी० (2) से तुरंत ही सदिश त्रिज्या द्वारा बनाया हुआ संपूर्ण क्षेत्रफल (C) प्राप्त कर लेते हैं—

$$C=\frac{2S}{T} \text{ जहाँ } S=\pi ab=\pi a^2(1-\epsilon^2)^{\frac{1}{2}}.$$

इसका परिणाम यह हुआ कि

$$(9)\qquad C^2=\frac{4\pi^2a^4(1-\epsilon^2)}{T^2}$$

यदि इसका समीकरण द्वय (8) के पहले समीकरण में उपयोग करें तो प्राप्त करते हैं—

$$(10)\qquad \frac{T^2}{a^3}=\frac{4\pi^2}{GM}$$

कारण कि G और M सभी ग्रहीय प्रक्षेपपथों के लिए एक समान हैं, समी० (10) केप्लर के तृतीय नियम की अभिव्यक्ति है —

"आवर्त्तकाल के वर्गफल दीर्घ अक्ष के घनफलों के समानुपाती हैं।"

अपने इस तृतीय नियम के आविष्कार का स्वागत केप्लर ने निम्नलिखित उल्लासपूर्ण अभ्युक्ति द्वारा किया था।*

"अंततः मैं इस बात पर प्रकाश डाल पाया हूँ, और यह सत्यापित कर लिया है, यद्यपि इसकी आशा तथा अपेक्षा न थी कि खगोलीय पिंडो की गति मे आवर्तिता की प्रकृति, पूर्णतया और प्रत्येक ब्यौरे मे कूट-कूट कर समायी हुई है—यद्यपि यह ठीक है कि उस प्रकार नही जैसा कि मैंने पहले सोचा था वरन् एक बिलकुल दूसरी ही, पूर्णतया संपूर्ण, भाँति से।"

वास्तव में तृतीय केप्लर नियम, समी० (10) के रूप मे, पूर्णत. ठीक नही है। वह वैध तभी तक होगा जबकि सूर्य की सहृति, M, की अपेक्षा ग्रहीय सहृति, m, को उपेक्षणीय समझें, जैसा कि यहाँ तक इस विवेचन मे मान लिया गया है। परन्तु अब हम अपना यह अनुमान वापस ले लेंगे और वैसा करने से खगोल विद्या की वास्तविक द्विपिंड समस्या पर जा पहुँचेंगे। यह एक महत्त्व की बात है कि यह समस्या अबतक विवेचित एक-पिंडीय समस्या से अधिक कठिन नही है।

(२) केप्लर समस्या, सूर्य की गति सहित

समझ लीजिए कि सूर्य (S) के निर्देशाक x_1, y_1 हैं; ग्रह (P) के x_2, y_2.

न्यूटन के तृतीय नियम के अनुमार, S पर पडने वाला बल, P पर पड़े हुए बल के बराबर, किन्तु प्रतिकूल होगा। अतएव पूर्ण गतिसमीकरण निम्नलिखित होंगे—

सूर्य के लिए

$$M\frac{d^2x_1}{dt^2}=\frac{mMG}{r^2}\cos\phi;$$

$$M\frac{d^2y_1}{dt^2}=\frac{mMG}{r^2}\sin\phi;$$

ग्रह के लिए

$$m\frac{d^2x_2}{dt^2}=-\frac{mMG}{r^2}\cos\phi;$$

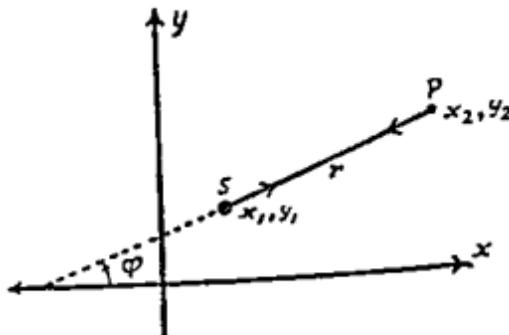
$$m\frac{d^2y_2}{dt^2}=-\frac{mMG}{r^2}\sin\phi.$$

अब हम आपेक्षिक स्थान के ये निर्देशांक प्रस्तुत करते है—

$$x_2-x_1=x, \qquad y_2-y_1=y; \tag{11a}$$

अपिच, सहृति-केन्द्र के निर्देशाक भी, जो निम्नलिखित है—

* Harmonice mundi, 1619. प्रथम दो केप्लर नियम Astronomia Nova, 1609, में प्रकाशित हो चुके थे।

$$(11b)\qquad \frac{mx_2+Mx_1}{m+M}=\xi,\ \frac{my_2+My_1}{m+M}=\eta.$$

आकृति ८—केप्लर समस्या, सूर्य की गति को ध्यान मे रखते हुए।

गति-समीकरणों को घटाने से प्राप्त होता है—

$$(12)\qquad \frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{(M+m)G}{r^2}\cos\phi,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{(M+m)G}{r^2}\sin\phi.$$

और उनका योग देता है—

$$(13)\qquad \frac{d^2\xi}{dt^2}=0,\quad \frac{d^2\eta}{dt^2}=0$$

समीकरण (12) की, पहले प्राप्त किये हुए (4) समीकरण से तुलना करते पर तुरंत मालूम हो जाता है कि केप्लर के प्रथम दो नियम पूर्णतया ठीक उतरते हैं अर्थात् सक्षेप गति के लिए भी वे वैध हैं। तृतीय नियम का रूप हो जाता है—

$$(14)\qquad \frac{T^2}{a^3}=\frac{4\pi^2}{G(M+m)}$$

अतएव अनुपात T^2/a^3 एक सार्वत्रिक नियतांक नही रहता, किंतु सैद्धांतिकतया प्रत्येक ग्रह के लिए थोडा-थोड़ा भिन्न है। परतु सूर्य की महती संहति के कारण समीकरण (10) से ये भिन्नताएँ बहुत ही छोटी हैं।

समीकरणद्वय (13) से यह भी प्रकट होता है कि सूर्य और ग्रह का संहति-केन्द्र नियत वेग से चलता है। यदि अपने परिचलन के लिए अभिदेश पद्धति ऐसी है जिसमें संहति केंद्र मूल बिंदु पर स्थित हो तो यह वेग शून्य के बराबर रखना होगा; और यही बात संहति-केंद्र के निर्देशांकों (ξ, η) पर भी लागू है।

तदनुसार (11b) के समीकरणद्वय भी सरलित हो जाते हैं। उनको तथा (11a) के समीकरणों की सहायता से, सूर्य के निर्देशांक x_1, y_1 एवं ग्रह के निर्देशांक x_2, y_2, अब सापेक्ष स्थान के निर्देशांकों x, y के पदों में अलग-अलग व्यक्त किये जा सकते हैं—

$$(x_1, y_1) = -\frac{m}{M+m}(x, y),$$

$$(x_2, y_2) = \frac{M}{M+m}(x, y).$$

इससे परिणाम यह निकलता है कि संहति-केंद्र प्रणाली में, सूर्य और ग्रह, दोनों के ही प्रक्षेप-पथ दीर्घवृत्त ही होते हैं। ग्रह का दीर्घवृत्त तो प्रायः बिलकुल वही रहता है जिसका कि इस प्रकरण के भाग (1) में विचार किया गया था। सूर्य का प्रक्षेप-पथ इससे बहुत ही छोटा "वामन" दीर्घवृत्त होता है जिसमे सूर्य के विचरने की दिशा★ तो वही होती है जो कि ग्रह की, परंतु सूर्य की गति की कला में ग्रहगति की कला से π का भेद रहता है।

यदि गुरुत्वाकर्षण नियम यों बदल दें कि—

(15) गु० बल $= \mathbf{F} = Kr^n . \frac{\mathbf{r}}{r}$, n स्वेच्छ अर्थात् कोई भी

तो द्वितीय केप्लर नियम अपरिवर्तित रहेगा; परंतु प्रक्षेपपथ बीजातीत वक्र हो जाते हैं, जो, व्यापकतया, बंद नहीं होते। केवल $n=1$ की स्थिति में ही दीर्घवृत्त प्राप्त होते हैं जैसे कि गुरुत्वाकर्षण की स्थिति में जहाँ $n=-2$. (देखिए समस्या 1.13)।

(३) क्षेत्र में विभव कब होता है ?

एक विमितीय गति मे किसी बल X से संबंधित एक स्थितिज ऊर्जा V की परिभाषा हम बिना किसी कठिनाई के कर सके थे—देखिए समी० (3.7)। जैसा कि उस समय कहा था, द्वि तथा त्रि-विमितीय गतियों के लिए ऐसा करना तभी संभव है जब कि कुछ शर्तें निभती हों। यदि (F) के कार्तीय निर्देशांक X, Y, Z हों तो त्रि-विमितियों की स्थिति के लिए, समी० (3.7) के सगत, स्थितिज ऊर्जा की परिभाषा होगी—

★यह दिशा वामावर्त अर्थात् घटिका प्रतिकूल (घटिका-सूची प्रतिकूल) है।

$$(16) \qquad V = -\int^{x,y,z} (Xdx + Ydy + Zdz).$$

यदि V को ऐसी राशि होना है कि जो समाकलन-पथ पर न निर्भर करे, परन्तु केवल अंत-बिंदु पर ही निर्भर करे (आदि-बिंदु के निर्वाचन से केवलमात्र एक योगात्मक नियतांक प्राप्त होता है जो कि प्रत्येक स्थिति में कुछ भी हो सकता है), तो पद-समूह ,

$$Xdx + Ydy + Zdz,$$

को यथार्थ अवकल होना चाहिए; अर्थात् X, Y, Z को x, y, z के लिए एक "क्षेत्र-फलन" के अवकलज होना चाहिए। प्रस्तुत स्थिति में यह फलन केवल मात्र V है और हम कहते हैं कि V "विभव V से व्युत्पाद्य" है। इसके लिए निम्नलिखित सुज्ञात प्रतिबंध हैं—

$$(17) \qquad \frac{\delta Y}{\delta x} = \frac{\delta X}{\delta y}, \ \frac{\delta Z}{\delta y} = \frac{\delta Y}{\delta z}, \ \frac{\delta X}{\delta z} = \frac{\delta Z}{\delta x}.$$

जब ये प्रतिबंध पूरे होते हैं तब ही कोई क्षेत्रफलन $V(x,y,z)$ प्रत्येक बिंदु $(x_1 y_1 z)$ के लिए निश्चित किया जा सकता है। इस V को "स्थितिज ऊर्जा" या केवल "विभव" कहते हैं*।

द्वि-विमितीय स्थिति में, जहाँ $Z=0$ और X, Y, यहाँ Z पर नहीं निर्भर करते (17) के तीन समीकरणों में से केवल पहला ही रह जाता है।

सदिश विश्लेषण (जो कि इस पुस्तकमाला की द्वितीय पुस्तक में दिया गया है, क्योंकि इस पुस्तक में केवल सदिश बीजगणित की ही आवश्यकता है) दिखलाता है कि (17) के प्रतिबंधों का एक अपरिणम्य अभिप्राय है अर्थात् वे निर्देशांक के निर्वाचन पर नहीं निर्भर करते। द्वितीय पुस्तक में इन प्रतिबंधों का संक्षेपीकरण एवं सदिश समीकरण

$$\text{Curl}\mathbf{F} = 0$$

में किया जायगा। इसको बहुधा यों कहते हैं कि सदिश क्षेत्र **F** अघूर्णनीय है।

*अंग्रेजी के शब्द हैं, पोटेंशल एनर्जी (potential energy) और पोटेंशल (potential)। हिंदी अनुवाद में इनके लिए दो भिन्न-भिन्न शब्दों का व्यवहार किया गया है—स्थितिज ऊर्जा, और विभव। पाश्चात्य शब्दों का शाब्दिक अनुवाद होगा संभाव्य ऊर्जा और संभाव्यता या कहिए विभवात्मक ऊर्जा और विभव।

स्पष्ट है कि x, y, z के पदों में X, Y, Z को ऐसे व्यंजकों द्वारा भी व्यक्त कर सकते हैं जो (17) के प्रतिबंधों का पालन नहीं करते। दूसरी ओर, गुरुत्वाकर्षणीय क्षेत्र इन प्रतिबंधों का प्रतिपालन करता है क्योंकि इस क्षेत्र के लिए

$$X = Y = O; \quad Z = -mg,$$

जिनसे निम्नलिखित परिणाम पर पहुँचते हैं—

$$V = mgz. \tag{18}$$

ये बातें न्यूटन के नियम पर आधारित व्यापक गुरुत्वाकर्षणीय क्षेत्रों तथा गणितीयतया उनके अनुरूप वैद्युत स्थैतिकी और चुम्बकीय स्थैतिकी के क्षेत्रों के लिए भी ध्रुव हैं। वास्तव में तो वे सभी क्षेत्र जो अघूर्णनीय, पर साथ ही साथ, समय-स्वतंत्र हैं ("विभव क्षेत्रसमूह") प्रकृति में एक अद्वितीय स्थान पर विराजमान हैं। पञ्चम और अष्टम अध्यायों के व्यापक विकाशन में वे विशेष काम के होंगे।

कोई भी यांत्रिक निकाय जिसमें केवल विभवों द्वारा व्युत्पाद्य बल ही आरोपित हों, *अविनाशक निकाय* कहलाता है क्योंकि उसकी (पूर्ण) ऊर्जा अविनाशित रहती है। अन्यत्र, जहाँ ऐसा नहीं होता, अनविनाशक निकायों को *अनविनाशी* या *क्षयशील* कहते हैं।

द्वितीय अध्याय

निकायों की यांत्रिकी; आभासी कर्म का सिद्धांत; दालांबेर[1] का सिद्धांत

§ ७. यांत्रिकी निकाय की स्वतंत्रता-संख्याएँ तथा आभासी विस्थापन; पूर्ण-पदीय और अपूर्ण-पदीय नियंत्रण

किसी संहति बिंदु की स्वतन्त्रता-सख्या एक होगी, यदि उसकी गति किसी ऋजु-रेखा या वक्र पर ही नियंत्रित हो। यदि वह किसी समतल या वक्र पृष्ठ पर चलायी जाय तो उसकी स्वतन्त्रता संख्याएँ दो होगी। अवकाश मे स्वतंत्रतापूर्वक विचरते हुए संहति बिंदु की तीन स्वतन्त्रता-संख्याएँ होती है।

किसी भार-हीन, दृढ दंड से संबंधित दो संहति बिंदुओं की स्वतंत्रता-संख्याएँ पाँच होंगी; क्योंकि एक बिंदु को स्वतंत्रतापूर्वक विचरते हुए समझ सकते हैं, परन्तु दूसरा केवल उस गोल के पृष्ठ पर चल सकता है जिसकी त्रिज्या, दंड की लंबाई जितनी और केंद्र बिंदु पर हो।

यदि संहति-बिंदुओं की संख्या n हो और वे अपने निर्देशांकों के बीच r संबंधों द्वारा युग्मित हों तो उनकी स्वतंत्रता-सख्या f होगी, जहाँ—

$$f = 3n - r. \tag{1}$$

यदि संहति बिंदुओ की सख्या अनन्त हो जो अनन्त प्रतिबंधों द्वारा संबंधित हों तो उक्त प्रकार की गणना, स्वभावतया, असभव होगी। इस स्थिति में स्वतंत्रता-संख्याएँ जानने के लिए क्या करना होगा, यह अब बतावेंगे। एक दृढ़ पिंड दृष्टांत का काम देगा।

(क) स्वतन्त्रतापूर्वक गतिमान दृढ़ पिंड

दृढ पिंड के किसी एक बिंदु को अलग लिये लेते है। इसकी तीन स्वतंत्रता-संख्याएँ हुईं। एक दूसरा बिंदु, पहले से एक नियत दूरी पर ("दृढ" की परिभाषा !),

1. D'Alembert's Principle

केवल एक गोलीय तल पर चल सकता है जिसका केंद्र प्रथम विंदु होगा और जिसकी त्रिज्या उक्त नियत दूरी होगी। यह दो और स्वतत्रता-सख्याएँ देता है। अंत में एक तीसरा विंदु प्रथम दो विंदुओं को मिलाने वाले अक्ष के चारों ओर एक वृत्त की रचना कर सकता है, तथा एक और स्वतत्रता-सख्या प्रदान करता है। जब एक बार इन तीन विंदुओं की गतियाँ विनिर्दिष्ट हो गयी, तो दृढ़ पिंड के अन्य सारे विंदुओं के पथ अद्वितीयतया निर्धारित हो गये। परिणामतः

$$f=3+2+1=6$$

(ख) समतल पर लट्टू

यह मान लेंगे कि नचाने के लट्टू के अधोभाग का अत एक नोक पर होता है और इसको अपनी गणना के लिए प्रथम विंदु लेंगे। इसकी दो स्वतत्रता-सख्याएँ हैं। एक दूसरा विंदु पहले के चारों ओर एक अर्द्धगोल पर चल सकता है; और एक तीसरा विंदु प्रथम दो को मिलाने वाली रेखा के चारो ओर एक वृत्त पर चल सकता है। इस प्रकार यहाँ स्वतंत्रता-संख्याएँ हुई,

$$f=2+2+1=5$$

(ग) लट्टू की नोक का बिंदु स्थिर

अब प्रथम विंदु की दोनों स्वतंत्रता संख्याएँ चली गयी, अतएव

$$f=0+2+1=3$$

(घ) निश्चित अक्ष वाला दृढ़ पिंड—लोलक[1]

यहाँ

$$f=1.$$

यदि पिंड का सहति-केन्द्र अक्ष पर न हो तो ऐसे पिंड को भौतिकीय अथवा यौगिक लोलक कहते हैं। यदि पिंड एक विंदुमात्र रह जाय तब गणितीय अथवा सरल लोलक प्राप्त होता है। यदि संहति-विंदु की गति केवल किसी गोल के तल पर ही हो सके तो ऐसे लोलक को गोलीय लोलक कहते हैं, जिसकी स्वतंत्रता-सख्याएँ होंगी—

$$f=2.$$

1. Pendulum

(च) अनन्त स्वतन्त्रता-संख्याएँ

किसी विरूप्य[1] ठोस पिंड या द्रव्य के लिए

$$f = \infty .$$

इस स्थिति में गति समीकरण आंशिक अवकल समीकरण हो जाते है। भिन्नतः n परिमिति स्वतत्रता सख्याओ (n) वाला निकाय उतनी ही अर्थात् n संख्या के द्वितीय के लिए सामान्य अवकल समीकरणों द्वारा निर्धारित किया जाता है।

(छ) एक स्वतन्त्रता-संख्या वाला यंत्र

ऐसा यत्र बहुत-से दृढ-प्राय पिंडों का बना होता है, जो परस्पर या तो कड़ियों द्वारा या विविध प्रकार की गति-नियंत्रक युक्तियों द्वारा युग्मित रहते है। इस प्रकार के यंत्र का उच्च-कोटीय दृष्टांत पिस्टन इंजन की चालन (चलाने की) यंत्र-रचना है (आ० ९)। यदि यंत्र मे अपकेंद्र नियंत्रक लगा हो (जिसको वाट नियंत्रक भी कहते हैं क्योंकि ऐसी युक्ति पहले पहल भाप इंजन के उद्भावक ने प्रस्तावित की थी), तो उसे एक द्वितीय स्वतंत्रता-संख्या प्राप्त हो जाती है।

उपर्युक्त दृष्टान्तों में स्वतंत्रता-संख्याएँ उन स्वतंत्र निर्देशाकों की संख्या के बराबर हैं जो कि निकाय का स्थान निर्धारण करने के लिए आवश्यक है। यह आवश्यक नहीं कि निर्देशांक कार्त्तीय ही हों। चलाने की यंत्ररचना के संबंध में या तो पिस्टन का स्थान निर्धारक निर्देशांक x ले सकते है या ईपा पर के क्रैंक-पिन के स्थान का कोण ϕ ले सकते हैं। दोनों ही एक जैसे अच्छे है। व्यापकतया, हम f स्वतंत्रता-सख्याओं वाले निकाय के निर्देशाकों के लिए लिखेंगे--

$$q_1, q_2, q_3, \cdots\cdots q_f . \tag{2}$$

कुछ विशिष्ट सीमाओं के भीतर इन निर्देशांकों का निर्वाचन स्वतंत्रतापूर्वक किया जा सकता है। समी० (1) मे आये हुए निर्देशांकों के वीच जो r प्रतिबंध है वे q के उचित निर्वाचन से सर्वसमतः संतुष्ट किये जा सकते हैं और फिर अपने निकाय की विवृति में आगे के लिए निकल जाते हैं।

पृष्ठ पाँच पर उल्लिखित हर्त्ज़[2] की यान्त्रिकी का एक महत्वपूर्ण गुण है कि उसमें इन अवकल रूप संबंधी प्रतिबन्धों की ओर ध्यान दिलाया गया है जिनमें उपर्युक्त बातें लागू नही हो सकती। इस प्रकार का प्रतिबंध यों लिखा जा सकता है—

1. Deformable 2. Hertz

$$(3) \qquad \sum_{k=1}^{f} F_k \; (q_1 \ldots\ldots q_f) dq_k = 0$$

यहाँ मान लेते हैं कि सभी F_k ओं का रूप $\frac{\partial \Phi}{\partial q_k}$ नही होता, अतएव (3) किसी भी फलन $\Phi (q_1 \ldots\ldots q_f)$ का सपूर्ण अवकल नही होगा और यह भी मान लेते हैं कि वह किसी समाकलनकारी गुणनखंड द्वारा संपूर्ण अवकल बनाया भी नही जा सकता।

हर्त्ज़ से सहमत होते हुए हम

$$\Phi (q_1 \ldots q_f) = \text{नियत},$$

के रूप के प्रतिबंधों को पूर्णपदीय कहेगे। पूर्णपदीय अंग्रेजी होलोनोमिक[1] के लिए लिया गया है। ग्रीक भाषा में होलोज=पूर्णसख्या; लैटिन में पूर्ण=पूर्णक=समाकलनीय। जिन प्रतिबंधो का रूप (3) जैसा होगा, जिनका कि औपचारिकतया समाकलन नही किया जा सकता, उन्हें अपूर्णपदीय[2] कहेगे*। अपूर्णपदीय प्रतिबध का सरलतम दृष्टांत *समस्या II. 1* का क्षैतिज तल पर चलता हुआ पैने किनारे का पहिया प्रस्तुत करता है। (स्ले[3] अर्थात् बरफ पर सरक कर चलने वाली बिना पहिये की गाड़ी और बाइसिकल की लचीली यत्ररचना, भी इसी वर्ग में आती हैं।) इस प्रकार का पहिया सदा उसी दिशा मे जायगा जिसमे किसी समय चलने को वह निरोधित हो। फिर भी वह आधारीतल के सभी स्थानों पर पहुँच सकता है यद्यपि कभी-कभी केवल अपने स्पर्श के नोकीले बिंदु को कीलक बनाकर ही। अतएव अत्यणु स्थानपरिवर्तन[4] की अपेक्षा निश्चित स्थानपरिवर्त्तन में उसकी स्वतंत्रता-संख्याएँ अधिक होती हैं। व्यापकतः, यदि अपूर्णपदीय प्रतिबधो वाले किसी निकाय की स्वतंत्रता-संख्याएँ निश्चित स्थान परिवर्त्तन मे f हों तो अत्यणु गति में उसकी स्वतंत्रता संख्याएँ $f-r$ ही रह जावेंगी। इस बात का अनुसंधान समस्या II. 1 में किया जायगा।

उपर्युक्त भेद आभासी विस्थापन की धारणा के लिए महत्त्वपूर्ण है। आभासी विस्थापन किसी निकाय के स्थान में एक स्वेच्छ तात्कालिक, अत्यणु परंतु ऐसा परि-

1. Holonomic 2. Non-holonomic
3. Sleigh 4. Infinitesimal motion

*ए. फ़ास (A. Voss) ने ऐसे प्रतिबंधों का अध्ययन 1884 में हर्त्ज़ से कहीं पहले किया था। देखिए, Math. Am. 25.

वर्त्तन है जो निकाय के नियत्रण के प्रतिबंधों से संगत हो। दिये हुए बलों से कारित वास्तविक विस्थापन को तो

$$dq_1, dq_2, \ldots\ldots dq_f,$$

द्वारा विदित करेंगे; परतु संकेत,

$$\delta q_1, \delta q_2 \ldots\ldots \delta q_f,$$

आभासी विस्थापन को विदित करने के लिए काम में लाये जावेंगे। इन δq, ओं का वास्तविक गति से कोई संबंध नहीं। यों, कहिए कि उनका प्रयोग परीक्षण राशियों के रूप में किया जा रहा है जिनका कार्य है कि निकाय अपने आंतरिक संबंधों का तथा अपने पर अनुप्रयुक्त बलों का कुछ भेद दें।

विशुद्ध पूर्णपदीय नियंत्रणों के लिए ये δq एक दूसरे से स्वतंत्र होते हैं; प्रत्येक δq एक-एक स्वतंत्रता-सख्या के अनुसार होगा। अपूर्णपदीय नियंत्रणों के लिए δqओं का अधिक सख्याओं में प्रवेश कराना पड़ता है। इस स्थिति में इन δqओं का परस्पर संबंध (3) के अवकलन रूप का होता है; अर्थात्, आभासी विस्थापनों के लिए

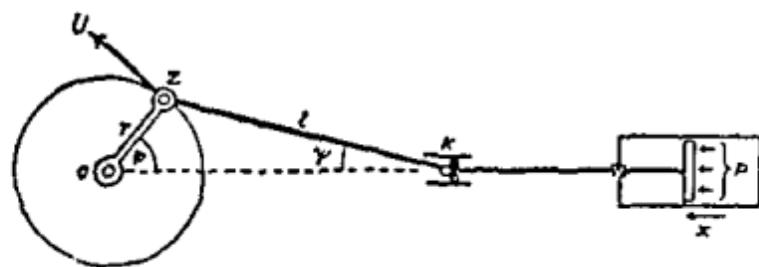
$$(4) \quad \sum_{k=1}^{f} F_k \, (q_1, q_2 \ldots\ldots q_f) \, \delta q_k = 0$$

यहाँ f निश्चित गति (स्थान-परिवर्त्तन) के लिए स्वतंत्रता-संख्याओं की संख्या है। जैसा कि पहले भी जोर देकर कहा जा चुका है, यह संख्या अत्यणुगति की स्वतंत्रता संख्या से बड़ी होती है।

§ ८. आभासी कर्म का सिद्धान्त

एक ऐसे यांत्रिक निकाय का ध्यान कीजिए जो अनुपयुक्त बलों के अधीन साम्यावस्था में हो। बलों की कोई भी वांछित दिशा हो सकती है, वे निकाय के विभिन्न भागों पर अनुप्रयुक्त हो सकते हैं; और हो सकता है कि किसी दृढ़पिंड को साम्यावस्था में रखने के लिए जो उनके स्थान चाहिए, यहाँ वे न भी हों। अनुसंधानाधीन निकाय को ये बल साम्यावस्था में रख रहे हों तो यह बात जितनी बलों पर निर्भर करती है उतनी ही निकाय पर।

प्रारंभिक कण-यांत्रिकी की भाँति यहाँ भी हम उन प्रतिक्रियाओं का अनुसंधान करेंगे जो, अनुप्रयुक्त बलों के कारण, निकाय के एक भाग द्वारा उसी के दूसरे भाग

पर होती है। उदाहरणतः, इस प्रश्न को एक यान्त्रिक इंजीनियर क्रैंक यन्त्ररचना (आ०9) के विश्लेषण के लिए काम में लावेगा। पिस्टन पर अनुप्रयुक्त भाफ का

आकृति ९—पिस्टन इंजन को चलाने की यन्त्ररचना का अनुसूचक रेखाचित्र।

दाब P पिस्टन दंड द्वारा क्रासहेड K को संचारित होता है, जहाँ से अनुदैर्घ्य संपीडन के रूप में संबधक दंड (लंबाई, l) को पहुँचता है। संबधक दंड क्रैंक-पिन Z पर अपनी दंड की दिशा में ठेल लगाता है। निकाय को साम्यावस्था में रखने के लिए ठेल को केवल उसी खंड U का, जो क्रैंक के लंबवत् है और इसलिए क्रैंकवृत्त के स्पर्शरेखीय है, एक अनुप्रयुक्त समान बल द्वारा विरोध करना आवश्यक होगा। क्रैंक की दिशा वाला घटक, जो क्रैंक-ईषा के केंद्र की ओर होगा, दृढ़तापूर्वक जमाये हुए ईषा-धुराधार[1] O में अवशोषित हो जाता है। वह केवल धुराधार पर एक प्रतिबल डालता है और इसलिए निकाय की साम्यावस्था के प्रश्न के लिए असंगत है।

अतएव निकाय के भीतर ही जो प्रतिक्रियाएँ होती हैं उन्हीं से साम्यावस्था संभाव्य होती है। सरल स्थितियों में तो उनमें से एक-एक का अनुसंधान किया जा सकता है, व्यापकतया वैसा करना क्लांतिजनक हो जाता है। परंतु एक-एक को जाने बिना ही हम यह विश्वासपूर्वक कह सकते है कि वे निकाय पर कोई प्रभाव नहीं डालतीं। प्रस्तुत स्थिति में गति-नियंत्रक पटरियों पर गति-नियंत्रक दाब क्रासहेड की गति के लंबवत् काम करता है और क्रैंकपिन पर काम करते हुए बल का वह भाग जो कि क्रैंक दंड को संचारित होता है, इस दंड के धुराधार के स्थिर बिंदु O से होकर जाता है। व्यापक स्थिति में इस बात का स्थापन, निकाय को अपनी साम्यावस्था की परिस्थिति से परीक्षा-मूलक आभासी विस्थापन देकर करते हैं। इस प्रकार के विस्थापन में प्रतिक्रियाओं का "आभासी कर्म" शून्य निकलता है।

1. Shaft bearing

इस सिद्धांत को पूर्णतया सत्यापित करने के लिए सरल दृढ़ पिण्ड लीजिए। मान लीजिए कि पिंड का प्रत्येक विंदु i उसके प्रत्येक विंदु k से प्रतिक्रियाओं $\mathbf{R}_{ki}$ और $\mathbf{R}_{ik}$ द्वारा सबधित है जो क्रमात् i और k पर काम करती हैं। यदि इस प्रकार के विंदुओं को अलग कर लें तो § ७ के प्रारंभ में वर्णित दो संहति विंदुओं का निकाय प्राप्त हो जाता है जहाँ दोनों संहतियाँ एक भारहीन, दृढ़ दंड द्वारा परस्पर सयोजित है। इस दंड में काम करती हुई प्रतिक्रियाएँ न्यूटन के तृतीय नियम का पालन करेंगी कि

$$\mathbf{R}_{ik} = -\mathbf{R}_{ki} \tag{1}$$

ठीक § ७ की भाँति, स्वतंत्रता-संख्याओं की गिनती के लिए, आभासी विस्थापन को दो घटकों में विघटित करेंगे—एक तो स्थानान्तरण δs_i जो कि दोनों विंदुओं के लिए उभय-सामान्य है; और दूसरा, इस अब विस्थापित विंदु i के प्रति विंदु k का घूर्णन, δs_n, जो घूर्णन दंड के लंबवत् एक गति होगी। तो

$$\delta s_k = \delta s_i + \delta s_n$$

अतएव, स्थानांतरण (translation) के आभासी कर्म के लिए, समी० (1) को ध्यान में रखते हुए,

$$\delta W_{tr} = \mathbf{R}_{ik} \cdot \delta s_i + \mathbf{R}_{ki} \cdot \delta s_i = 0;$$

और, घूर्णन के आभासी कर्म के लिए, जिसमें i स्थिर रहता है, k दंड के लंबवत् विस्थापित होता है,

$$\delta W_{rot} = \mathbf{R}_{ik} \cdot \delta s_n = 0$$

यह उदाहरण प्रदर्शित करता है कि कण-यांत्रिकी से निकायों की यांत्रिकी के संक्रमण तक में न्यूटन का क्रिया-प्रतिक्रिया वाला नियम प्रधान बात है।

जो कुछ भी हमने उक्त दृष्टान्तों से सीखा है उसे अब एक व्यापक अधिमान्य नियम[1] के रूप में विस्तृत करेंगे कि **किसी भी यांत्रिकी निकाय में प्रतिक्रियाओं का आभासी कर्म शून्य के बराबर है।** इस स्वीकृति या अधिमान्य नियम का कोई व्यापक प्रमाण ‡ देने की हमारी बिलकुल अभिलाषा नहीं है। वास्तव में हम तो उसे व्यवहारतः "यान्त्रिक निकाय" की परिभाषा की भाँति समझते हैं।

1. Postulate

‡ इस बात का यत्न लाग्रांज ने अपनी पुस्तक Mecanique Analytique में (जिसका उल्लेख उपोद्घात में हो चुका है) घिरनियों के और रस्सियों के किन्हीं निर्माणों द्वारा किया था।

इसके बाद आभासी कर्म के सिद्धांत का व्यापकतया सूत्रीकरण करने के लिए एक छोटा-सा ही कदम रह जाता है। हम इस प्रकार तर्क करते हैं--किसी साम्यावस्था-गत निकाय का अनुप्रयुक्त भौतिकतया दिया हुआ प्रत्येक बल, अनुप्रयोग बिंदु पर उत्पादित प्रतिक्रियाओं के प्रति साम्यावस्था मे होगा, अतएव अनुप्रयोग-बिंदु के आभासी विस्थापन में, इस प्रकार के अनुप्रयुक्त बल तथा उसके द्वारा किया हुआ कर्म तथा प्रतिक्रियाओ द्वारा किये हुए कर्म, इन सबका योग शून्य होगा। यह बात सभी अनुप्रयुक्त बलों के योग तथा उनके द्वारा उत्पादित सभी प्रतिक्रियाओ के योग के लिए सच है। परंतु, अभी-अभी सिद्ध कर चुके हैं कि यदि सभी प्रतिक्रियाओ को हिसाब मे लें तो वे कोई आभासी कर्म नही करती। अतएव, **किसी निकाय को साम्यावस्था में रखने वाले अनुप्रयुक्त बलों द्वारा किया हुआ आभासी कर्म भी अवश्यमेव शून्य होगा।** इस कारण, प्रतिक्रियाओ के क्रांतिजनक अनुसधान का निरसन हो जाता है।

यही है "आभासी कर्म का सिद्धात" जिसे जर्मन साहित्य में बहुधा Prinzip der virtuellen Verrückungen oder Verschiebungen कहते हैं, जिसका अंग्रेजी अनुवाद हुआ Principle of Virtual Displacements (आभासी विस्थापनों का सिद्धात)। इसका यह जर्मन नाम उतना संतोषजनक नही जितना कि वह जो अंग्रेजी बोलने वाले देशों में प्रचलित है और जो कि स्वयं इटली के principio dei lavori virtuali से लिया गया था। गणितीय साहित्य मे उसे बहुधा "आभासी वेगों का सिद्धात" कहते हैं। यह नाम पहले पहल जीन बर्नूली Jean Bernoulli ने प्रस्तावित किया था। हमारे लिए वह अनुपयुक्त जान पड़ता है।

ऐतिहासिक दृष्टि से, इस सिद्धांत का स्थूल वर्णन गैलिलियो पहले ही कर चुका था। स्टेविन, भ्रातृद्वय जैक्स और जीन, बर्नूली; तथा दालांबेर ने विषय का और भी विकास किया। परतु साम्यावस्था के व्यापकतम सिद्धात की भाँति उसका सिक्का लाग्रांज के ग्रंथ मेकानीक एनैलिटीक (Mecanique Analytique) ने ही जमवाया।

निकाय के नियंत्रण पूर्णपदीय प्रकार के हों या अपूर्णपदीय प्रकार के, आभासी कर्म के सिद्धात के अनुप्रयोग पर इस बात का बहुत ही कम प्रभाव पड़ता है। वास्तव में तो, आभासी कर्म के पद-पुंज (7.4) के रूप का प्रतिबंध, δp ओं में से किसी एक का निरसन कर, प्रवेशित किया जा सकता है, चाहे यह प्रतिबंध समाकलनीय (Integrable) हो या न हो।

"प्रतिक्रियात्मक बलों" के स्थान पर हम "ज्यामितीय मूल बलों" का व्यवहार कर सकते हैं। क्योंकि निकाय के विभिन्न भागों के बीच के, या, जैसे कि दृढ़पिंड में, उसकी सहृति-बिंदुओं के बीच के, ज्यामितीय संबंधों द्वारा वे दिये जाते हैं।

ज्यामितीय मूल के बलो के विपरीतः "भौतिक मूल के" या अनुप्रयुक्त बल होते है। इसके लिए सामान्यतया व्यवहृत नाम, "बाह्य बल", उतना स्पष्ट नहीं, है अतः यहाँ उस आशय में, इस नाम का व्यवहार नहीं किया जायगा। अनुप्रयुक्त बल भौतिकीय प्रभावो द्वारा कारित होते है, यथा गुरुत्व, भाप-दाव, केबित (समुद्री तार) आदि वे तनाव वृंद जो निकाय पर बाहर से प्रभाव डालते हैं। अपने भौतिक होने का भेद वे इस बात से देते है कि उनके गणितीय व्यंजनो (पद-पुंजो) में ऐसे विशिष्ट नियतांक आते है जो प्रयोगतया ही निर्धारित किये जा सकते हैं, यथा गुरुत्वाकर्पणाक, किसी दाबमापी, वायुदाबमापी (बैरोमीटर), या अन्य प्रकार की मापियो की मापनियो के पाठ्याक, इत्यादि। चौदहवें प्रकरण (§ १४) में घर्षण के बल के बारे में बतायेंगे, जो कभी तो प्रतिक्रिया के बलों में, कभी अनुप्रयुक्त बलों में गिना जाता है। स्थैतिक घर्षण के रूप मे वह प्रतिक्रिया बल है; विसर्पी या गतिज घर्षण में वह अनुप्रयुक्त बल होता है। आभासी कर्म के सिद्धांत द्वारा स्थैतिक घर्षण का अपने आप निरसन हो जाता है; गतिज घर्षण को अनुप्रयुक्त बलों की भाँति प्रवेश कराना होगा। इस बात का बाह्य सूचक, विसर्पी घर्षण के नियमो (14.4) का प्रयोगात्मक नियतांक, μ, है।

§ ९. आभासी कर्म सिद्धांत के उदाहरण

(१) उत्तोलक (आर्किमिडीज)

उत्तोलक[1] की स्वतंत्रता-संख्या एक है, $f=1$; अतएव उसके लिए विस्थापन भी केवल एक ही हो सकता है, δq, जो आभासी कोणीय विस्थापन, $\delta\phi$, के अनुरूप होगा।

साम्यावस्था तभी, और केवल तभी, रहेगी, जब कि उत्तोलक के $\delta\phi$ घूर्णन में किया हुआ आभासी कर्म शून्य होगा। मान लीजिए कि A और B बलो के अनुप्रयोग बिंदुओं, P और Q (आकृति १०)के, आभासी विस्थापन क्रमात् δS_A और δS_B है तो हमारी यह अभियाचना है कि

1. Lever

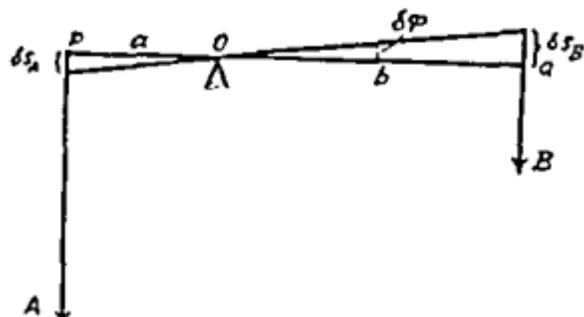
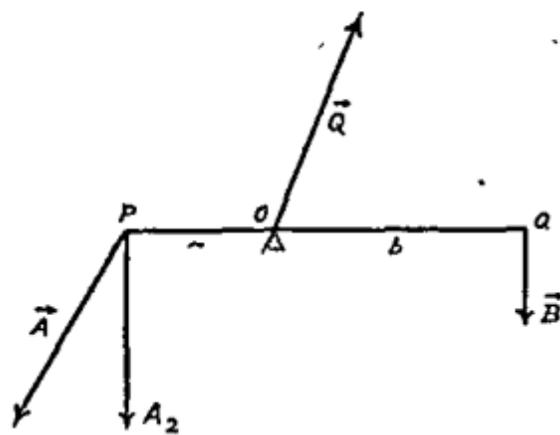
$$A.\delta s_A + B\delta s_B = 0$$

परन्तु आकृति १० क में

$$\delta s_A = a.\delta\phi,\ \delta s_B = -b\delta\phi,\ \text{अतएव}$$
$$(Aa - Bb)\ \delta\phi = 0$$

और परिणामतः

$$Aa = Bb.$$

आलम्ब 0 के प्रति बलों के घूर्ण बराबर हैं अर्थात् घूर्णों का बीजीय योग शून्य है।

आकृति १० क—उत्तोलक और उसकी भुजाएं a व b; तथा बोझ, A व B

आकृति १० ख—उत्तोलक तिर्छे बोझ के अधीन; दंड पर आलब की प्रतिक्रिया दिखलाते हुए।

यदि एक बल (A) उत्तोलक की भुजा मे लंबवत् न हो, जैसे कि आ० १० ख मे, तो उसे भुजा की दिशा मे एक घटक A_1 और उसके लंबवत् घटक A_2 मे विघटित कर

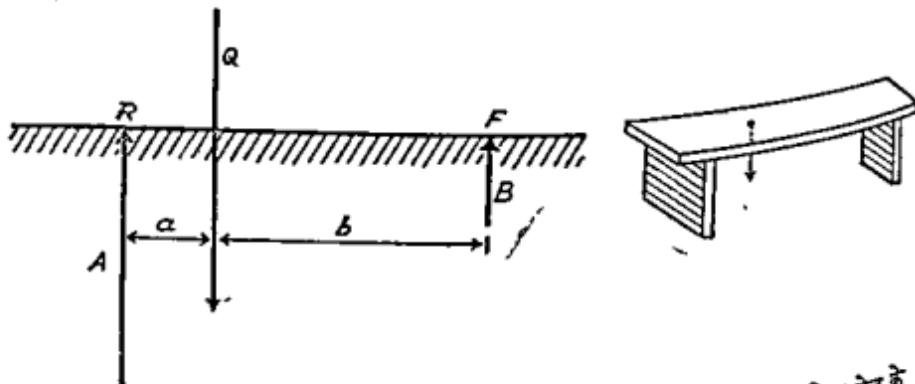
सकते हैं। विंदु O के स्थिर रहने के कारण, A_1 का कुछ प्रभाव नहीं होता और इस कारण,

$$A_2a = |B|\,b$$

कितना वोझ O पर पड़ता है यह जानने के लिए भुजा पर काम करने वाले एक विरोधक वल का प्रवेश कराना पड़ता है। आकृति १० क में वह ऊर्ध्वाधर ऊपर की ओर, परिमाण $Q = A + B$ का, होगा। आलम्ब पर वोझ इस वल Q के वरावर पर उससे प्रतिकूल दिशा में पड़ेगा।

आकृति १० ख की स्थिति में, सदिश समीकरण होगा,

$$Q = A + B$$

यहाँ भी, O पर वल Q के विरुद्ध (अर्थात् "साम्य कारक") होता है।

आ० ११ क—अगले और पिछले पहियों पर दो आरोही सहित वाइसिकल का भार-वितरण

आ० ११ ख—एक रेखांकित सेतु के आधारों पर बोझ का वितरण।

इन प्रश्नों को उठाने में हम वास्तव में आभासी कर्म के सिद्धांत की सीमाओं का उल्लंघन कर जाते हैं। कीलक O का स्थिर स्थान उत्तोलक के यांत्रिक निकाय का लाक्षणिक गुण है। उसका आभासी विस्थापन, और इसलिए उस पर किया हुआ आभासी कर्म, शून्य है। अपने सिद्धात द्वारा Q किम्वा (Q) का निर्धारण करने के लिए हमें एक विलकुल ही भिन्न यान्त्रिक निकाय पर विचार करना होता। इस निकाय में O के लिए दो स्वतंत्रता-संख्याओं की आवश्यकता होती; और फिर देखना होता कि अब तक विचारित केवल घूर्णन के साथ ही साथ यदि सारे उत्तोलक का, अपने तई समांतर, एक आभासी स्थानांतरण भी हो रहा हो तो, इस स्थिति में साम्यावस्था के प्रतिबंध क्या होंगे।

(२) उत्तोलक का उलटा—साइकल-आरोही, सेतु

आकृति ११ क की बाइसिकल पर विचार कीजिए। भार का विभेदन दो स्थानों पर करती है, R (रीयर वाले पिछले पहिये) और F (फ्रन्ट वाले अगले पहिये) पर। पिछले पहिये पर अधिकतर दाब पड़ता है क्योंकि Q बाइसिकल और आरोही का भार, F की अपेक्षा R के अधिक पास है। इसीलिए, बाइसिकल आरोही अगले पहिये की अपेक्षा पिछले पहिये में अधिक हवा भरता है। पिछले पहिये पर A बोझ पड़ेगा, अगले पर B, जहां

$$A=\frac{b}{a+b}\,Q\,,\ B=\frac{a}{a+b}\,Q.$$

किसी सेतु के संबंध में भी यही अवस्थिति होती है यदि उसका बोझ मध्यस्थल पर पड़ रहा हो (आ० ११ ग)।

(३) ब्लॉक और टैकल* (प्राचीन यूनानियों को भी ज्ञात)

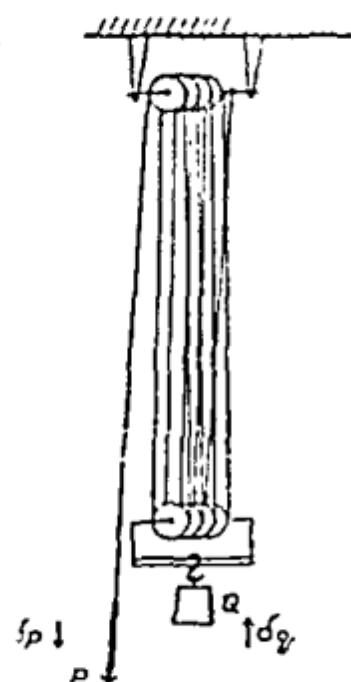
युक्ति (आ० १२) की उपरली और निचली ओर घिरनियों की संख्या, समझिए कि प्रत्येक ओर n है। रस्सी के छुट्टा सिरे पर P बल लगा कर Q बोझ उठाना है। निकाय के एक आभासी विस्थापन में समझिए कि

P के चलने की दूरी δp है,

Q के चलने की दूरी δq है।

आकृति १२

ब्लॉक और टैकल। बोझ तथा बल का आभासी विस्थापन

गतियों की दिशाएँ आकृति १२ के तीरायों द्वारा प्रदर्शित हैं। तो साम्यावस्था के लिए

(1) $$P\delta p-Q\delta q=0$$

* रस्सी, काँटी और घिरनियाँ आदि जुटा कर बनायी हुई, थोड़ा ही सा जोर लगाकर काफी बड़ा भार उठाने की, एक युक्ति। शाब्दिकतया, ब्लाक लकड़ी का कुंदा; टैकल रस्सी हुक आदि की बनी युक्ति। अतएव इसे घिरनी-रस्सी युक्ति कह सकते हैं।

अब यदि Q के उठने की मात्रा δq हुई तो ऊपर और निचली घिरनियों के बीच की $2n$ लड़ियों में से प्रत्येक की लंबाई δq कम हो जावेगी, और इसलिए घिरनियों के बीच की रस्सी की लंबाई में कुल $2n\ \delta q$ की कमी हो जायेगी। P पर लटकते हुए रस्सी के छुट्टा सिरे की लंबाई ठीक इतनी ही बढ़ जायेगी। अतएव,

$$\delta p = 2n\delta q$$

और, (1) के कारण,

$$(Q-2nP)\delta q = 0.$$

तो हम प्राप्त करते हैं

(2)
$$P = \frac{Q}{2n}$$

यहाँ हमने ब्लाक और टैकल को "आदर्श" यान्त्रिक निकाय समझ लिया है; अर्थात् घिरनियों और रस्सी के बीच का घर्षण एवं घिरनियों के धुराधारों में का घर्षण उपेक्षणीय समझ लिया गया है।

यह सरल उदाहरण, स्वभावतः, रस्सी के तनाव वाली प्रारंभिक विधि से भी हल किया जा सकता है जिससे कि कदाचित् बल की मिथक्रिया का अधिकतर साकार चित्र सम्मुख आ जाता है।

समझिए कि रस्सी में, उसके सारे अनुप्रस्थ काट पर का, तनाव S है। यदि घर्षणीय प्रभावों की उपेक्षा कर दें तो रस्सी में प्रत्येक स्थान पर यही तनाव होगा; कहीं भी रस्सी को काटें, तनाव यही S मिलेगा जो कि कटे हुए दोनों सिरों में, कटे स्थान से परे की ओर होगा। पहले समझिए कि रस्सी बायीं ओर, P से ऊपर, काटी गयी है। तो काट कर अलग किये हुए टुकड़े से, जिसमें P नीचे की ओर तथा S ऊपर की ओर काम कर रहे हैं, प्राप्त होता है

$$P = S.$$

अब समझिए कि आकृति की दाहिनी ओर की जितनी लड़ें हैं उन सब में एक एक काट दी गयी है और इस प्रकार 2n अनुप्रस्थ काटें, कटे स्थान के प्रत्येक ओर, प्राप्त होती हैं। निचले दाहिने काट कर अलग किये हुए टुकड़े पर अनुप्रयुक्त बलों की साम्यावस्था की अभियाचना[1] है कि

$$Q = 2nS$$

1. Demand

अतएव हमें फिर वही पुराना समीकरण प्राप्त होता है,

$$P = \frac{Q}{2\pi}$$

इसके अतिरिक्त, पेंच के ऊपरी भाग पर विचार करने से यह भी ज्ञात हो जाता है कि जिस दट्टे से पिण्डिकाओं का ऊपर का भाग रुकता है, उसपर कितना बोझ पड़ता है। प्रकट है कि इस बोझ का परिमाण $P-Q$ होगा।

(४) पिस्टन इंजन की चालन-यंत्र-रचना

जैसे कि आकृति ९ में, भाप-दाब के कारण पिस्टन पर पड़ा हुआ भार बल P है, अतएव पिस्टन पर किया हुआ आभासी कर्म $P\delta x$ होगा। मानलिए कि पहिए पर पड़े हुए परिमार्गी[1] बल U का साम्यकारक, अर्थात् P को साम्यावस्था में रखने वाला बल Q है। Q का आभासी कर्म $-Qr\delta\phi$ होगा। तो अतः सिद्धांत के लिए आवश्यक है कि

$$(3) \qquad Qr\delta\phi = P\delta x; \quad Q = P\frac{\delta x}{r\delta\phi}.$$

अतएव Q का ज्ञान करना δx और $\delta\phi$ के बीच का सम्बन्ध निर्धारण करने का काम केवल शुद्धगतिकीय कार्य हो जाता है।

आकृति ९ के अनुसार (x दिशा में प्रक्षेप),

$$(4) \qquad r\cos\phi + l\cos\psi = \text{नियत} - x.$$

अतएव, अवकलन करने से,

$$(4a) \qquad r\sin\phi\,\delta\phi + l\sin\psi\,\delta\psi = \delta x.$$

त्रिभुज OZK प्रदान करता है,

$$(4b) \qquad \sin\psi = \frac{r}{l}\sin\phi, ; \delta\psi = \frac{r\cos\phi}{l\cos\psi}\delta\phi$$

$$= \frac{r}{l}\frac{\cos\phi}{\left[1-\left(\frac{r}{l}\right)^2\sin^2\phi\right]^{\frac{1}{2}}}\delta\phi$$

1. Peripheral

यदि इसका (4a) मे उपयोग करें तो हम प्राप्त करते हैं—

$$(4c) \qquad r\sin\phi\,\delta\phi\left(1+\frac{r}{l}\frac{\cos\phi}{\left[1-\left(\frac{r}{l}\right)^2\sin^2\phi\right]^{\frac{1}{2}}}\right)=\delta x$$

यह सबंध चलगतिकीय राशि $\frac{\delta x}{r\delta\phi}$ प्राप्त कराता है। अब (3) में प्रतिस्थापन करने से मिलता है

$$(5) \qquad Q=P\sin\phi\left(1+\frac{r}{l}\frac{\cos\phi}{\left[1-\left(\frac{r}{l}\right)^2\sin^2\phi\right]^{\frac{1}{2}}}\right)$$

इस प्रकार क्रैंक-पिन Z द्वारा संचारित परिमायी बल $U=Q$, क्रैंक के प्रत्येक स्थान ϕ के लिए, निर्धारित हो जाता है। यंत्र के चक्रीय उच्चावचन के परिमाण का मान निकालने और उससे उचित गतिपालक चक्र के निर्धारण के लिए इस राशि का यथातथ ज्ञान अनिवार्य है। $\frac{r}{l}$ के उचित भिन्न राशि होने के कारण, (5) को $\frac{r}{l}$ की एक शीघ्रतया अभिसारी श्रणी[1] मे विस्तारित कर सकते हैं। इस संबध मे प्रश्न II. 2 भी देखिए।

अंत में, एक आगामी अनुप्रयोग के लिए, पिस्टन के स्थान x को $\frac{r}{l}$ की घात श्रेणी के रूप में निकालेंगे। (4) और (4b) के अनुसार प्राप्त करते हैं—

$$(6) \qquad x+r\left(\cos\phi-\tfrac{1}{2}\frac{r}{l}\sin^2\phi+\dots\dots\right)=\text{नियत};$$

(५) किसी अक्ष के प्रति बल का घूर्ण तथा आभासी घूर्णन में कर्म

मान लीजिए कि बिंदु P अक्ष a से l दूरी पर है और एक बल F किसी भी एक दिशा में P पर काम कर रहा है। अक्ष a के प्रति एक आभासी घूर्णन[2] $\delta\phi$ में, P का विस्थापन होगा

$$\delta s p=l\delta\phi.$$

तो इस विस्थापन में F कितना काम (δW) करेगा?

1. Converging series 2. Virtual rotation

F को परस्पर लववत् घटकों[1] F_a, F_l, F_n में विघटित कीजिए, ठीक वैसे ही जैसे कि समी० (5.18) के लिए किया था। किया हुआ काम केवल F_n पर निर्भर करेगा क्योंकि

$$\delta W = F_n \; \delta s_p = F_n \; l \delta\phi.$$

इसकी समी० (5.18*a*) से तुलना करने पर एक व्यापक अभ्युक्ति कर सकते हैं कि

बल के अनुप्रयोग बिंदु द्वारा किसी अक्ष के प्रति किये हुए घूर्णन $\delta\phi$ में बलकृत कर्म δW को $\delta\phi$ से भाग देने से जो भाज्य निकलता है, उसे उस बल का उस अक्ष के लिए घूर्ण समझ सकते हैं।

$$L_a(\mathbf{F}) = \frac{\delta W}{\delta\phi} = l F_n \tag{7}$$

इस प्रकार, घूर्ण की धारणा, जो स्थैतिकी के लिए आधारिक है, साम्यावस्था के सब प्रश्नों के आधारिक, आभासी कर्म से सबधित हो जाती है।

यहाँ पर कह देना चाहिए कि घूर्ण की विमितियाँ (बल × उत्तोलक बाहु) वही हैं जो कर्म की हैं (बल×दूरी)। यदि, प्रचलित प्रथानुसार, रेडियनों में मापे हुए कोण को विमितिहीन समझें तो उपर्युक्त वात समीकरण (7) के अनुकूल है।

§ १०. दालांबेर का सिद्धांत

अवस्थितित्वीय बलों का प्रवेश

जैसा कि हम देख चुके हैं, सभी पिंडों की अपनी विराम अवस्था या ऋजुरेखीय एक-समान गति की अवस्था में ही बने रहने की प्रवृत्ति होती है। इस प्रवृत्ति को हम गति के परिवर्तन का अवरोध, एक अवस्थितित्वीय अवरोध, या, सक्षेपत:, अवस्थितित्वीय बल, समझ सकते हैं। अतएव किसी एक ही महति बिंदु के लिए अवस्थितित्वीय बल $\mathbf{F}^*$ की परिभाषा होगी—

$$\mathbf{F}^* \equiv -\dot{\mathbf{p}} \tag{1}$$

और मौलिक नियम कि $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}$, यह रूप धारण करेगा

$$\mathbf{F}^* + \mathbf{F} = 0 \tag{2}$$

अर्थात्, शब्दों में,

1. Perpendicular components

अवस्थितित्वीय बल[1] अनुप्रयुक्त बल[2] के साथ सदिशीय साम्यावस्था[3] में होता है।

F बल तो भौतिक अवस्थिति द्वारा प्राप्त होता है परन्तु F^* बल काल्पनिक बल है। उसका प्रवेश गति की समस्याओं को साम्यावस्था संबंधी समस्याओं में पहुँचाने के लिए कराते हैं। यह प्रक्रम बहुधा सुविधाजनक होता है।

अवस्थितित्वीय बल नित्यप्रति के जीवन में सुपरिचित हैं। जिस समय चक्कर लगाने वाला होटल का भारी दरवाजा हम चलाते हैं उस समय न तो गुरुत्व बल, न घर्षण, किंतु द्वार के अवस्थितित्व का सामना करना पड़ता है। इसी प्रकार के दृष्टांत सड़क की गाड़ियों* और ट्रालियों के सरकने वाले दरवाजे हैं। गाड़ी के अगले प्लैटफार्म पर दरवाजा आगे की ओर अर्थात् जाने की दिशा में खुलता (सरकता) है। जिस समय गाड़ी में ब्रेक लगता है, द्वार की प्रवृत्ति आगे जाने की होती है और इस लिए वह सरलतापूर्वक खोला जा सकता है। खड़ी रहने के बाद जब गाड़ी त्वरित होती है, अर्थात् उसकी वेग-वृद्धि होती है तब खुला द्वार स्वयं अपनी विराम अवस्था में जाना चाहता है, इसलिए उसमे पीछे की ओर आने की प्रवृत्ति होती है और वह बिना आयास ही बंद किया जा सकता है। सामने के प्लैटफार्म पर चढ़ना-उतरना पिछले प्लैटफार्म की अपेक्षा सरल है जहाँ दरवाजा उलटी ओर खुलता है।

अवस्थितित्व का सर्वाधिक-ज्ञात रूप **अपकेंद्र बल** है, जिसका किसी भी वक्र गति में अनुभव किया जा सकता है। यह भी एक काल्पनिक बल है। वह वक्र के अभिलंब त्वरण $\dot{v}_n$ के अनुरूप है जो अभिकेंद्र त्वरण अर्थात् वक्रता केंद्र की ओर निर्देशित है। समी० (5.9) के अनुसार, अपकेंद्र बल होगा

$$(3) \qquad \mathbf{C} = -m\dot{\mathbf{v}}_n, \quad |\mathbf{C}| = m\left|-\dot{\mathbf{v}}_n\right| = m\frac{v^2}{\rho},$$

जहाँ ऋण चिह्न बाहर की ओर की दिशा का सूचक है।

1. Inertial force 2. Applied force 3. Vectorial equilibrium

(क) सड़क की गाड़ी (स्ट्रीट कार) से ट्रामगाड़ी का मतलब है। चढ़ने और उतरने के स्थानों पर इन गाड़ियों में जो स्थान होता है उन्हें प्लैटफार्म कहते हैं। जर्मनी की इन ट्रामों और ट्रालियों में सरका कर खोलने वाले द्वार होते हैं। भारत के लिए परिचित दृष्टांत होंगे सरका कर खोलने वाले अलमारियों के दरवाजे। इस प्रकार की अलमारियाँ बहुधा पुस्तकालयों में होती हैं। पोशाक टाँगने और लाने-वाली सम्मिलित अलमारी में भी बहुधा इसी प्रकार के दरवाजे होते हैं।

कारिआलिस बल (देखिए § २८) और विविध घूर्णांश-स्थापकीय प्रभाव (देखिए § २७) भी अवस्थितित्व बल वृंद के शीर्षक के नीचे आते हैं।

प्रसंगवश रेलगाडी की पटरियाँ इस बात का बडा जीवित जाग्रत् उदाहरण प्रस्तुत करती हैं कि "काल्पनिक" अपकेन्द्र बल का वास्तविक अस्तित्व है। किसी वक्र पर पटरियाँ इस प्रकार रखी होती हैं कि बाहरी पटरी भीतरी की अपेक्षा ऊँचाई पर रहे। दोनों पटरियों की ऊँचाई का अतर सदा ऐसा होता है कि, रेलगाडी के किसी एक माध्य वेग के लिए, गुरुत्व और अपकेन्द्र बल का परिणामी पटरियों के भूमितल के लबवत् हो। इस प्रकार पहिये के न केवल बाहरी पटरी से उठ कर गाडी के उलट जाने की आशका नही रहती अपितु रेलो पर एक हानिकारक असमान बोझ भी नही पडने पाता।

आश्चर्य ही की बात है कि महान् हाइनरिख हर्ज अपनी पुस्तक "मिकैनिक्स" के असाधारणतया सुदर और सुदरतापूर्वक लिखित उपोद्घात मे अपकेन्द्र बल के प्रवेश पर आपत्तियाँ उठाते हैं (देखिए हर्ज कलेक्टेड वर्क्स, ख ३, पृष्ठ ६)—

"डोरी के एक सिरे पर पत्थर बाँध कर हम उसे एक वृत्त मे झुलाते हैं; इस प्रकार जानते हुए पत्थर पर एक बल लगाते हैं, यह बल सदैव पत्थर को ऋजु पथ से विचलित करता रहता है; और यदि इस बल मे, या पत्थर की सहति मे, या डोरी की लंबाई में, कोई परिवर्त्तन करे तो देखते हैं कि पत्थर की गति सत्यमेव प्रत्येक समय न्यूटन के द्वितीय नियम के अनुसार ही होती है। अब तीसरे नियम की अभियाचना है कि एक ऐसा बल भी होना चाहिए जो हमारे हाथ से पत्थर पर डाले हुए बल का विरोध करे। यदि हम इस बल के बारे मे पूँछे तो सर्व-परिचित उत्तर मिलता है कि हाथ पर पत्थर की प्रतिक्रिया अपकेन्द्र बल द्वारा होती है और यह अपकेन्द्र बल सत्यमेव उस बल के बराबर और प्रतिकूल है जो हमारा हाथ पत्थर पर डालता है। क्या व्यजन का यह प्रकार ग्राह्य है? ऐसा तो नही है कि जिसे हम अपकेन्द्र बल कहते हैं वह पत्थर का केवल अवस्थितित्व मात्र है?"

इस प्रश्न का हम स्पष्टतः नकारात्मक उत्तर देते हैं। वस्तुतः, समी० (3) की हमारी परिभाषा के अनुसार, अपकेन्द्र बल पत्थर के अवस्थितित्व के सर्वसम है। परंतु पत्थर पर, अर्थात् वास्तव मे डोरी पर, लगाये हुए हमारे बल का जो बल विरोध करता है वह डोरी का हमारे हाथ पर कर्षण है। हर्ज और भी कहते हैं कि "हमें इस परिणाम पर आना पड़ता है कि अपकेन्द्र बल का बलो में वर्गीकरण उचित नही है। इस नाम को, सजीव बल के नाम की भाँति, पूर्वकाल से चली आयी हुई परंपरा

मात्र समझना चाहिए; और उपयोगिता के विचार से इस नाम को रखे रहने के कारण का समर्थन करने की अपेक्षा उसे रहने देना ही अधिक सहल है।" इस बारे में हम यह कहेंगे कि नाम 'अपकेन्द्र बल' को ठीक ठहराने का यत्न करने की कोई आवश्यकता नही है, क्योकि अधिकतर व्यापक पद 'अवस्थितित्व बल' की भाँति, वह एक स्पष्ट परिभाषा पर आधारित है।

प्रसगवश, बल की धारणा मे ठीक इसी प्रकार की अभिकथित अस्पष्टता ने ही हर्ज़ द्वारा, एक चित्ताकर्षक परन्तु किंचित् असफल प्रयत्न में, बल की भावना से नितात विहीन एक यांत्रिकी की रचना करवा डाली (मिलाइए §१, पृ० ५)

अब हम गणितज्ञ, दार्शनिक, खगोलविद्यावेत्ता, भौतिकीज्ञ, विश्व कोपरचयिता "त्रैत द दिनामीक्" के लेखक दालाँबेर के उत्कर्ष कार्य पर आते हैं।

यदि किसी भी यांत्रिक निकाय के एक अंश, सहतिबिंदु k, पर एक अनुप्रयुक्त बल $\mathbf{F}$ आरोपित हो तो समीकरण (2) को निम्नलिखित में परिवर्तित करना होगा

$$\mathbf{F}_k^* + \mathbf{F}_k + \sum_i \mathbf{R}_{ik} = 0 \tag{4}$$

यहाँ $\mathbf{R}_{ik}$ वह प्रतिक्रिया है जो k से संबंधित संहति-बिंदु i, बिंदु k पर करता है। पृष्ठ ७० की हमारी व्यापक स्वीकृति के अनुसार ये $\mathbf{R}_{ik}$, सब मिलाकर, (यहाँ आतरिक) नियत्रणो से सगत किसी भी आभासी विस्थापन में, कुछ कर्म नही करते। परिणाम यह हुआ कि समी० $\mathbf{F}^* + \mathbf{F}$ के योग का आभासी कर्म भी शून्य है,

$$\sum_k (\mathbf{F}_k^* + \mathbf{F}_k) \cdot \delta s_k = 0 \tag{5}$$

अब आभासी कर्म के सिद्धांत को मन में रखते हुए, हम समीकरण (5) को यह कह कर व्यक्त कर सकते हैं कि, किसी निकाय के अवस्थितित्व बलवृन्द उस पर अनुप्रयुक्त बलों के साथ साम्यावस्था में होते हैं। प्रतिक्रियाओं के ज्ञान की आवश्यकता नही होती।

यह है दालाँबेर का सिद्धांत, अपने सरलतम और स्वाभाविकतम रूप में। सिद्धांत का एक अन्य मनोरंजक सूत्रीकरण प्राप्त करने के लिए निम्नलिखित राशि को देखिए—

$$\mathbf{F}_k + \mathbf{F}_k^* = \mathbf{F}_k - \dot{\mathbf{p}}_k$$

वल F_k का यह वह भाग है जो विंदु k की गति में परिवर्तित नही किया जा सकता। इस भाग को "खोया हुआ वल" कह सकते है और इस लिए (5) की फिर से रचना कर सकते है, यह कह कर कि किसी निकाय के खोये हुए बलसमूह साम्यावस्था में होते हैं।

दालांबेर सिद्धांत का एक सूत्रीकरण, जिसका व्यवहार बहुतायत से पाठ्य पुस्तकों में होता है, कार्तीय निर्देशांको मे उसका व्यजन है। इसमे F_k के घटकों को X_k, Y_k, Z_k और δS_k के घटकों को δx_k, δy_k, δz_k कहते हैं। हम यह शर्त भी लगा देते है कि जो संहतियाँ m_k आती हैं वे अपरिणम्य है। तो किसी ऐसे निकाय के लिए जिसमें n सहति विंदु हो, हम (5) के स्थान पर लिख सकते है—

$$(6)\ \sum_{k=1}^{n}\{(X_k-m_k\ddot{x}_k)\delta x_k+(Y_k-m_k\ddot{y}_k)\ \delta y_k+(Z_k-m_k\ddot{z}_k)\delta z_k\}=0.$$

यहाँ इस बात की आवश्यकता है कि δx_k, δy_k, δz_k निकाय के नियंत्रणों से सगत हो। तो आइए तुरंत ही अपूर्णपदीय नियत्रणों की व्यापक स्थिति पर विचार करें। वहाँ (7.4) के प्रकार के संबंध होते हैं। यदि (7.4) के व्यापक निर्देशांक q ओं को कार्तीय निर्देशांकों द्वारा प्रतिस्थापित करें तो वे संबंध निम्नलिखित हो जाते हैं।

$$(6a)\ \sum_{\mu=1}^{n}[F_\mu(x_1\ldots z_n)\delta x_\mu+G_\mu(x_1\ldots z_n)\delta y_\mu +H_\mu(x_1\ldots z_n)\delta z_\mu]=0.$$

यदि अत्यणु गति के लिए स्वतंत्रता-संख्याओं की सख्या f हो तो dx, dy, dz के लिए इस प्रकार के $3n-f$ सबध होंगे (देखिए पृ० ६७)। पूर्णपदीय नियत्रणों की स्थिति में ये F_μ, G_μ, H_μ होंगे, x_μ, y_μ, Z_μ के प्रति किसी एक ही फलन के अवकलज।

पाठक को यहाँ बहुत सावधानतापूर्वक स्मरण करा देना आवश्यक है कि उसे भद्दे सूत्रीकरणो (6) और (6a) मे दालांबेर सिद्धात की सच्ची अंतर्वस्तु[1] को ढूंढना नही चाहिए। समीकरण (5) या उसी के तुल्य, साम्यावस्था की अभ्युक्ति,

1. True content

न केवल अधिक तत्परता पूर्वक उपयोगी है वरन्, अपने अचर रूप के कारण, अधिक स्वाभाविक भी है।

§ ११. प्रति सरल प्रश्नों में दालांबेर-सिद्धांत का अनुप्रयोग

(१) किसी स्थिर अक्ष के प्रति दृढ़ पिंड का घूर्णन

यहाँ केवल एक स्वतंत्रता-संख्या, अर्थात् घूर्णन के कोण ϕ से काम है। तो कोणीय वेग होगा $\dot{\phi}=$ समझिए ω; और कोणीय त्वरण होगा, $\ddot{\phi}=\dot{\omega}$, इस समय हमें अक्ष के धुराधारों के संबंध में विचार नहीं करना है।

हम मान लेंगे कि कोई भी बल समूह **F** पिंड पर आरोपित हैं। प्रकरण १ के समीकरण (7) के अनुसार उनका आभासी कर्म घूर्णन अक्ष के प्रति उनके घूर्णों के योग द्वारा दिया जायगा, अर्थात्

$$\delta W=\mathbf{L}.\delta\phi=L_a\delta\phi, \tag{1}$$

जहाँ L_a बल-समूह **F** के घूर्णन-अक्ष a के प्रति घूर्णों का योग है। अवस्थितित्व बलसमूह $\mathbf{F}^*$ कृत कर्म भी हम जानना चाहते हैं। इसके लिए पिंड को संहति-अल्पांशों dm में उपविभाजित करते हैं। समीकरण (10.3) के विचार से dm पर आरोपित अवस्थितित्व बल का पथ के लंबवत् निर्देशित घटक अपकेन्द्र बल $dm\,\frac{v^2}{r}=dm\,\omega v$ होगा। (वृत्तीय गति में वक्रता-त्रिज्या ρ, स्वभावतः, घूर्णन-अक्ष से दूरी r पर होगी ; अतएव प्रत्येक संहति-अल्पांश का वेग $v, r\omega$ हो गया और उसका पथ की ओर का त्वरण $\dot{v}=r\dot{\omega}$.) परंतु अपकेन्द्र बल कुछ भी कर्म नहीं करता। दूसरी ओर, पथ की दिशा मे अवस्थितित्व बल होगा

$$-dm\dot{v}=-dmr\dot{\omega}$$

अतएव अवस्थितित्व बलों का संपूर्ण आभासी कर्म होगा

$$\sum(-dm\dot{v})\delta s=\sum-dmr\dot{\omega}rd\phi \tag{2}$$

$$=-\delta\phi\dot{\omega}\int r^2dm=-\delta\phi\dot{\omega}I,$$

जहाँ

$$I=\int r^2dm \tag{3}$$

पिंड का अवस्थितित्व-घूर्ण[1] है। अवस्थितित्व-घूर्ण I की विमितियाँ हैं ML^2; अतएव, निरपेक्ष पद्धति में, $g.cm^2$ तथा गुरुत्वाकर्षणीय पद्धति में, $g\ cm\ Sec^2$ होगी।

इन (1) और (2) के कारण दालांबेर-सिद्धांत का रूप निम्नलिखित हो जाता है—

$$\delta\phi(L_a - I\dot{\omega}) = 0$$

इस प्रकार घूर्णन-गति के आधारिक समीकरण के लिए हमें प्राप्त होता है—

(4) $$I\dot{\omega} = L_a.$$

इस समीकरण को, एक स्वतत्रता-सख्या वाली, कहिए कि x-दिशा मे होने वाली, स्थानांतरणीय गति के आधारिक समीकरण

$$m\ddot{x} = F_x$$

से तुलना करे तो देखते है कि घूर्णन गति मे m का स्थान I ले लेता है।

गतिज ऊर्जा के व्यंजन मे भी यही प्रतिस्थापन होता है। दृढ पिंड के घूर्णन की गतिज ऊर्जा होती है—

(5) $$E_{kin}\,(\text{ऊ}_{\text{गति}}) = T = \int \frac{dm}{2} v^2 = \int \frac{dm}{2} r^2 \omega^2 = \frac{\omega^2}{2} \int r^2 dm = \frac{\omega^2}{2} I$$

और इसलिए वह कण यात्रिकी[2] के निम्नलिखित प्रारभिक व्यंजन के अनुरूप है

(5a) $$E_{kin}\,(\text{ऊ}_{\text{गति}}) = T = \frac{\dot{x}^2}{2} m$$

स्थिर अक्ष की स्थिति में दृढ़ पिंड का I समय-स्वतत्र है; परंतु नम्य संधियों वाली यंत्र-रचनाओ तथा जीवित प्राणियों में वह लाक्षणिकतया परिवर्त्ती है। प्रकरण १३ में देखेगे कि सब खेल-कूद के काम, विशेषत: उपकरणीय जिम्नैस्टिक, मानव शरीर की अपने अवस्थिति घूर्ण मे परिवर्त्तन कर लेने की योग्यता पर मुख्यतया निर्भर करते है।

किसी दृढ़ पिंड का अवस्थितित्व घूर्णन किस प्रकार घूर्णन अक्ष के स्थान पर निर्भर करता है, इस बात का अनुसंधान § २२ मे किया जावेगा।

1. Moment of inertia 2. Particle mechanics

अंत में गति के आधारिक समीकरण से गतिज ऊर्जा के संबंध की बात पर विचार करेंगे। ठीक वैसे ही जैसे कि अचर संहति की स्थिति में हम गति समीकरण, $m\ddot{x}=F_x$, को कणयांत्रिकी के गतिज ऊर्जा के नियम से प्राप्त करते हैं, अर्थात्

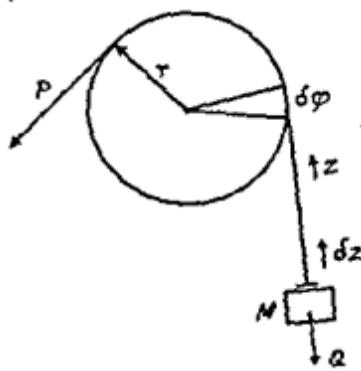
$$\frac{dT}{dt}=\frac{dW}{dt}, \text{ जहाँ } dW=F_x \cdot dx,$$

वैसे ही, अचर I की स्थिति में, हम घूर्णन के लिए समीकरण (4) प्राप्त करते हैं, केवल (5) के निम्नलिखित मे व्यवहार करने की आवश्यकता है—

$$\frac{dT}{dt}=\frac{dW}{dt}, \text{ जहाँ } dW=L_o d\phi \text{ (समी० (9.7)}$$

घूर्णनयुक्त पिंड के संवेग-घूर्ण अर्थात् कोणीय संवेग के पदसमूह में भी अवस्तितित्व-घूर्ण आता है। यदि पिंड के कोणीय सवेग को M समझ लें तो प्रत्यक्षतया निम्नलिखित प्राप्त होता है—

$$M=\sum dm\ vr=\omega \sum dm\ r^2=\omega I. \tag{6}$$

(२) घूर्णनात्मक तथा स्थानान्तरात्मक गतियों का युग्मन

आ० १३—स्थानातरात्मक तथा घूर्णनात्मक गतियों का युग्मन (उत्थानक, कोयले का टोकरा)।

किसी खान में कोयले के टोकरे या या किसी उत्थान-यंत्र[1] का ध्यान करिए। उत्थानक को ले जाने वाला केवल[2] (सन या तारों का मोटा मजबूत रस्सा या मोटे वेष्टन युक्त तार) एक ढोल पर लपेटा होता है और एक बल P द्वारा चलाया जाता है। ढोल की त्रिज्या समझिए कि r है। जो दो आभासी विस्थापन होते हैं (दे० आकृति १३) उनमें निम्नलिखित संबंध है

$$\delta z=r\delta\phi. \tag{7}$$

दालांबेर-सिद्धांत की अभियाचना है कि

$$(-Q-M\ddot{z})\delta z+(rP-I\dot{\omega})\delta\phi=0. \tag{7a}$$

1. Elevator 2. Cable

ढोल की संहति को ढोल की परिमा पर ही, यदि ऐसा कह सकें, "लघुकृत"[1] करना सुविधाजनक है, अर्थात् I के स्थान पर एक "लघुकृत संहति" को समझ लेना। लघुकृत संहति की परिभाषा है

(८) $$I = M_{red} r^2$$

(अवस्थितित्व घूर्ण=लघुकृत संहति×त्रिज्या का वर्ग फल)

समी० (7) के प्रभाव से (7a) का अब निम्नलिखित रूप में पुनर्लेखन कर सकते हैं—

$$(P - Q - M\dot{z} - M_{red} r\dot{\omega})\delta z = 0$$

कारण कि $r\omega = \dot{z}$, अतएव $r\dot{\omega} = \ddot{z}$ तो अब निम्नलिखित गति-समीकरण प्राप्त होता है

(९) $$(M + M_{red})\ddot{z} = P - Q.$$

अतएव ढोल का अवस्थितित्व उत्थानक की संहति के साथ एक पद, M_{red} का योग कर देता है।

(३) नत तल पर लुढ़कता हुआ गोला

यहाँ फिर ढाल पर नीचे की ओर जाने की स्थानांतरण-गति और गोले के केन्द्र से जाती हुई (आ० १४ में कागज के तल से लंबवत्, एक अक्ष के चारों ओर की) घूर्णन गति, इन दो गतियों के युग्मन से काम पड़ता है। इस स्थिति में गुरुत्व का प्रभावशील घटक होगा—

$$P = Mg \sin \alpha.$$

रेखाचित्र में प्रदर्शित स्थैतिक घर्षण F दालांबेर-सिद्धांत में नहीं आता, क्योंकि वह स्पर्श बिंदु पर ही आरोपित है और यह बिंदु क्षणमात्र के लिए स्थिर रहता है। विशुद्ध लुठन (लुढ़कने) की गति का प्रतिबंध है—

(10) $\dot{z} = r\omega$, या, आभासी गति के लिए लिखित, $\delta z = r\delta\phi$.

दालांबेर के अनुसार अब यह आवश्यक है कि

(11) $$\delta z(Mg \sin\alpha - M\dot{z}) + \delta\phi(-I\dot{\omega}) = 0$$

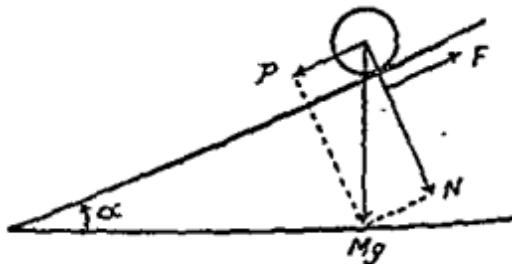
अवस्थितित्व घूर्ण I का ज्ञात करना समाकलन गणित[2] का प्रश्न है। बिना प्रमाण दिये यहाँ हम कह देंगे कि a, b और c अर्धाक्षों वाले दीर्घवृत्तज[3]

1. Reduced 2. Integral calculus चलराशि कलन 3. Ellipsoid,

का अवस्थितित्व-घूर्ण, c अक्ष के प्रति (और a तथा b के लंबवत्) निम्नलिखित होता है—

$$I_c = \frac{M}{5}(a^2+b^2). \tag{12}$$

तो इससे गोल का अवस्थितित्व घूर्ण निकला

$$I = \frac{2}{5} Mr^2 \tag{12a}$$

आकृति १४—नत समतल पर गोला स्थैतिक घर्षण F विशुद्ध लुण्ठन कराता है, परतु दालाँबेर सिद्धान्त में नहीं आता।

जैसे कि (8) में, अब r दूरी पर लघुकृत संहति का प्रवेश कराते हैं, जो (12a) के कारण निम्नलिखित हो जाती है—

$$M_{red} = \frac{2}{5} M \tag{12b}$$

यदि इसे (11) में परिस्थापित करे और (10) को भी विचार में लें तो हम सहज ही प्राप्त करते हैं—

$$\ddot{z} = \frac{5}{7} g \sin \alpha. \tag{13}$$

गुणनखंड $\frac{5}{7}$ बतलाता है कि गोले के कोणीय त्वरण और तद्गत वर्णित अवस्थितित्व के कारण नत-समतल पर "पतन" में विलंब कैसे हो जाता है।

समीकरण (3.13) में निकला था कि स्वतन्त्र पतन में अंतिम वेग

[illegible]

होता है; अब ऊपर दिये हुए (11) में [illegible]

[illegible]

निकलता है। [illegible]

[illegible] (उपगाई) [illegible]

[illegible] है।

(४) निर्दिष्ट प्रक्षेपपथ पर गति-नियन्त्रित नहीं

नियन्त्रित पथ पर भी विस्थापन हो सकता है अतः [illegible] भी होगी। यदि गति [illegible] इस विस्थापन के लिए डालेम्बेर सिद्धान्त बताता है कि

$$\delta s\,(\overset{\circ}{F}_s + F_s) = 0.$$

अर्थात् (5.8) के अनुसार,

(14) $$m\dot{v}_s = m\,|\,\dot{v}\,| = F_s.$$

अनुप्रयुक्त बल **F** की दिशा कोई भी हो सकती है। इस बल **F** के नियमित पथ के लम्बवत् घटक F_n और प्रतिक्रिया R_n के योग में अभिकेन्द्र बल C का सम्पादक मिलना चाहिए, अर्थात्, F_n और R_n, दोनों को धनात्मक दिशा अभिकेन्द्र मानते हुए,

(15) $$R_n + F_n = C = m\frac{v^2}{\rho}.$$

व्यावहारतया, विशेषकर यदि नियन्त्रण पटरियों जैसी किसी द्रव्यात्मक[1] युक्ति द्वारा उपलब्ध हुआ हो तो, हमें एक स्पर्श रेखीय घटक R_s अर्थात् घर्षण, को भी विचार में लेना पड़ता है। यदि घर्षण को δs की ऋणात्मक दिशा में धनात्मक गिनें तो समी० (14) वर्धित होकर निम्नलिखित हो जाता है

(16) $$m\dot{v} = F_s - R_s.$$

1. Material device

R_n तो समी० (15) द्वारा निर्धारित हो जाता है, परंतु, दूसरी ओर, (16) का R_s "स्थैतिकीयतया तथा गतिकीयतया अनिर्धारित" रहता है और केवल प्रयोग द्वारा ही निर्धारित किया जा सकता है। प्रकरण १४ में बतावेंगे कि इस प्रकार के प्रयोग कैसे किये जाते हैं।

§ १२. प्रथम प्रकार के लाग्रांज-समीकरण

विविक्त[1] संहति बिंदुओं $m_1, m_2 \ldots m_n$ के एक निकाय[2] पर विचार कीजिए जो परस्पर निम्नलिखित r पूर्णपदीय प्रतिबंधों द्वारा संबंधित हों।

(1) $$F_1 = 0, F_2 = 0, \ldots\ldots F_r = 0$$

तो यहाँ स्वतंत्रता-संख्याओं की संख्या $f = 3n - r$ होगी। हम कार्तीय निर्देशांको में काम करेंगे और दालांबेर सिद्धांत के (10.6) वाले सूत्रीकरण का उपयोग करेंगे। वहाँ आये हुए भद्दे योगों को अधिकतर सुविधाजनक रीति से लिखने के लिए हम निर्देशांक वृन्द

$$x_1, y_1, z_1 \ldots\ldots; x_n, y_n, z_n$$

को क्रमात् निम्नलिखित प्रकार अंकित करेंगे

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots\ldots x_{3n-1}, x_{3n};$$

और इसी प्रकार बल समूह $X, Y, Z,$ के घटकों का भी अंकन करेंगे। जिस महत्ति का x_k, X_k से संबंध है उसे m_k द्वारा सूचित करेंगे। प्रकट है कि m_k तीन के समूहों में बराबर होंगे। तो समीकरण (10.6) अब हो जाता है—

(2) $$\sum_{k=1}^{3n} (X_k - m_k \ddot{x}_k)\ \delta x_k = 0$$

नियंत्रण (1) के r प्रतिबंधों के प्रभाव से δx_k निम्नलिखित निरोधों के वश में होंगे—

(3) $$\delta F_i = 0,\ i = 1, 2, \ldots r.$$

इनको इस प्रकार भी लिख सकते हैं—

(4) $$\sum_{k=1}^{3n} \frac{\partial F_i}{\partial x_k} \delta x_k = 0,\ i = 1, 2, \ldots\ldots r.$$

इन δF_i ओं में से प्रत्येक को एक स्वेच्छ संख्यात्मक गुणन खंड λ_i (लाग्रांज

1. Discrete 2. System

इनको प्रथम प्रकार के लाग्रांज-समीकरण कहते हैं। स्वभावतः, m_k तीन के समूहों में बराबर होंगे; जैसे कि $m_1=m_2=m_3$, क्योंकि उसी एक संहति बिंदु m_1 के तीन निर्देशांक होते हैं: $x_1=x_1$, $x_2=y_1$, $x_3=z_1$.

अब तक हमने समझ लिया था कि प्रतिबंध (1) पूर्णपदीय[1] हैं। हम सहज ही मान ले सकते हैं कि थोड़े से ही रूपान्तर से ऊपर दिये हुए सब के सब अपूर्णपदीय नियंत्रणों की स्थिति में भी ले जाये जा सकते हैं। अंतर केवल यह होगा कि (4) के $\frac{\partial F_i}{\partial x_k}$ वाले गुणन खंडों को F_{ik} निर्देशांकों के व्यापक फलनों द्वारा प्रतिस्थापित करना पड़ेगा, जोकि किसी फलन के आंशिक अवकलजों[2] के रूप में नहीं लिये जा सकते। यदि यह प्रतिस्थापन समीकरणों (9) में करें तो तुरंत ही अपूर्णपदीय निकायों के लिए लाग्रांज के प्रथम प्रकार के समीकरण प्राप्त हो जाते हैं—

$$m_k\ddot{x}_k = X_k + \sum_{i=1}^{i=r} \lambda_i F_{ik} \qquad (9a)$$

आइए, यह मान कर कि प्रतिबंध (1) समय के साथ बदलते हैं, एक अधिकतर मनोरंजक व्यापकीकरण करें। तो अब ये Fi वृन्द न केवल उन x_k ओं पर वरन् समय (t) पर भी स्पष्टतया निर्भर करेंगे। अब हमें यह अभियाचना करनी पड़ेगी कि (4) के बनाने में समय अचर रखा जाय। यह शर्त न केवल अनुज्ञेय है किंतु सत्याभासक भी है क्योंकि हमारे आभासी विस्थापन का समय के बीतने से कुछ संबंध नहीं है। यह अभियाचना (9) की व्युत्पत्ति पर कोई प्रभाव नहीं डालती। परंतु ऊर्जा-समीकरण के रूप के संबंध में एक महत्त्वपूर्ण परिणाम प्राप्त होता है।

यदि इस समीकरण को समय-निरपेक्ष नियत्रणों की स्थिति में व्युत्पन्न करना चाहें तो इस प्रक्रम का अनुसरण करना पड़ता है कि (9) को dx_k से गुणा कर kओं का योग कर देते हैं तो बायीं ओर प्राप्त होता है,

$$dt\sum m_k\dot{x}_k\,\ddot{x}_k = dt\frac{d}{dt}\sum\frac{m_k}{2}\dot{x}^2_k = dt\,\frac{dT}{dt} = dT. \qquad (9b)$$

दाहिने अंग का प्रथम पद अनुप्रयुक्त बलों द्वारा समय dt में किया हुआ कर्म प्रदान करता है—

1. Holonomic 2. Partial derivatives

(9c) $$\sum dx_k X_k = dW$$

दाहिनी ओर का द्वितीय पद शून्य हो जाता है। क्योंकि

(9d) $$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \sum_{k=1}^{3n} \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \cdot dx_k = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \, dF_i = 0,$$

इसलिए कि Fi केवल x_k पर निर्भर करते हैं, अतएव $F_i=0$ सूचित करता है कि

(9e) $$dF_i = \sum \frac{\partial F_i}{\partial x_k} dx_k = 0.$$

सो अब (9b,c) से प्राप्त करते हैं

(10) $$dT = dW.$$

यदि Fi भी समय (t) पर निर्भर करे तो ऐसा नहीं होता। तब (9d,s) के 0 के स्थान पर रखना होगा, अर्थात्

$$-\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \frac{\partial F_i}{\partial t} dt \text{ और } -\frac{\partial F_i}{\partial t} dt$$

तो समय-निर्भर सापेक्ष नियंत्रणों के लिए ऊर्जा-समीकरण होगा—

(10a) $$dT = dW - dt \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \frac{\partial F_i}{\partial t}.$$

इसका तात्पर्य यह हुआ कि समय-निर्भर नियंत्रण निकाय पर कर्म करते हैं।

इस सिद्धांत को अधिकतर साकार बनाने के लिए टेनिस की थापी (रैकेट) का उदाहरण लीजिए। यदि थापी स्थिर रखी जाय तो वह गेंद को बिना ऊर्जा-परिवर्तन के परावर्तित कर देती है। इसके बजाय यदि वह पीछे को दब जाय या आगे को गेंद की ओर झूल जाय तो वह गेंद से ऊर्जा लेती है या उसको देती है।

अपूर्णपदीय निकायों में, (9a) में हुई F_{ik} की t पर स्पष्ट निर्भरता, (10) के रूप में ऊर्जा समीकरण से संगत होगी। परन्तु यदि अपूर्णपदीय प्रतिबंध का रूप निम्नलिखित होता

$$\sum F_{ik} \, dx_k + G_i \, dt = 0,$$

तो (7.4) के स्थान पर G_i से संबंधित अंगों को (10) से जोड़ना पड़ता और तब (10) का रूप (10a) के अनुरूप हो जाता, अर्थात्

$$(10b) \qquad dT = dW - dt \sum_{i=1}^{r} \lambda_i G_i.$$

अगले अध्याय में दिये गोलीय लोलक के दृष्टांत से हमें मालूम होगा कि λ ओं को, पूर्णपदीय किंवा अपूर्णपदीय प्रतिबंधों द्वारा डाले हुए नियंत्रणों के विरुद्ध निकाय की प्रतिक्रियाएँ कौनसी कैसे होती हैं। वहाँ हम यह भी देखेंगे कि किसी प्रकार भी चुने हुए r लाग्राँज-समीकरणों द्वारा λ ओं का निर्धारण नहीं किया जा सकता, यद्यपि इन समीकरणों की व्युत्पत्ति के लिए जो बातें मान ली गयी थीं वे सब अनुज्ञेय थी। इसके स्थान पर वहाँ λ ओं के निर्धारण के लिए सारे के सारे $3n$ लाग्राँज-समीकरण लेने पड़ेंगे। इस बात का महत्त्व समझ लेना चाहिए कि लाग्राँज गुणकों की रीति न केवल प्रथम प्रकार के लाग्राँज समीकरणों में ही किंतु (देखिए अध्याय छठा, प्रकरण ३४) π अधिकतर व्यापक समीकरणों में भी महत्त्वशाली भाग लेती है। यांत्रिकी में उनके उपयोग के अतिरिक्त, महत्तमों और अल्पतमों के प्रारंभिक सिद्धात में भी, लाग्राँज गुणकों का साक्षात्कार करना पड़ता है।

§ १३. संवेग के तथा कोणीय संवेग के समीकरण

इन समीकरणों को विविक्त सहति-बिंदुओं के एक ऐसे निकाय के लिए व्युत्पन्न करेंगे जिसका कि आकाश में, समग्रतः, स्थानांतरण तथा घूर्णन किया जा सकता हो। परंतु एक सीमांत प्रक्रिया द्वारा वे, वैसी ही भली भाँति, किसी स्वतंत्रतया गतिशील दृढ़ पिंड के लिए या किसी भी ऐसे यांत्रिक निकाय के लिए अनुप्रयुक्त किये जा सकते हैं जिसकी गति किन्ही बाह्य नियंत्रणों द्वारा निरोधित न हो।

आरोपित बलों को हम बाह्य और आंतरिक बलसमूहों में विभाजित करते हैं। यह वर्गीकरण बलों की उत्पत्ति के बारे में कुछ नही कहता और इसलिए पृष्ठ ७२ के अनुप्रयुक्त तथा प्रतिक्रिया बलों वाले वर्गीकरण से किसी भाँति सर्वसम नहीं है। प्रस्तुत भेद की केवलमात्र कसौटी यह है कि निकाय के भीतर ही भीतर क्रिया और प्रतिक्रिया का नियम संतुष्ट होता है या नहीं। प्रथम स्थिति में कहते है कि बलसमूह आंतरिक है; दूसरे में, बाह्य। उदाहरणतः, सौर परिवार के आंतरिक बल अनु-

प्रयुक्त बल-समूह हैं क्योंकि वे गुरुत्वाकर्षणात्मक हैं, परन्तु जो बाह्य बल रेलगाड़ी को चलाता है, वह (जैसा कि प्रकरण १४–२ में देखेंगे) प्रतिक्रियाबल है, अर्थात् घूमते हुए पहियों पर स्थैतिक घर्षण।

बिंदु k पर आरोपित बाह्य बल को $\mathbf{F}_k$ कहेंगे। आंतरिक बल इस बात को याद दिलाने के लिए $\mathbf{F}_{ik}$ कहे जावेंगे कि वे निकाय के भीतर दो बिंदुओं के बीच आरोपित होते हैं और निकाय के भीतर ही न्यूटन के तृतीय नियम

$$(1) \qquad \mathbf{F}_{ik} = -\mathbf{F}_{ki}$$

का पालन करते हैं।

(१) संवेग का समीकरण

अब (10.5) के रूप में दालांबेर सिद्धांत का उपयोग कीजिए। हम $\mathbf{F}_k$ के स्थान पर $\mathbf{F}_k + \sum\limits_i \mathbf{F}_{ik}$ तथा परिभाषा के अनुसार $\mathbf{F}_k^*$ के स्थान पर $-\dot{\mathbf{p}}_k$ लिखेंगे और सब $\delta \mathbf{s}_k$ ओं को परस्पर बराबर कर देंगे। अतएव निकाय के सभी संहति विंदुओं को एक जैसा आभासी विस्थापन मिलेगा। यदि योग में सभी i और k ले लें तो (1) के कारण $(\mathbf{F}_{ik})$ निकल जाते हैं, और केवल निम्नलिखित रह जाता है—

$$(2) \qquad \delta \mathbf{s}.\left(\sum_k \mathbf{F}_k - \sum_k \dot{\mathbf{p}}_k\right) = 0,$$

योग में सभी k ओं का लेना एक ऊपरी लकीर द्वारा सूचित करेंगे। तो (2) से परिणाम निकलता है कि

$$(3) \qquad \overline{\dot{\mathbf{p}}} = \overline{\mathbf{F}}.$$

$\overline{\mathbf{p}}$ निकाय का सारा संवेग है जो कि वयक्तिक सवेगों के सदिश योग के बराबर है। हम संहति-केंद्र-वेग $\mathbf{V}$ की परिभाषा यह करते हैं कि

$$M\mathbf{V} = \overline{m\mathbf{v}} = \overline{\mathbf{p}},\ M = \overline{m},$$

और (3) के स्थान पर प्राप्त करते हैं—

$$(3a) \qquad M\dot{\mathbf{V}} = \overline{\mathbf{F}}$$

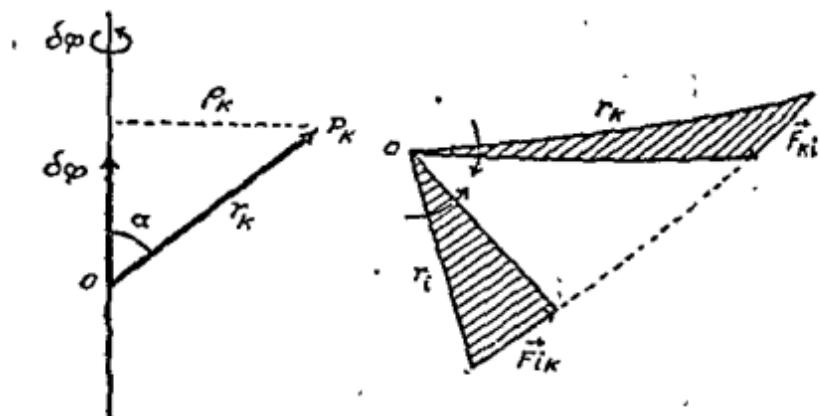
अब एक कोई भी स्वेच्छ, पर स्थिर अभिदेश बिन्दु O चुनते हैं। निकाय के बिन्दुओं की O से दूरी $\mathbf{r}_k$ नापते हैं; और संहति केन्द्र की O से दूरी $\mathbf{R}$ निम्नलिखित समीकरण द्वारा परिभाषित करते हैं:

$$(3b) \qquad M\mathbf{R} = \overline{m\mathbf{r}}.$$

समीकरणों ($3a,b$) की अंतर्वस्तु का सार यह है कि, स्वतंत्रतया गतिशील यांत्रिक निकाय के संहति-केन्द्र की गति एक ऐसे एकाकी संहति बिन्दु की भांति होती है जिसकी संहति M निकाय की सारी संहति के बराबर है और जहां निकाय पर आरोपित सब बाह्य बलों का परिणामी $\mathbf{F}$ आरोपित होता है।

(२) कोणीय संवेग का समीकरण

कल्पना कीजिए कि निकाय को बिंदु O से जाते हुए किसी भी अक्ष के प्रति हम एक आभासी घूर्णन $\delta\phi$ देते हैं। तो निकाय के विभिन्न संहति-बिंदुओं m_k ओं के विस्थापन $\delta \mathbf{s}_k$ असम होंगे; क्योंकि

$$\delta \mathbf{s}_k = \delta\phi \times \mathbf{r}_k \tag{4}$$

आकृति १५—आभासी घूर्णन $\delta\phi$ कारित आभासी विस्थापन δs

आकृति १६—आंतरिक बलों के पूर्ण जोड़ों में कट जाते हैं।

इसके प्रमाण के लिए आकृति १५ देखिए। यहाँ $\delta\phi$ को घूर्णन-अक्ष पर एक सदिश की भांति और, साथ-ही-साथ, दक्षिणावर्त्ती पेच के कायदे से सहमत होते हुए, इस अक्ष के चारों ओर एक वक्र बाण की भांति भी खींचा गया है। सदिश के गुणनफल की परिभाषा से सदिश $\delta \mathbf{s}_k$ का परिमाण δs_k निम्नलिखित होगा—

$$\delta s_k = \delta\phi / \mathbf{r}_k / \sin\alpha = \delta\phi\rho_k,$$

जैसा कि प्रस्तुत घूर्णन के लिए होना चाहिए। इसी प्रकार δs_k की दिशा और भाव (4) द्वारा ठीक-ठीक दिये जाते हैं। $\delta \mathbf{s}_k$ रेखाचित्र से हटकर दिशा में कागज की ओर होगा।

यदि (4) का (10.5) मे उपयोग करे और F^* तथा F को उपप्रकरण (१) की भाँति विस्थापित करे, तो हम तुरत प्राप्त करते है—

(5) $$\sum_k\{F_k+\sum_i F_{ik}-p_k).(\delta\phi\times r_k)\}=0$$

तदुपरात हम प्रारभिक सदिश बीजगणित के निम्नलिखित कायदे का उपयोग करते है—

(6) $$A.\ B\times C=B.\ C\times A=C.\ A\times B$$

जो कहता है कि किन्ही तीन सदिशो A, B, C, द्वारा निर्मित समातरफलकी[1] का आयतन उसके तीन सलग्न किनारों के "नामो" के चक्रीय क्रमचय[2] के क्रम पर नही निर्भर करता।

अतएव (5) के स्थान पर लिख सकते है—

(7) $$\delta\phi.\{\sum_k(\mathbf{r}_k\times\mathbf{F}_k)+\sum_i\sum_k(\mathbf{r}_k\times\mathbf{F}_{ik})-\sum_k(\mathbf{r}_k\times\dot{\mathbf{P}}_k)\}=0.$$

इस प्रकार $\delta\phi$ और $\mathbf{r}$ के बीच का सबध तोड़ दिया जाता है, ताकि, $\delta\phi$ कुछ भी क्यो न हो, मध्यस्थ कोष्टकों {} मे जो पद है वह स्वयं शून्य हो जाय। इस पद को अधिकतर सरलतया लिखने के लिए निम्नलिखित सकेतन का उपयोग करते है—

(7a) $$\mathbf{L}_k=\mathbf{r}_k\times\mathbf{F}_k \text{ जैसे कि (5.12) में; } \bar{\mathbf{L}}=\sum\mathbf{L}_k;$$

तथा

(7b) $$\mathbf{M}_k=\mathbf{r}_k\times\mathbf{P}_k,\quad \mathbf{r}_k\times\dot{\mathbf{P}}_k=\frac{d}{dt}(\mathbf{r}_k\times\mathbf{P}_k)=\dot{\mathbf{M}}_k \text{ जैसे कि}$$

एव (5.14) में,

(7c) $$\overline{\mathbf{M}}=\sum\mathbf{M}_k,\ \dot{\overline{\mathbf{M}}}=\sum\dot{\mathbf{M}}_k.$$

अतएव $\mathbf{L}$ है सर्वसामान्य अभिदेशविंदु O के प्रति सारे बाह्य बलों के घूर्णो का योग सदिश; और $\overline{\mathbf{M}}$ है उसी अभिदेश विंदु के प्रति निकाय के सब सहति विंदुओं के कोणीय संवेगों का सदिश योग या, अधिकतर संक्षेपतया, O के प्रति निकाय का संपूर्ण कोणीय वेग।

इसके अतिरिक्त, आकृति १६ की सहायता से हम यह दिखलाते है कि समी० (7) के दोहरे योग में सब पद जोड़ो मे कट जाते है,

1. Parallelopiped 2. Cyclic permutation

अर्थात्

$$(8) \qquad \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_{ik} + \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ki} = 0.$$

हम देखते हैं कि इस व्यंजक[1] में तृतीय नियम, समी० (1), अनिवार्यत. आंतरिक वल की परिभापा की भाँति काम करता है।

समी० (8) से परिणाम निकलता है कि (7) का दोहरा योग शून्य हो जाता है। समी० (7a,b,c) को स्मरण में रखते हुए हम (7) से परिणाम निकालते हैं कि

$$(9) \qquad \dot{\overline{\mathbf{M}}} = \overline{\mathbf{L}}.$$

यह समीकरण (3) का ठीक प्रतिरूप है। वह कहता है कि

निकाय के संपूर्ण कोणीय संवेग के परिवर्तन की समय-चाल, बाह्य वलों के परिणामी घूर्ण के बराबर है,

ठीक वैसे ही जैसे कि समीकरण (3) ने कहा था कि

निकाय के संपूर्ण संवेग के परिवर्तन की समय-चाल सब बाह्य वलों के परिणामी के बराबर होती है।

ये दो नियम क्रमात्, कोणीय संवेग और (रेखीय) संवेग के समीकरण (या सिद्धांत) कहे जावेंगे।

जर्मन साहित्य में पहले समीकरण (9) को क्षेत्रफलों का सिद्धांत[2] कहते थे। इस नाम का प्रारंभ केप्लर समस्या मे हुआ था। वहाँ हमें प्राप्त हुआ था कि किसी एक ग्रह के लिए क्षेत्रफलीय वेग कोणीय सवेग के समानुपाती है और कोणीय संवेग की दिशा ग्रह-कक्षा-तल के लंबवत् है। ग्रहीय बहुपिंड-समस्या में ऐसा नहीं होता। वहाँ उसके स्थान पर निम्नलिखित होता है—

$$(10) \qquad \overline{\mathbf{M}} = \sum 2m_k \frac{d\mathbf{A}_k}{dt},$$

अर्थात् न केवल विभिन्न ग्रह संहतियाँ गुणनखंडों की भाँति आती है अपितु ग्रहों के अपने-अपने वैयक्तिक क्षेत्रफलीय वेगों का योग सदिशात्मकतया करना पड़ता है। इस प्रकार एक संपूर्ण ग्रहपरिवार के लिए जो क्षेत्रफलीय वेग निकलता है वह, जैसा कि सुविदित है, एक निश्चर तल (एक समतल जो M का अभिलंब हो, उन) के

1. Expression 2. Principle of areas

लिए निश्चित होता है। वह निश्चर इसलिए है कि ग्रहपरिवार में बाह्य व: समूह नहीं होते और इसलिए $\overline{L}=0$. तथा, (9) के अनुसार,

$$\overline{M}=\text{नियत}. \tag{10a}$$

व्यापकतया, $\overline{L}=0$ के लिए हम एक विशेष सिद्धांत प्राप्त करते हैं, **कोणीय संवेग के अविनाशित्व का सिद्धांत।** दृढ पिंड जैसे अनन्ततया बहु कणों के निकाय के लिए क्षेत्रफलीय वेग की भावना को मनोदृष्ट करना और भी कठिन, इसलिए कम उपयोगी है। अतएव व्यापक व्यवहार के लिए जर्मन शब्द फ्लाचेनसात्ज (क्षेत्रफलों का सिद्धात) त्याग देना चाहिए।

(३) निर्देशांक विधि से प्राप्त प्रमाण

अब हम अपने सिद्धातो के प्रमाण की एक दूसरी विधि का स्थूल वर्णन करेंगे— कार्तीय निर्देशाको मे विघटित करने की विधि। क्योकि इन निर्देशाकों का उपयोग करना बहु-प्रचलित है और पुरानी पाठ्य-पुस्तकों को इतना अधिक प्रिय है कि हम इस प्रथा को कुछ-कुछ स्वीकार कर लेना चाहते हैं।

हम निम्नलिखित समीकरणों से प्रारंभ करते हैं—

$$m_k\dot{x}_k=X_k+\sum_i X_{ik} \tag{11}$$

$$m_k\dot{y}_k=Y_k+\sum_i Y_{ik}$$

जो सहज मे ही समझ मे आ जाने वाले रूप मे लिखे गये है। इनमे के पहले समीकरण मे $X_{ik}=-X_{ki}$ रखकर, k के लिए योग तुरत ही संवेग के समीकरण का x-घटक प्रदान करता है—

$$\frac{d^2}{dt^2}\sum_k m_k x_k=\sum_k X_k \tag{12}$$

पहले समीकरण को $-y_k$ से, दूसरे को x_k से गुणा कर, गुणनफलों का योग देता है—

$$\sum_k m_k(x_k\dot{y}_k-y_k\dot{x}_k)=\sum_k(x_kY_k-y_kX_k)+\ldots\ldots \tag{13}$$

जो पद.... लिखे नही गये हैं उन सब मे ik और ki ओं को जोड़ों में इकट्ठा कर लेते हैं और इस प्रकार आतरिक वलों, $i\rightarrow k$ तथा $k\rightarrow i$, की दिशा निकल आती है। तव प्राप्त करते हैं—

$$x_kY_{ki}-y_kX_{ki}+x_iY_{ik}-y_iX_{ik}$$

$$=\frac{|F_{ik}|}{r_{ik}}\Big[x_k(y_i-y_k)-y_k(x_i-x_k)+x_i(y_k-y_i)-y_i(x_k-x_i)\Big].$$

सरलीकरण दिखलाता है कि आकृति १६ से सहमत होते हुए यह शून्य के बराबर है। (5.17*a*) की सहायता से (13) का दक्षिणी अंग निम्नलिखित रह जाता है—

$$\sum_k L_{kz}=\overline{L_z}.$$

(5.14*b*) के विचार से बायाँ अंग निम्नलिखित है

$$(13a)\qquad \frac{d}{dt}\sum_k m_k(x_k\dot{y}_k-y_k\dot{x}_k)=\sum_k \dot{M}_{kz}=\dot{\overline{M_z}}$$

तो समीकरण (13) कोणीय सवेग के समीकरण (9) के z-घटक से सर्वसम है।

(४) उदाहरण

रेखीय और कोणीय सवेगो के सिद्धांतों मे एक महान् भेद है जिसका स्पष्टीकरण हम एक ऐसी विशेष स्थिति की सहायता से करेंगे जिसमें निकाय पर कोई बाह्य बल आरोपित ही न हों।

समी० (3*a*) के अनुसार इस स्थिति में संहति-केंद्र का वेग निश्चर रहता है, क्योंकि निकाय में आंतरिक गति के होते हुए भी, गुणनखड के रूप में विद्यमान सारी संहति M नियत रहती है। अतएव यदि संहति-केंद्र प्रारंभ में स्थिर हो तो स्थिर ही रहता है। आंतरिक बलों में यह योग्यता नही होती कि वे संहति-केंद्र को गति प्रदान कर सकें, चाहे कोई नम्य संधियों वाली यंत्र-रचना हो या जीवित शरीर ही हो। अपना संहति-केंद्र चलाने के लिए किसी आधार को धक्का देने की, अतएव बाह्यबल की आवश्यकता होती है।

प्रकट है कि बाह्य बलो की अनुपस्थिति में $\overline{L}=0$; अतएव (9) देता है—

$$(14)\qquad \overline{M}=\text{नियतांक}$$

यदि संवेग-घूर्ण आदि में शून्य हो तो, आंतरिक बल-वृन्द युक्त निकाय के लिए भी, वह शून्य ही रहता है। परंतु इससे यह परिणाम नही निकलता कि निकाय का कोणीय स्थान सदा के लिए वही बना रहेगा। वरन् यह कि यह कोणीय स्थान यथेच्छ, केवल आंतरिक बलवृंद की सहायता से, किसी बाहरी वस्तु को धक्का लगाये बिना ही, बदला जा सकता है।

इसका एक उदाहरण बिल्ली है, जो सदैव अपने पैरो के बल ही गिरने का प्राध कर लेती है। अगले पैरों को उचित प्रकार घुमाकर, साथ ही पिछले पैरों को दूसरी ओर घुमाकर वह ऐसा कर लेती है। पैरिस अकादमी द्वारा १८९४ में प्रकाशित कांत राडयू[1] मे पृष्ठ ७१४ पर मुद्रित, शीघ्र-शीघ्र लिये हुए फोटोओ मे बिल्ली की यह क्रिया चित्रित है।

इस प्रक्रिया की मुख्य-मुख्य बातें, एक आवर्त्तन-स्टूल के प्रयोगों द्वारा देखी जा सकती है। इस स्टूल में एक क्षैतिज मडलक होता है जो कम से कम घर्षण के साथ एक ऊर्ध्वाधर अक्ष के चारो ओर घूम सकता है। प्रयोग का "साधक" मडलक पर वैठाया जाता है। शुरू मे मडलक स्थिर होता है, अतएव

$$\mathbf{M}_0 = 0.$$

वह अपनी दाहिनी भुजा उठाकर सामने लाता है और उसको पीछे की ओर घुमाकर ले जाता है।

इस प्रक्रिया मे "बुहारे हुए क्षेत्रफल" का संतुलन स्टूल के मडलक समेत शरीर के शेष भाग को प्रतिकूल दिशा में घुमाने से करना होगा। ठीक-ठीक शब्दो मे, घुमायी हुई भुजा का सवेग-घूर्ण M_1, धड़ और मडलक मे एक ऐसा सवेगघूर्ण M_2 उत्पन्न कराता है कि—

$$\mathbf{M}_2 = -\mathbf{M}_1.$$

साधक अव अपनी भुजा नीचे कर लेता है। इससे $\mathbf{M}$ में कोई परिवर्त्तन नही होता। अव शरीर प्रारंभ की स्थिति मे हो गया; और सारी प्रक्रिया फिर की जा सकती है। प्रत्येक पुन.करण में वही प्रति-घूर्णन $\mathbf{M}_2$ होता है। इस प्रकार की n पुनरावृत्तियों के वाद साधक लक्ष करता है कि वह अव आदि से प्रतिकूल दिशा में देख रहा है। संहति-केन्द्र के स्थान से भिन्नतः, कोणीय स्थान प्रारभ की विराम अवस्था द्वारा नही निश्चित होता।

साधक के दाहिने हाथ मे एक भारी बोझ थमा कर प्रभाव अधिक किया जा सकता है। वैसा करने से "बुहारा हुआ क्षेत्रफल" एक तरह से, बहुगुणित हो जाता है, जिस कारण प्रति-घूर्णन भी प्रत्यक्षत अधिक हो जाता है।

आइए, दो प्रयोग और करें। साधक स्टूल पर भुजाएँ नीचे किये हुए खडा होता है और उसको एक कोणीय सवेग $\mathbf{M}_0$ देते हैं; अब वह दोनो भुजाएँ (यदि चाहे तो

1. Comptes Rendus

हाथों में भार लिये हुए) एक-एक तरफ उठाता है; तो घूर्णन एकाएक कम हो जाता है। इसके बजाय, स्टूल पर साधक को खड़ा कर, दोनों भुजाएँ इधर-उधर फैलवा कर, मडलक को घुमा देते हैं; अब वह अपनी भुजाएँ नीचे करता है और साधारणतया तिपाई से गिर पड़ता है क्योंकि घूर्णन, विशेषतया यदि भारों का उपयोग किया गया हो, एकाएक बहुत ही बढ़ जाता है।

ऊपर की इन दोनों स्थितियों में

$$M_o = M_1,$$

और इसलिए समी० (11.6) से

$$I_o \omega_o = I_1 \omega_1.$$

परंतु प्रथम स्थिति में

$I_o \leqslant I_1$, और इसलिए, $\omega_1 \leqslant \omega_o$;

और द्वितीय स्थिति में

$I_o \geqslant I_1$, जिस कारण, $\omega_1 \geqslant \omega_o$.

कोणीय संवेग के अविनाशित्व में (अर्थात् एक ही जैसे रहते हुए) अवस्थितित्व-घूर्ण की परिवर्त्तनशीलता का उपयोग खेल-कूद के सभी आश्चर्य-कार्यों में, विशेषत: जिमनैस्टिक के क्षैतिजदड के व्यायामों में, बहुतायत से होता है। उदाहरणत: "फार्वर्ड अपस्विग"[1] पर विचार कीजिए। झूलन प्राप्त करने के आदि कार्य में शरीर फैला हुआ, अवस्थितित्व-घूर्ण बड़ा, और दड के चारों ओर का कोणीय वेग मझोल होता है। जब खिलाड़ी आगे की ओर झूलता है, उच्चतम स्थान पर पहुँचने से जरा पहले, वह अपने पैर सिकोड़ लेता है, जिससे दंड के प्रति उसका अवस्थितित्व घूर्ण कम हो जाता है और कोणीय वेग बढ़ जाता है। उसका सहति-केंद्र दड के ऊपर हो जाता है और खिलाड़ी दंड पर सीधा स्थान ग्रहण करता है। ध्यान दीजिए कि दंड को हाथों से पकड़ने की प्रतिक्रियाओ का कोणीय संवेग पर कुछ बहुत विचारणीय प्रभाव नही पड़ता क्योंकि दंड इतना पतला होता है कि प्रतिक्रिया के बलो की उत्तोलक बाहु शून्यप्रायतया छोटी होती है।

"वृत्तों के व्यायाम" (पोछे की ओर के नितंब वृत्त, घुटनो के वृत्त, इत्यादि) में इन्ही सिद्धातों का उपयोग होता है। जिम्नैस्टिक्ट, बरफ पर स्कैटिंग (धारदार "जूते" पर सरकना) और स्कीइग (लकड़ी के विशेप रूप के लंबे एक-एक पटरे

1. Forward upswing, आगे की ओर ऊपरी झुकाव।

को प्रत्येक पैर से बाँधकर बरफ पर गराना), ये एक प्रकार से प्रयोगात्मक और सैद्धांतिक यांत्रिकी के पाठ हैं।

(५) जहाजी इंजनों का संहति-संतुलन

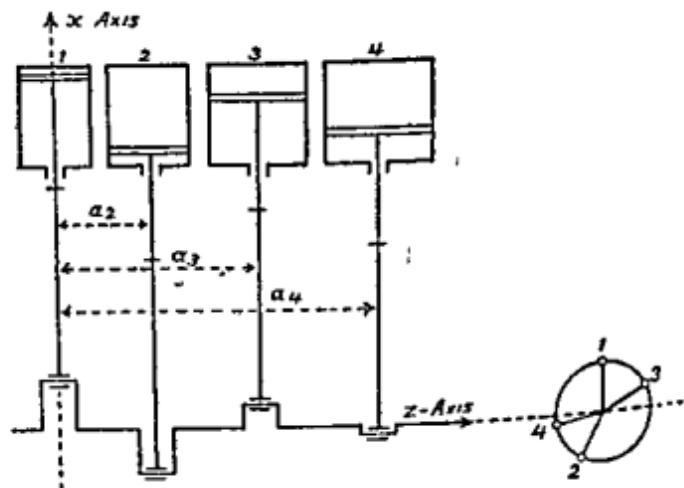
अंत में आइए एक बहुत बड़े उदाहरण पर विचार करें—जहाजी इंजनों की इतस्ततोगामी संहतियों का संतुलन।

पिछली शताब्दी के अंतिम वर्षों में, अपने संक्रमण युग में जिसके परिणाम स्वरूप शीघ्रगामी जहाज बनने लगे, जहाज-निर्माण-उद्योग एक विकट स्थिति में होकर गुजरा। शिल्पिक कारणवश नोदक-ईषा[1] के घूमने की चाल लगभग एक सौ प्रति मिनट की रखनी पड़ती है। पिस्टन इंजनों के अवस्थितित्वीय प्रभाव भी इसी ताल में बदलते हैं और उन्हें जहाज के पिंड में अवशोषित हो जाना होता है। ज्यों-ज्यों जहाज की लंबाई बढ़ायी जाने लगी त्यों-त्यों उसकी "निजी आवृत्ति" कम होती गयी और यह आवृत्ति खतरनाक रूप से अवस्थितित्वीय प्रभावों के ताल के पास आने लगी। यहाँ पर "अनुनाद" शब्द का व्यवहार कर, आइए हम उस विषय की कुछ पूर्वकल्पना कर लें, जिस पर आगामी अध्याय में बहुत कुछ कहा जायगा। इस शब्द का आरंभ ध्वानिकी[2] में हुआ था जहाँ अनुनाद संबंधी घटनाएँ बहुत ही प्रत्यक्ष हैं और जिस संबंध में ही उसका पहले पहल अध्ययन हुआ था।

स्थान की कमी के कारण शीघ्रगामी स्टीमरों के भाप-सिलिंडरों को ऊर्ध्वाधर रखना पड़ता है। विषय को विशिष्ट करने के लिए हम मान लेंगे कि पिस्टन कुल जमा चार हैं (आकृति १७) और ये सब एक ही ईषा में संबंधित हैं जो जहाज में दैर्घ्यवत्, आकृति में z-अक्ष की दिशा में, व्यवस्थित है। हम देखेंगे कि यदि पिस्टनों की संख्या इससे कम हुई तो प्रथम कोटि तक भी संहति-संतुलन असंभव होगा। यहाँ हम प्रथम कोटि तक ही काम करेंगे। आकृति १७ के निर्देशाक-निर्वाचन में अवस्थितित्व बल समूह x-अक्ष की दिशा में निर्देशित हैं और केवल y-अक्ष के प्रति ही उनके घूर्ण हो सकते हैं। अवस्थितित्वीय प्रभावों का, जहाज के पिंड में उत्पादित प्रतिक्रियाओं द्वारा, अवशोषण हो जाना चाहिए, जिससे वे तालबद्ध प्रतिकंपन उत्पन्न कराते हैं।

यह उन प्रतिमानों में बड़ी सुंदरता से चित्रित है जिन्हें कौंसल आटो शिलक[3] ने अपनी ईजाद के समय म्यूनिख के जर्मन म्यूजियम (अजायबघर) को दान किया था।

1. Propeller shaft 2. Acoustics 3. Consul Otto Schlick

इसमें जहाज का पेटा एक लंबे शहतीर द्वारा प्रतिरूपित है। सर्पिल कमानियों द्वारा शहतीर लटकाया हुआ है। कमानियाँ पानी की उत्प्लावकता अनुरूपित करती हैं और "जहाज" को दोलन करने देती हैं। जिस समय शहतीर पर लगे हुए इंजनों के प्रतिमान चलाये जाते हैं तब शहतीर थोड़े आयाम के साथ दोलन करने लगता है।

आकृति १७—ऊर्ध्वाधरतया व्यवस्थित चार सिलिंडरों वाले पिस्टन इंजन का शिलक कृत संहति-संतुलन। दाहिनी तरफ नीचे की ओर रेखाचित्र चार क्रैंक-पिनों के परस्पर आपेक्षिक स्थान दिखलाता है।

यदि इंजनों की घूर्णन-चाल बढ़ायी जाय तो शहतीर का कंपन भी बड़ा हो जाता है, जितना ही घूर्णन-आवृत्ति शहतीर की निजी आवृत्ति के मूल के पास पहुँचती है उतना ही अधिक उसका आयाम होता जाता है (देखिए आकृति १८)। दोलनों के बड़े आयाम जहाज की सुरक्षा पर और यात्रियों के सुख पर भी विपत्तिजनक प्रभाव डालते हैं। संहति-संतुलन का अभिप्राय यह है कि अवस्थितित्व-बलों तथा जहाजी इंजनों के इतस्ततोगामी संहतियों द्वारा इन [illegible] का निराकरण हो जाय ताकि जहाज या [illegible] उनके हानिकारक प्रभावों से बचा रहे।

आ० १८—जहाज की निजी आवृत्ति के मूल के प्रतिमानवत् शहतीर की निजी आवृत्ति।

यदि स्वरणों से सीधे स्थान-निर्देशांकों पर पहुँच जायँ तो, अवस्थितित्व बलों की जो सब x दिशा में हैं, अभियाचना है कि—

(15) $$\sum m_k x_k = 0.$$

संहतियों m_k में न केवल पिस्टन और पिस्टन-दंडों की सहतियाँ वरन्, प्रथम सन्निकटन तक, संबंधक दडो तथा क्रैंक ईपा के उत्केद्र[1] अगो के कुछ भागो की सहतियाँ भी सम्मिलित है।

अवस्थितित्व बलो के घूर्णो का सतुलन भी उतने ही महत्त्व का है। ऊपर कहा जा चुका है और आ० १७ से सत्य सा प्रतीत भी होता है कि यहाँ y-अक्ष के प्रति के घूर्णवृन्द ही कुछ काम करते है। एक वार फिर त्वरणो से सीधे स्थान-निर्देशाकों पर जा पहुँचते है, और ऐसा करना अनुज्ञेय है क्योंकि उत्तोलक-वाहुगण, अर्थात् आ० १७ के a-वृंद, नियत हैं। इसके लिए हमारी माँग यह है कि—

(16) $$\sum m_k a_k x_k = 0.$$

अब हम पिस्टन के निर्देशाको, x_k ओं, को क्रैंकपिन के निर्देशाकों, ϕ_k के पदों मे व्यक्त करते है। आकृति ९ और समी० (9.6) से, प्रथम सन्निकटन तक, निम्नलिखित प्राप्त करते हैं—

(17) $$x_k + r_k \cos\phi_k \text{ नियतांक है}$$

प्रथम सन्निकटन* से यहाँ यह मतलव है कि हम एक अनन्ततया लम्बे संवधक दंड की सीमा तक जाते है, अर्थात् $r/l \to 0$. जहाँ-जहाँ r/l का प्रथम घात रख लिया गया है, जैसे कि समीकरणों (9.5) और (9.6) में वहाँ हम द्वितीय कोटि की गणना नहीं करेंगे। सभी पिस्टनों के एक ही ईपा पर काम करने के कारण, समय के विचार से नियत एक कला-स्थानांतर a_k के अतिरिक्त, सब ϕ_k परस्पर समान होंगे। अतएव

(18) $$\phi_k = \phi_1 + \alpha_k,$$

जहाँ $\alpha_1 = 0$ और $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ यथेच्छया चुने जा सकते हैं। समी० (17) और (18) के प्रभाव से, प्रतिवधो (15) और (16) का चर भाग, जिससे ही हमे यहाँ मतलव है, निम्नलिखित देता है—

1. Eccentric

*यह प्रथम सन्निकटन संहति-संतुलन को प्रथम कोटि तक निश्चित करता है (अर्थात्, जैसा कि उसे कहते हैं, "प्राथमिक बलों और प्राथमिक बल-युग्मों का संतुलन" करता है)। कारण कि हम प्रथम कोटि तक ही जाना चाहते हैं, द्वितीय सन्निकटन आवश्यक नहीं।

(19)
$$\sum M_k r_k \cos(\phi_1+\alpha_k)=0,$$
$$\sum M_k r_k a_k \cos(\phi_1+\alpha_k)=0.$$

यदि त्रिकोणमितीय फलनों का विस्तार करें तो देखेंगे कि ϕ_1 कुछ भी हो, $\cos\phi_1$ और $\sin\phi_1$ के गुणनखंड अलग-अलग शून्य हो जावेंगे। तो अब हमें परामितियों a_k और α_k के बीच चार समीकरण प्राप्त होते हैं।

(20)
$$\sum m_k r_k \cos\alpha_k=0, \quad \sum M_k r_k \sin\alpha_k=0,$$
$$\sum M_k r_k a_k \cos\alpha_k=0, \quad \sum M_k r_k a_k \sin\alpha_k=0$$

M_k तथा r_k वृ द रचना द्वारा निश्चित होते हैं। रह गयीं पाँच राशियाँ—तीन कला-विस्थापन $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ और दो उत्तोलक बाहु अनुपात, $a_2 : a_3 : a_4$ (इन 'a' ओं का निरपेक्ष मान समी० (20) में नहीं आता)। प्रतिबंधों (20) का पालन करने के लिए इन पाँच राशियों के निर्वाचन में कुछ थोड़ी-सी स्वच्छंदता है। इस स्वच्छंदता के कारण ऐसे साधनों का त्याग कर सकते हैं जो प्राविधिक दृष्टि से उपयुक्त नहीं।

यह विवरण दिखलाता है कि चार सिलिंडर वाले इंजनों में संहति-संतुलन प्रथम कोटि तक किया जा सकता है। वह यह भी दिखलाता है कि परामितियों की कमी के कारण चार से कम सिलिंडरों वाले इंजनों में संहति-संतुलन, जैसा पहले भी कह आये हैं, नहीं किया जा सकता। श्लिक[1] संहति-सतुलन विधि की बाह्य लाक्षणिक विशेषता यह है कि चार-सिलिंडर इंजन के पिस्टन समान दूरी पर नहीं होते और न उनके क्रैंक-पिन एक दूसरे से बराबर कोणों पर व्यवस्थित होते हैं। पश्चोक्त लक्षण आकृति १७ के दाहिने निचले कोने में चित्रित है।

श्लिक-विधि ने हैम्बर्ग-अमेरिका लाइन के प्रथम अर्वाचीन स्टीमरों में अपना गुण दर्शाया; उसने अनुनाद के भय का निरसन कर दिया। परंतु यह सच है कि जहाज-निर्माण के कार्यों में उसका महत्त्व अल्पकालिक ही रहा, क्योंकि शीघ्र ही पिस्टन इंजनों के स्थान पर वरीवर्तों[2] का व्यवहार होने जा रहा था और इनमें इतस्ततो-गामी संहतियाँ नहीं होतीं। परंतु आज भी मोटर गाड़ियों तथा विमानों के इंजनों और सबमरीनों (जलाभ्यंतरवाहिनी नौकाओं या पनडुब्बियों) के डीज़ल इंजनों में भी संहति-संतुलन महत्त्वशाली है।

1. Schlick 2. Turbines

योग में लेकर, प्राप्त होता है। आपेक्षिकीय यांत्रिकी के आधारिक समीकरण अब हमें बताते हैं कि बंद निकाय के लिए यह चतुःसदिश निश्चर रहता है। प्रसंगवश, एक गुणनखंड ($-ic$) और एक योगात्मक नियतांक के अतिरिक्त, उसका समय घटक गतिज ऊर्जा के बराबर है। इस प्रकार प्राप्त चार समाकल (संवेग और ऊर्जा का अविनाशित्व) समी० (24) में पद $n+1$ द्वारा अनुरूपित हैं। व्यंजन का द्वितीय पद घूर्णों के बनाने में एक समय दो अक्षों के संचय का परिणाम है। प्रकटतया, दो आकाशीय अक्षों का संचय साधारण विचार के कोणीय संवेग के समीकरण प्रदान करता है। दूसरी ओर, समय अक्ष और एक आकाशीय अक्ष के संचय से संहति केंद्र की गति के द्वितीय समाकल प्राप्त होते हैं जो इस गति की ऋजुरेखीयता सूचित करते हैं। क्योंकि समी० (2.19) के अनुसार, यदि समस्त संहति-बिंदुओं को योग में सम्मिलित करता पृष्ठ ९५ की भाँति एक ऊपरी रेखा द्वारा सूचित करें और प्रारंभ से ही $(1-\beta_2)^{\frac{1}{2}}$ के बजाय एक रख लें, तो निम्नलिखित, हिसाब लगता है—

$$x_k p_4 - x_4 p_k = ic(\overline{m_k x_k} - \overline{t m_k x_k}), \quad k=1,2,3.$$

कोणीय संवेगों के अविनाशित्व के सिद्धांत से यह राशि किसी नियतांक के बराबर होनी चाहिए जिसे हम $ic\mathbf{A}_k$ कह सकते हैं। तो त्रिविमितीय सदिश संकेतन पद्धति में और ($3a,b$) के संकेतनों के साथ प्राप्त करते हैं—

$$\mathbf{R}-t\mathbf{V}=\mathbf{A}. \tag{25}$$

$\mathbf{V}$ और $\mathbf{A}$ के निश्चर होते हुए इसका अर्थ यह है कि सचमुच ही संहति-केंद्र एक नियत चाल से ऋजुरेखा में चलता है। (24) की उत्पत्ति के स्पष्टीकरण के लिए ऊपर दिया विवरण पर्याप्त होना चाहिए,; चतु.विमितीय संमिति ने उसे और भी स्पष्टता प्रदान कर दी है।

अंत में हम (21) और (22) के परिगणन के बारे में खगोल विद्या के क्षेत्र से संबंधित एक टिप्पणी करना चाहते हैं। विख्यात त्रिपिंड समस्या के पूर्णतया समाकलन के लिए, अर्थात् उसके 3×3 निर्देशांकों और 3×3 वेग-घटकों के निर्धारण के लिए

$$2\times3\times3=18 \tag{26}$$

प्रथम समाकलों की आवश्यकता होगी। इनमें का प्रत्येक, जैसा कि (25) में उदाहृत है,स्थान और वेग के निर्देशांकों के बीच एक-एक संबंध देगा जिनके लिए एक-एक समाकलनांक चाहिए। परंतु (26) की (21) से तुलना करने पर ज्ञात होता है कि पूर्ण समाकलन के लिए आठ समाकलों की कमी है। इससे भी बढ़कर और इसके

अतिरिक्त, लाग्रांज[1] से लेकर प्वांकारे[2] तक बडे-से-बडे गणितज्ञों के घोर प्रयत्नों ने दिखलाया है कि तिरोहित समाकल किसी बीजीय रूप (algebric form) में अप्राप्य हैं। इसका निश्चायक प्रमाण ब्रुंज[3] ने दिया था।

इसी प्रकार का परिगणन द्विपिड-समस्या के लिए, जो स्वभावत. समतलीय (प्लेन) ही हो सकती है, केवलमात्र

$$2\times2\times2=8$$

और न कि $2\times3\times3=18$ समाकलनाक, पूर्ण समाकलन के लिए माँगता है। इस प्रकार, समीकरण (22) के अनुसार सभी द्वि-विमितीय समस्याओं के लिए प्रत्येक स्थिति में प्राप्य नियतांकों से केवल दो अधिक नियतांकों की आवश्यकता है। और वास्तव मे प्रस्तुत स्थिति मे ये दो समाकल, अपने अनुरूप, स्वेच्छ नियतांकों के साथ, मिल सकते हैं जैसा कि समीकरणों (6.4) से (6.5) के सक्रमण से विदित है। अतएव द्विपिड समस्या बिलकुल ठीक-ठीक हल की जा सकती है; त्रिपिड समस्या साधारणतया असाध्य है, यद्यपि वह भी एकमात्र वैश्लेपिक सन्निकटन विधियों द्वारा हल की जा सकती है। गति के प्रकारों के बारे में अत्यन्त विशिष्ट बातें मान कर ही § 32 में त्रिपिंड समस्या का समाधान बद रूप में पा सकेंगे।

§ १४. घर्षण के नियम

जैसा कि पहले भी, प्रकरण ११, उपप्रक०४ मे, जोर देकर कह आये हैं, किसी किसी निर्दिष्ट प्रक्षेप-पथ पर एक सहति की गति नियन्त्रित करने मे प्रतिक्रिया के एक ऐसे घटक का पथ की दिशा में प्रवेश होता है जो यान्त्रिकी के व्यापक सिद्धातो से नही जाना जा सकता, वरन् जिसे प्रायोगिकतया ही निर्धारित करना पड़ता है। किन्ही अन्य अनुसंधानकों के कुछ प्रारंभिक कार्य के अतिरिक्त, यह निर्धारण पहले पहल १७८५ मे चार्ल्स ए० कूलम[4] के सुप्रसिद्ध, और उस समय के लिए बहुत ही ठीक, प्रयोगों द्वारा किया गया था; स्मरण रहे कि ये वही कूलम हैं, जिनका नाम सदा के लिए वैद्युत-स्थैतिकी तथा चुवक-स्थैतिकी के आधारिक नियमों के साथ संबंधित रहेगा।

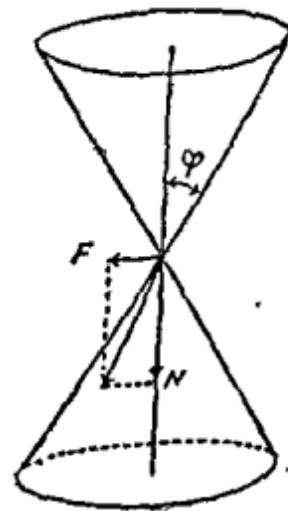
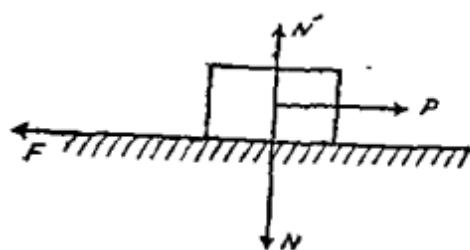
कूलम की भाँति हम भी घर्षण के दो भेद करेंगे—

(क) स्थैतिक घर्षण और

(ख) गत्यात्मक या सर्पी घर्षण।

1. Lagrange 2. Poincaré 3. H. Bruns 4. Charles A. Coulomb

(१) स्थैतिक घर्षण

किसी क्षैतिज आधार पर रखे हुए एक पिंड पर विचार करिए (आ० १९)। यदि हम पिंड पर आधार के समांतर एक धीरे-धीरे बढ़ता हुआ कर्षण बल P लगावें तो पहले तो किसी गति का प्रादुर्भाव न होगा। अतएव हमें मान लेना पड़ेगा कि एक घर्षण बल F, कर्षण बल P को संतुलित करता होगा। परंतु यदि P एक सुनिश्चित सीमा से अधिक हो तो त्वरण होने लगता है।

आ० १९—समतल आधार पर स्थैतिक घर्षण।

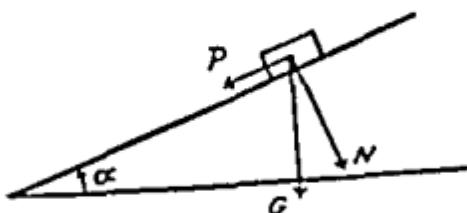
आ० २०—घर्षण कोण और घर्षण शंकु की रचना।

यह सीमा F_{max} (महत्तम), कूलम (तथा उनके पूर्वगामियों) के अनुसार, उस अभिलंब दाब N के समानुपाती है जो, किसी क्षैतिज आधार पर विराम की दशा में स्थित पिंड के भार G के ठीक बराबर है। अतएव

(1)
$$F_{max} = \mu_0 N.$$

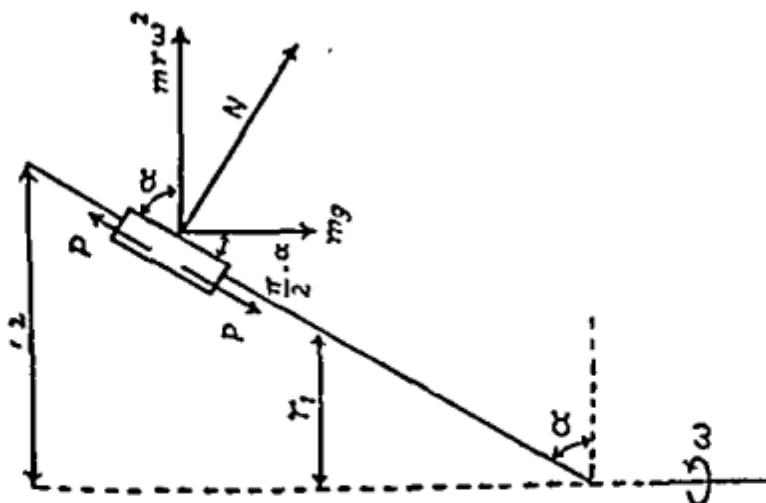
यह μ_0 स्थैतिक घर्षण का गुणांक है। दोनों स्पर्शी पदार्थों की प्रकृति और उनके स्पर्शी पृष्ठों की दशा पर यह निर्भर करता है। यदि दोनों पदार्थ एक ही हों तो μ_0 विशेषतया बड़ा (अन्तःप्रवेश) होता है।

समीकरण—

(2) $$\mu_0 = \tan\phi \text{ (स्पज्या } \phi\text{)}$$

के द्वारा एक कोण ϕ का प्रवेश करा सकते हैं जो कि एक "घर्षण के शंकु (अंग्रेजी कोन)" का शीर्ष कोण समझा जा सकता है (दे० आ० २०)। जब तक दो बलों F और N का परिणामी[1] शंकु के भीतर पड़ता है, गति का प्रादुर्भाव नहीं हो सकता। गति का प्रादुर्भाव तभी होगा जब कि परिणामी शंकु के पृष्ठ पर या उसके बाहर पड़ेगा।

आ० २१—नत समतल पर साम्यावस्था।

घर्षण-कोण का अंतर्निहित अर्थ नत समतल (आ० २१) के प्रयोगों से प्रदर्शित है, जिनका प्रारंभ गलिलियो ने किया था। बिना किसी विशेष व्याख्या के हम लिख डालते हैं कि—

$$N = G\cos\alpha,\ \ P = G\sin\alpha = -F.$$

आ० २२—चलनशील आस्तीन या दाना एक तिर्छे घूर्णक दंड पर। घर्षण के अधीन साम्यावस्था।

1. Resultant

अतएव अब

$$F < F_{max} = \mu_0 N = N \tan \phi$$

इन समीकरणों से विराम का प्रतिबंध प्राप्त करते हैं कि—

$$G \sin \alpha < \tan \phi \cos \alpha . G,$$

इस कारण

$$\tan \alpha < \tan \phi$$

या

$$\alpha < \phi .$$

नत समतल पर पिंड तभी तक विराम दशा में रहता है जब तक कि $\alpha < \phi$. अतएव **घर्षण-कोण ϕ किसी समतल की वह नति है जिस पर स्खलन या सर्पण (sliding) प्रारंभ हो जाय।**

निम्नलिखित कुछ कम महत्त्व का उदाहरण है। एक तिरछी भुजा एक ऊर्ध्वाधर धुरी पर $\frac{\pi}{2} - \alpha$ से कम कोण पर लगायी हुई है। इस भुजा पर एक चलनशील आस्तीन या दाना होता है (दे० आ० २२)। जब धुरी घूम न रही हो तब दाना विरामदशा में होगा या गतिशील, यह इस पर निर्भर करेगा कि $\alpha < \phi$ या $\alpha > \phi$. अब यदि धुरी को घुमाने लगें तो अपकेंद्र बल $mr\omega^2$ सदिश तथा गुरुत्व बल mg से जुड़ जाता है। इन दोनों बलों से निकला हुआ अभिलंब बल N और गति-नियंत्रक दंड पर आरोपित कर्षण बल, P, इन दोनों के मान, आकृति से प्रकट है कि, निम्नलिखित होंगे—

$$N = m\,(g \cos \alpha + r\omega^2 \sin \alpha),$$
$$P = \pm m\,(g \sin \alpha - r\,\omega^2 \cos \alpha).$$

P के सामने के दोहरे चिह्न का आशय यह है कि कर्षण चाहे नीचे की ओर हो चाहे ऊपर की ओर, उसे धनात्मक ही मानेंगे ताकि वह विचार में लिया जा सके, दाने का स्खलन ऊपर हो या नीचे।

(1) और (2) से दाना साम्यावस्था में होगा
यदि

$$\pm (g \sin \alpha - r\omega^2 \cos \alpha) < \tan \phi\ (g \cos \alpha + r\omega^2 \sin \alpha)$$

अब $<$ चिह्न को $=$ चिह्न द्वारा प्रतिस्थापित कर देते हैं और इस प्रकार "बल स्खलन

होने ही वाला है" इसका प्रतिबंध अर्थात् साम्यावस्था की सीमा प्राप्त करते हैं। त्रिकोणमितीय रूपांतरण द्वारा हम $\pm$ की दो स्थितियों के लिए अलग-अलग हिसाब लगावेंगे।

चिह्न	स्खलन दिशा	हिसाब
$+$	नीचे को	$g \sin(\alpha+\phi)=r_2\omega^2 \cos(\alpha+\phi)$.
$-$	ऊपर को	$g \sin(\alpha-\phi)=r_1\omega^2 \cos(\alpha-\phi)$.

या, दोनों को एक साथ मिला कर,

$$\left.\begin{matrix} r_1 \\ r_2 \end{matrix}\right\} = \frac{g}{\omega^2} \tan(\alpha \mp \phi).$$

इस प्रकार घर्षण-बल के कारण r के लिए दो अंतर

$$r_1 < r < r_2$$

निकलते हैं जिनके बीच दाना साम्यावस्था मे होगा।

यदि $\alpha > \phi$ (दाने का नीचे की ओर स्खलन जब कि $\omega \to 0$), दोनो r, धनात्मक होंगे; जितना ही कम ω होगा उतना ही अधिक अंतर उनके बीच होगा। यदि $\alpha < \phi$ ($\omega \to 0$ के लिए, स्थैतिक घर्षण के अधीन दाना साम्यावस्था मे होगा), तो $r_1=0$ (समीकरण के अनुसार ऋणात्मक भी) और केवल r_2 ही धनात्मक होगा; ω के बढने से, r_2 भी शून्य के पास पहुँचता है।

(२) सर्पी या स्खलनिक घर्षण

यहाँ जो घर्षण नियम लागू है वह है

$$F = \mu N \tag{4}$$

सर्पी घर्षण का गुणाक μ (म्यू) स्थूलतया वेग से स्वतंत्र* है और, μ_0 की भाँति, एक नियतांक है जो दोनों पदार्थों की प्रकृति और उनके पृष्ठतलों की दशाओं पर निर्भर करता है। यह सार्वभौम रूप से सच है कि—

$$\mu < \mu_0. \tag{5}$$

जिस पथ पर पिंड का स्खलन हो रहा हो, यदि वह (पथ) ऋजुरेखीय हो तो N गुरुत्वबल (या पथ के लंबवत् उसके घटक) के बराबर होगा। यदि पथ वक्र हुआ, तो समी० (११.१५) के अनुसार अपकेन्द्र बल का प्रभाव हमें जोड़ देना होगा।

* रेलगाड़ियों के चलने का अनुभव (पहिये और ब्रेक शू के बीच सर्पी घर्षण) जतलाता है कि बड़े वेगों v पर गुणनखंड μ एकवदिशतया बढ़ते v पर कम होता जाता है।

समी० (5) को एक बड़े ही आदिम प्रयोग द्वारा प्रदर्शित कराते हैं, परंतु उसका परिणाम बहुत आश्चर्यजनक निकलता है। अपने दायें और बायें हाथों की तर्जनियां, एक-दूसरी से थोडी दूर रखकर, उन पर एक चिकना बेंत या चिकनी छडी रखिए। आकृति ११ क से बलो का वितरण निम्नलिखित होगा—

$$A = \frac{b}{a+b}\,G\,; \quad B = \frac{a}{a+b}\,G.$$

अब उँगलियो को पास-पास लाइए। स्खलन पारी-पारी से दायी और बायी उँगली पर होता है; अंत मे उँगलियाँ मिल जाती हैं। तो छड़ी पर वे कहाँ मिलती हैं?

समझिए कि आदि मे $A > B$. अतएव स्खलन B से प्रारंभ होगा। B वाली उँगली तभी तक गतिशील नहीं रहती जब तक कि $a = b$ हो जाय, वरन् स्थान $b_1 < a$ तक स्खलित होती रहेगी, जहाँ B सर्पी घर्षण A के स्थैतिक घर्षण के बराबर होगा। व्यापकतया प्राप्त होगा कि—

$$F_{B,st} = \mu_a \frac{G}{a+b}\,,\; F_{A,st} = \mu_o b\,\frac{G}{a+b}.$$

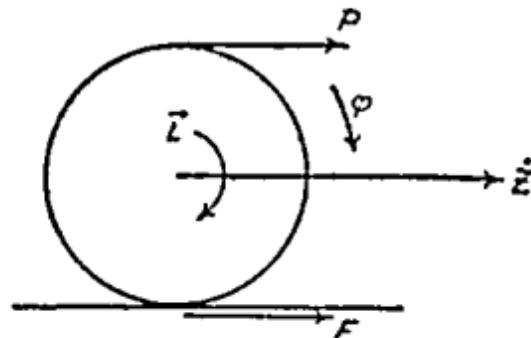
इन दोनों पदपुंजो को $b = b_1$ के लिए बराबर रखने से प्राप्त होता है

$$\mu a = \mu_o b_1,\;\; \frac{a}{b_1} = \frac{\mu_o}{\mu} > 1.$$

इस क्षण, छडी A पर चलने लगेगी। तुरत ही घर्षण $F_{A_{st}}$ गिर कर $F_{A,st} < F_{A_{st}}$ हो जायगा, जिस कारण b_1, में घर्षण $F_{B,st}$ A पर के घर्षण से बढ़ जाता है; अर्थात् B ठहर जाता है और $F_{B,st}$ बदल कर $F_{B,st}$ हो जाता है।

प्रत्येक आवर्तन स्थान पर यह प्रक्रिया बदलती रहेगी। इससे A और B छडी के संहति-केंद्र (जहाँ $a = b = 0$) के पास गुणोत्तर श्रेणी में आवेंगे (क्योंकि भागफल $\frac{\mu_o}{\mu}$ प्रत्येक बार आता है)। अंतिम अवस्था में छड़ी मिली हुई उँगलियों पर साम्यावस्था में संतुलित रहेगी।

अब हम फिर स्थैतिक घर्षण को लौटते हैं जो विशुद्ध लुंठन में निश्चयात्मक भाग लेता है। यह बात विरोधाभासी भले ही जान पड़े, परंतु स्थैतिक घर्षण ही रेलगाडी को आगे बढाता है। (यही बात मोटर कार पर लागू है और इसी प्रकार फिसलन वाली भूमि पर पैदल चलने वाला भी स्थैतिक घर्षण द्वारा अपने आपको आगे बढ़ाता

है।) भाप-दाब एक आन्तरिक बल है और वैसा होने के कारण गाड़ी के संहति-केंद्र को कदापि आगे नही चला सकता। आगे बढाने के लिए एक बाह्य बल की आवश्यकता होती है। यह बाह्य बल रेल की पटरी और पहिये के बीच की प्रतिक्रिया है अर्थात् केवल मात्र स्थैतिक घर्षण।

आकृति २३—पहिये और पटरी के बीच की प्रतिक्रिया। विशुद्ध लुठन के लिए स्थैतिक घर्षण से ही रेलगाडी को आगे चलने का बल मिलता है।

रेल के इजन के चलते हुए पहिये पर विचार कीजिए (आ० २३)। एक संवधक दंड की सहायता से इंजन पहिये को ऐंठ L सचारित करता है। उसका प्राथमिक काम पहिये को एक घूर्णनिक त्वरण प्रदान करना है। यह मभी० (11.10) के विशुद्ध लुंठन के प्रतिबध

(6)
$$\dot{z} = r\omega$$

से असगत है।

मान लीजिए कि रेलगाडी की संहति प्रतिकार्य प्रवर्त्तित पहिया M है; गति का प्रतिरोध R है (वायु का प्रतिरोध, धुराधारों मे घर्षणीय ह्रास, इत्यादि); पहिये का अवस्थितित्व घूर्ण I है, और स्थैतिक घर्षण बल F है। तो गति के समीकरण निम्नलिखित हो जाते हैं—

(7)
$$M\ddot{z} = F - R;$$
$$I\dot{\phi} = L - Fr$$

स्थैतिक घर्षण F पहले से ही नही निर्धारित किया जा सकता; परन्तु उक्त समीकरणों द्वारा वह निम्नलिखित प्रकार से निकाला जा सकता है। पहले F का निरसन, (7) के तुल्यात्मक निम्नलिखित समीकरणों से करिए—

(8) $$M\ddot{z}=F-R$$

$$M_{red}\ddot{z}=P-F$$

P परिमायी बल है जो ऐंठ L के संगत है; और M_{red}, (11.8) की भाँति, लघुकृत (रेडयूस्ड) सहति है जो अवस्थितित्व घूर्ण I के सगत है, अर्थात्

$$L=P_r\ ,\ I=M_{red}r^2.$$

हम (8) से प्राप्त करते हैं—

(9) $$(M+M_{red})\ \ddot{z}=P-R$$

और, (8) के प्रथम समीकरण के प्रभाव से

(10) $$F=R+\frac{M}{M+M_{red}}\left(P-R\right)=\frac{MP+M_{red}R}{M+M_{red}}$$

दालाँबेर के सिद्धात से समी० (9) सीधे ही मिल जाता। प्रथम समी० (8) में हमारे इस निश्चित कथन का मात्रात्मक प्रमाण सन्निहित है कि रेलगाड़ी की क्रिया में स्थैतिक घर्षण F ही चालन बल है। क्योंकि एक-समान गति के लिए वह $R=F$ प्रदान करता है। और, जैसा कि द्वितीय समीकरण (8) दर्शाता है, भाप-दाब से परिणामित परिमायी बल P का केवलमात्र कार्य पटरियों पर काम करने वाले स्थैतिक बल का प्रादुर्भाव कराना है।

इस बात का एक अन्य प्रमाण यह है कि जैसे-जैसे रेलगाड़ियाँ अधिकाधिक शीघ्रगामी होती गयी हैं या उनमें ले जाने वाले माल का बोझ बढ़ा है, वैसे ही वैसे इजन भी अधिकाधिक भारी होते गये हैं। यह परिस्थिति सीधे कूलम के घर्षण नियम, समीकरण (1), की ओर लक्ष्य करती है जो कहता है कि प्राप्य स्थैतिक घर्षण की सीमा अभिलंब दाव[2] N की समानुपाती है। यदि पटरियाँ बहुत चिकनी हो जायें (बरफ के कारण किंवा, उदाहरणत., देशांतरगामी झिनगों के कुचल जाने से उत्पन्न स्नेहन के कारण) तो स्थैतिक घर्षण के असफल होने और फिसलने से हो जाने वाली सुपरिचित बात समी० (1) के दूसरे गुणनखड (समानुपातीयता गुणनखंड) μ_0 को प्राप्त करती है जो, जैसा कि जोर देकर कहा जा चुका है, पटरियों के पृष्ठ-तल की दशा पर निर्भर करता है। जब पटरियाँ बहुत अधिक चिकनी हो जाती हैं तब गुणनखड μ_0 को कृत्रिमतया बढ़ाना पड़ता है। बालू डाल कर ऐसा किया जाता है।

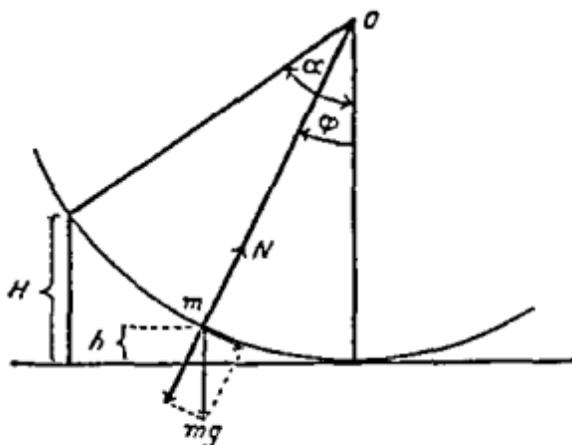
1. Peripheral force 2. Normal pressure

तृतीय अध्याय

दोलन समस्याएँ

आगे दी हुई बातें यांत्रिकी के सिद्धांतों के बारे में हमें कोई नयी चीज नहीं बतायेंगी। परंतु भौतिकी तथा इंजीनियरी में दोलन की प्रक्रियाओं का इतना अधिक महत्व है कि उनका पृथक् रूप से यथाक्रम विवेचन हम आवश्यक समझते हैं।

§ १५. सरल लोलक

दोलायमान पिंड एक कण है जिसकी संहति m है और जो l दैर्घ्य के एक भारहीन दृढ़ दंड द्वारा एक स्थिर बिंदु o से लगाया हुआ है। हम अवलंबन-बिंदु पर के तथा

आकृति २४—सरल लोलक। गति की दिशा की ओर गुरुत्व का घटक।

वायु के घर्षण की उपेक्षा कर सकते हैं, अतएव जो बल यहाँ काम करता है वह केवल गुरुत्व है जिसका घटक, बढ़ते हुए ϕ की दिशा में, $-mg \sin\phi$ है (देखिए आ० २४)। किसी भी पथ पर नियंत्रित गति का व्यापक समीकरण (11.14), $v=l\dot{\phi}$ (वृत्तीय पथ) के लिए, निम्नलिखित यथार्थ समीकरण प्रदान करता है—

$$(1) \qquad ml\frac{d^2\phi}{dt^2} = -mg \sin \phi$$

पर्याप्त छोटे दोलनों के लिए, $\phi \ll 1$, हम $\sin \phi$ के स्थान पर ϕ रख सकते हैं। संक्षेप करने पर

$$(2) \qquad \frac{g}{l} = \omega^2$$

के साथ, अब हम निम्नलिखित रैखिक लोलक समीकरण[1] प्राप्त करते हैं

$$(3) \qquad \frac{d^2\phi}{dt^2} + \omega^2\phi = 0$$

यह "सरलावर्त्त दोलनों"[2] का अवकल समीकरण है जैसा कि § ३ (४) में विवर्तित किया गया था। परतत्र चर राशि के नाम के अतिरिक्त, यह समीकरण (3.23) से सर्वसम है। समीकरण (3.22) में परिभाषित वृत्तीय आवृत्ति ω अब ऊपर के समीकरण (2) द्वारा प्रदत्त है। अतएव हम प्राप्त करते हैं

$$(4) \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} = \left(\frac{g}{l}\right)^{\frac{1}{2}}, \; T = 2\pi \left(\frac{l}{g}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

आप देखेंगे कि T (आवर्त्त काल) सहति m से स्वतंत्र है। वास्तव में m तो (1) में से ही निकल गया था। अतएव यदि लोलक-दैर्घ्य वही, l, रहे तो विभिन्न सहतियों (m) का आवर्त्तकाल वही होगा। T पूर्ण आवर्त्तकाल है अर्थात् इधर से उधर उधर से इधर, पूरे एक झूलन का समय। कभी-कभी, इससे आधे समय को दोलन-काल या दोलन-समय कहते हैं। इस प्रकार एक "एक सेकंडी लोलक" होता है जिसके लिए $\frac{1}{2}T$ एक सेकंड के बराबर होता है। उसका दैर्घ्य (4) से यह निकलता है

$$l = \frac{g}{\pi^2} \cong 1 \text{ मीटर}$$

जहाँ तक समी० (3) वैध है वहाँ तक आवर्त्त काल झूलन के आयाम से भी स्वतंत्र है, अर्थात् छोटे-छोटे लोलक-दोलनवृंद तुल्यकालिक होते हैं।

समी० (3) के व्यापक समाधान का रूप निम्नलिखित है—

$$\phi = a \sin \omega t + b \cos \omega t.$$

1. Linear pendulum equation 2. Harmonic oscillations

यदि कह दें कि $\phi=0$ जब $t=0$, और $\phi=\alpha$ जब $t=\frac{T}{4}$, तो $b=0$ और $a=\alpha$ रखना पड़ेगा। अतएव

$$\phi=\alpha \sin \omega t. \tag{5}$$

इस प्रकार α हुआ ϕ का आयाम[1], अर्थात् कोण के मात्रक (रेडियन) में मापित, कण का महत्तम विस्थापन।[2]

परिमित आयाम के लिए तुल्यकालिकता नष्ट हो जाती है क्योंकि समी० (1) अरैखिक है और इस स्थिति में वही लागू है। (1) का समाकलन करने के लिए उसके दायें और वायें दोनों पार्श्वों को $\frac{d\phi}{dt}$ से गुणा कर दीजिए। ऐसा करना गति-समीकरण से ऊर्जा-समीकरण को जाने के समान है। इसका समाकलन प्रदान करता है

$$\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2=2\omega^2\cos\phi+C. \tag{6}$$

C इस प्रतिबंध से निर्धारित किया जाता है कि $\phi=\alpha$ के लिए $\frac{d\phi}{dt}=0$, अर्थात्

$$C=-2\omega^2\cos\alpha$$

एकांतरतया, हम सीधे ऊर्जा समीकरण से प्रारंभ कर सकते हैं। आकृति २४ में प्रदर्शित H का आशय लेकर हम प्राप्त करते हैं—

$$\frac{m}{2}\, l^2\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2+mgh=mg\,H \tag{6a}$$

$$\text{जहाँ}\quad \begin{cases} h=l(1-\cos\phi) \\ H=l(1-\cos\alpha) \end{cases}$$

जो प्रकटतया (6) से सर्वसम है।

अब निम्नलिखित समीकरण पर विचार कीजिए

$$\cos\phi-\cos\alpha=2\left(\sin^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\phi}{2}\right);$$

इसको (6) में प्रतिस्थापित करें तो हम प्राप्त करते हैं—

1. Amplitude 2. Displacement

$$(7) \qquad \frac{d\left(\frac{\phi}{2}\right)}{\left(\sin^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\phi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}=\omega\, dt$$

या

$$(8) \qquad \int_0^{\frac{\phi}{2}} \frac{d\left(\frac{\phi}{2}\right)}{\left(\sin^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\phi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}=\omega t.$$

इस प्रकार एक **प्रथम प्रकार के दीर्घवृत्तीय समाकल** पर पहुँचते हैं। इस नाम को समझने के लिए हमें प्रसंगवश "दीर्घवृत्त के चापकलन"[1] अर्थात् किसी दीर्घवृत्त के चाप की लंबाई की नाप के बारे में कहना होगा। इसके लिए दीर्घवृत्त के समीकरण का निम्नलिखित परामितीय[2] रूप व्यवहार में लावेंगे—

$$\left.\begin{aligned} x&=a\sin v\\ y&=b\cos v\end{aligned}\right\}$$

इससे निकलता है

$$ds^2=dx^2+dy^2=(a^2\cos^2 v+b^2\sin^2 v)dv^2,$$

$$ds=[a^2-(a^2-b^2)\sin^2 v]^{\frac{1}{2}}dv.$$

अब रखते है,

$$k^2=+\frac{a^2-b^2}{a^2} \;(<1 \text{ यदि } a>b),$$

और इस प्रकार दीर्घवृत्त के लघु अक्ष के अंत-बिंदु $v=0$ से दीर्घवृत्त के किसी भी बिंदु v तक के चाप के दैर्घ्य के लिए प्राप्त करते हैं।

$$(9) \qquad s=a\int_0^v \left(1-k^2\sin^2 v\right)^{\frac{1}{2}}dv.$$

यह एक द्वितीय प्रकार का दीर्घवृत्तीय समाकल है।

1. Rectification 2. Parametric

फलनवाद[1] के दृष्टिकोण से प्रथम प्रकार का दीर्घवृत्तीय समाकल[2] द्वितीय प्रकार से सरलतर है। "लेजान्द्र मानक रूप" में यह है

$$\int_0^v \frac{dv}{\left(1-k^2\sin^2 v\right)^{\frac{1}{2}}}$$

अपना समाकल (8) हम इस रूप में निम्नलिखित रूपान्तरण द्वारा कर देंगे—

$$\sin\frac{\phi}{2}=\sin\frac{\alpha}{2}\,.\sin v.$$

तो प्राप्त करते हैं

$$\text{(10)}\qquad \left(\sin^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\phi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}=\sin\frac{\alpha}{2}\cos v,$$

$$\frac{d\,\frac{\phi}{2}}{\left(\sin^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\phi}{2}\right)}=\frac{dv}{\cos\frac{\phi}{2}}=\frac{dv}{\left(1-k^2\sin^2 v\right)^{\frac{1}{2}}},$$

जहाँ "मापाक[3]" k निम्नलिखित के लिए है—

$$\text{(11)}\qquad k=\sin\tfrac{1}{2}\alpha.$$

यदि आवर्तकाल T ज्ञात करना है तो समी० (8) मे

$$t=\frac{T}{4},\ \text{और}\ \phi=\alpha$$

रखना पड़ेगा। अतएव, (10) के अनुसार, $v=\frac{\pi}{2}$. यह तथोक्त "प्रथम प्रकार का पूर्ण समाकल" प्रदान करता है जो अक्षर K द्वारा सूचित किया जाता है। अतएव

$$\text{(12)}\qquad K=\int_0^{\pi/2}\frac{dv}{\left(1-k^2\sin^2 v\right)^{\frac{1}{2}}}$$

अब (2) द्वारा ω निश्चित है, तो (8) से आवर्तकाल के लिए

$$\text{(13)}\qquad T=4K\left(\frac{l}{g}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

1. Function theory 2. Elliptic integral 3. Modulus

प्राप्त होता है। अब (12) से सीधे ही पढ़ा जा सकता है कि—

$K = \frac{\pi}{2}$, यदि $k \to 0$, जो कि (11) के अनुसार

अतीव लघु आयामों α के लिए है।

$K = \infty$ यदि $k \to 1$, जो कि (11) के अनुसार $\alpha = \pi$

अर्थात् ठीक ऊपर १८०° के झूलन के लिए है।

प्रथम स्थिति में, जैसी कि प्रत्याशा की जा सकती है, पुराना व्यंजक (4) प्राप्त होता है। द्वितीय स्थिति में इस व्यंजक से विचलन एक चरम सीमा पर आ पहुँचता है।

व्यापकतया, एक द्विपदीय विस्तार और (12) का पद-प्रति-पद समाकलन निम्नलिखित मान पर पहुँचाता है—

$$K = \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{k^2}{4} + \frac{9k^4}{64} + \ldots\ldots\right)$$

तदनुसार T के लिए निम्नलिखित प्राप्त होता है—

$$(14) \quad T = 2\pi\left(\frac{l}{g}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\alpha}{2} + \frac{9}{64}\sin^4\frac{\alpha}{2} + \ldots\right)$$

जो कि परिमित-विक्षेप[1] के लिए तुल्य-कालिकता[2] से विचलन मात्रात्मक प्रकार से देता है।

खगोल निरीक्षण संबंधी बड़ी घड़ियों का लोलक सरल ढंग से बना होता है जिसका $\alpha \leqslant 1\frac{1}{2}°$ आयाम उनके लिए (14) के कोष्ठक में दिया हुआ प्रथम संशोधन-पद[3] लगभग २०,००० में एक के बराबर होता है।

§ १६. यौगिक लोलक

यह प्रश्न वस्तुतः एक दृढ़ पिंड के किसी स्थिर अक्ष के प्रति घूर्णन का है जो कि §११ के उप प्र० १,में पहले ही दिया जा चुका है; उसमें और प्रस्तुत प्रश्न में भेद केवल इतना ही है कि यहाँ विशिष्टतया कह दिया जाता है कि बाह्य बल गुरुत्वाकर्षणीय है। समझिए कि स्थिर अक्ष O (आकृति २५) से गुरुत्व केंद्र G की दूरी s है। (यहाँ "गुरुत्व-केंद्र" पद का जान-बूझकर व्यवहार किया गया है यद्यपि 3.12 में यह संहति-केंद्र से सपाती है।) यह भी समझिए कि जो कोण ऋजुरेखा OG ऊर्ध्वरेखा

1. Finite deflections 2. Isochronism 3. Correction term

से बनाती है वह ϕ है। संहति के वैयक्तिक अल्पांगों dm पर आरोपित गुरुत्वीय बलों का संपूर्ण घूर्ण L प्रकटतया निम्नलिखित होगा—

(1) $$L = -mgs \sin \phi$$

यहाँ m सारी संहति है। तो (11.4) से गति-समीकरण निम्नलिखित हुआ

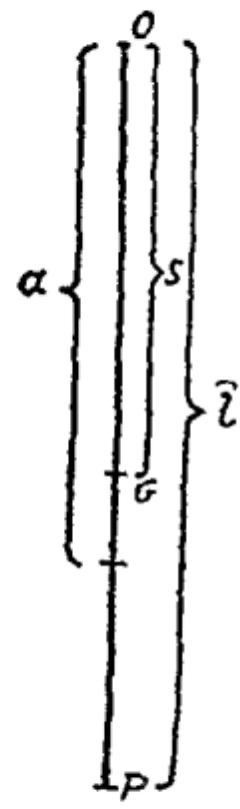
(2) $$I\ddot{\phi} = -mgs \sin \phi$$

सरल लोलक के गति-समीकरण (15.1) से उसकी तुलना बताती है कि एक तुल्यात्मक सरल लोलक, अर्थात् ऐसा सरल लोलक जिसका दोलन-काल वही हो जो प्रस्तुत यौगिक लोलक का, उसकी लंबाई l निम्नलिखित होगी

(3) $$l = \frac{I}{ms}$$

अब I को तथोक्त घूर्णन-त्रिज्या a द्वारा प्रतिस्थापित करिए। घूर्णन-त्रिज्या की परिभाषा यह है कि—

(4) $$I = ma^2$$

मतलब यह कि घूर्णन-त्रिज्या लोलक के अवलंबन-बिंदु O से वह दूरी है जहाँ सारी संहति का एकत्रीकरण करना होगा ताकि वास्तविक संहतिवितरण का अवस्थितित्वघूर्ण प्राप्त हो जाय। ध्यान रहे कि (11.8) में दूरी r के लिए एक ऐसी "लघुकृत संहति" का उपयोग किया गया था जहाँ कि आदि में अज्ञात संहति M_{red} रखी जाने को थी; इसके विपरीत यहाँ संहति m दी हुई है और ऐसी दूरी a मालूम करना है जहाँ यह संहति रखी जाय।

आ० २५—यौगिक लोलक

अवलंबन-बिंदु O; गुरुत्व-केंद्र, G; दोलन केंद्र, P, तुल्यात्मक लोलक दैर्ध्य, $OP = l$; गुरुत्व केंद्र की दूरी, $OG = s$; घूर्णन-त्रिज्या, $OR = a$ यह a है, और l का गुणोत्तर मध्यमान।

(3) और (4) की तुलना दिखलाती है कि a है s और l का गुणोत्तर माध्य[1] अर्थात्

(5) $$a^2 = ls$$

1. Geometric mean

अब आइए तुल्यात्मक लोलक दैर्घ्य l को O से यौगिक लोलक की मध्यरेखा OG पर लगावे । इस प्रकार प्राप्त बिंदु P दोलन-केंद्र कहलाता है (Huygens)। आ० २५ में O, G और P के आपेक्षिक स्थान दिखलाये गये हैं। इस आकृति से हम s, a और l के अत: संबधों का चित्रण भी कर सकते हैं।

अब हम निश्चयपूर्वक कहते है कि O और P के कार्य विनिमयशील है। यहाँ तक O अवलबन-बिंदु रहा है, P दोलन-केंद्र। अब हम P को अवलंबन-बिंदु मानेंगे और दिखावेंगे कि O दोलन-केंद्र हो जाता है। उत्क्रमणीय[1] लोलक का मौलिक भाव यही है।

नीचे दी हुई सारणी में अवतक आये हुए संकेत दिये गये हैं; आनेवाली बातों के संकेतो को देकर सूची पूर्ण कर दी गयी है।

अवलबन विन्दु	दोलन केंद्र	तुल्यात्मक लोलक-दैर्घ्य	अवस्थितित्व घूर्ण	घूर्णन त्रिज्या	संहति केंद्र की दूरी
O	P	l	I	a	s
P	O′	l_p	I_p	a_p	$l-s$

हमारा निश्चित कथन है कि

$$l_p = l \text{ अर्थात् } O' = O$$

प्रमाण—समीकरणों (3) और (4) का संगत नवीन संकेतो में पुनर्लेखन कर, उनसे l_p निकालिए तो हम प्राप्त करते हैं—

$$(6) \qquad l_p = \frac{I_p}{m(l-s)} = \frac{a_p^2}{l-s}.$$

अब इस प्रकरण की शेषपूर्त्ति के समी० (10) के अनुसार,

$$(6a) \qquad a_p^2 = l(l-s)$$

इस कारण (6) का अंतिम अंग सत्य ही l के बराबर है।

पृथ्वीतल पर या उससे नीचे के भिन्न-भिन्न स्थानों पर गुरुत्वीय त्वरण g के निर्धारण के लिए लोलक का उपयोग किया जाता है। चूँकि व्यवहार में सरल लोलक अप्राप्य है और चूँकि यौगिक लोलक के परिकलनो में आया हुआ अवस्थितित्व घूर्ण I यथातथ नही जाना जा सकता (न केवल लोलक के गोलक[2] के पेचीदा रूप के कारण

1. Reversible 2. Bob

वरन् उसकी आंतरिक असमांगताओं के कारण भी), इसलिए उत्क्रमणीय लोलक द्वारा प्रयोगात्मक विधि से तुल्यात्मक लोलक-दैर्घ्य का निर्धारण करना पड़ता है। हमें कल्पना करनी पड़ेगी कि आकृति २५ के लोलक में अवलंबन बिंदु के लिए दो छुरी की धारें[1] लगी हैं, एक O पर और दूसरी P पर। दोनों धारें एक-दूसरी की ओर होनी चाहिए और दोनों की त्रिकोणीय काटें रेखाचित्र के तल में। P वाली छुरीधार एक सूक्ष्म-मापी पेंच द्वारा ऊपर-नीचे की जा सकती है। प्रेक्षण के लिए पर्याप्त समय लेने से दोलनों की संख्या बड़ी ही यथार्थता से गिनी जा सकती है। इस प्रकार O और P के प्रति दोलन-कालों की समानता या असमानता अतीव याथातथ्य के साथ निर्धारित की जा सकती है और, यदि आवश्यकता हुई तो, सूक्ष्ममापी पेंच द्वारा संशोधित भी की जा सकती है।

उत्क्रमणीय लोलक का सिद्धांत भौतिकी की सभी शाखाओं में बार-बार आने वाले एक बहुव्यापक पारस्परिकता संबंध के एक प्रकार का प्रथम उदाहरण है। इस भांति का एक अन्य उदाहरण ध्वानिकी[2] और वैद्युत स्थैतिकी में उद्गम बिंदु और क्षेत्र बिंदु की विनिमयशीलता है।

शेषपूर्ति—अवस्थितित्व-घूर्ण संबंधी एक कायदा

हमारे सामने समांतर अक्षों का नियम है, जो कहता है कि m संहति वाले पिंड का किसी भी बिंदु O से जाते हुए अक्ष के प्रति अवस्थितित्व घूर्ण पिंड के संहति केन्द्र G से जाते हुए उक्त अक्ष के समांतर अक्ष के प्रति के अवस्थितित्व घूर्ण और ms^2 के योग के बराबर है जहाँ s दिये हुए अक्ष और G के बीच की दूरी है।

यदि दिये हुए अक्ष की दिशा y है तथा O से G की दिशा x है तो O से जाते हुए अक्ष से किसी संहति अल्पांश dm की दूरी r निम्नलिखित होगी—

$$r^2 = x^2 + z^2.$$

यहाँ x बिंदु O से मापा गया है। इसके बजाय यदि x बिंदु G से नापा जाय और यदि, आ० २५ की भाँति, $OG = s$, तो

$$r^2 = (x+s)^2 + z^2 = x^2 + z^2 + 2xs + s^2$$

होगा। यदि सब dm ओं को योग में ले लें तो परिणाम निकलता है कि—

$$I = I_G + 2s\int x\,dm + ms^2. \tag{7}$$

बीच का पद शून्य हो जाता है [मिलाइए, उदाहरणार्थ, समी० (13.3b)] बशर्ते कि समतल $x=0$ संहति-केंद्र से होकर जाता हो। यदि ऐसी स्थिति हुई तो

$$I = I_G + ms^2 \tag{8}$$

1. Knife-edges 2. Acoustics

जैसा कि ऊपर निश्चयपूर्वक कहा था।

तदनुसार आ० २५ से प्राप्त करते हैं कि—

(8a) $$I_p = I_G + m(l-s)^2$$

परंतु (8) और (8a) से

$$I_p - I = ml^2 - 2mls,$$

जो कि, (4) के विचार से, निम्नलिखित प्रकार लिखा जा सकता है—

(9) $$a^2_p - a^2 = l^2 - 2ls;$$

या, (5) के विचार से,

(10) $$a^2_p = l^2 - ls = l\,(l-s).$$

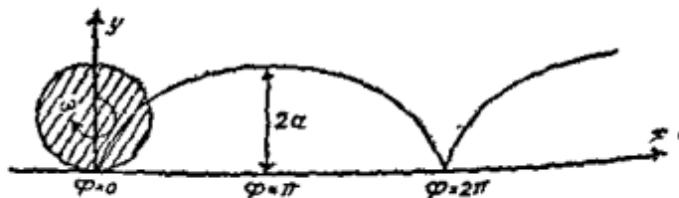
यह वह संबंध है जिसका (6a) में उपयोग किया गया था।

§ १७. वृत्तजातीय[1] लोलक

यह लोलक क्रिस्चियन हाइगिंज की, जो दुनिया के चतुरतम घड़ी-साज माने जाते हैं, ईजाद है। इस लोलक का तात्पर्य साधारण सरल लोलकों में तुल्यकालिकता की कमी का निरसन करना है। ऐसे संहति-बिंदु को वृत्तीय चाप के स्थान पर वृत्तजातीय चाप पर चला कर किया गया था। आगे चलकर देखेंगे कि व्यवहार में इस प्रकार की गति कैसे प्राप्त की जा सकती है।

साधारण वृत्तजात[2] का परामितीय निरूपण[3] निम्नलिखित होता है—

(1) $$x = a(\phi - \sin\phi)$$
$$y = a(1 - \cos\phi).$$

परामिति ϕ उतना कोण है जितना कि a त्रिज्या वाला एक पहिया क्षैतिज x–अक्ष पर चलता हुआ अपने आदि के स्थान से घूमा है। पहिये की परिमा[4] पर स्थित एक बिंदु साधारण वृत्तजात का जनन करता है।

आ० २६—साधारण वृत्तजात का जनन, आगे चलते पहिये की परिमा पर स्थित बिंदु द्वारा। घूर्णन-कोण ϕ का अर्थनिर्देश।

1. Cycloidal 2. Cycloid 3. Parametric representation 4. Periphery

अपने लोलक के लिए ऐसे वृत्तजात की आवश्यकता है जिसके निम्निताग[1] नीचे नहीं ऊपर की ओर हों (देखिए पृ० १२९ पर आ० २७)। ऐसे वृत्तजात का जनन पहिये के x-अक्ष के नीचे चलने से होता है। ऐसे वक्र का x तो वही है जो (1) में दिया है, परन्तु उसका y (1) में दिये y को $2a$ से घटाने से प्राप्त होता है। तो अब

(2)
$$x = a(\phi - \sin\phi),$$
$$y = a(1 + \cos\phi)$$

प्रक्षेपपथ (प्रस्तुत स्थिति में वृत्तजात) की स्पर्श रेखा की ओर का गुरुत्व mg का घटक[2] होगा

$$F_s = -mg\cos(y,s) = -mg\frac{dy}{ds}$$

व्यापक संबंध (11.14) इसलिए देता है

(3)
$$m\dot{v} = -mg\frac{dy}{ds},$$

जहाँ, ठीक वृत्तीय लोलक की भाँति, संहति m दायें बायें दोनों ओर से कट जाती है। (2) का अवकलन यह देता है—

$$dx = a(1-\cos\phi)\,d\phi,\; dy = -a\sin\phi\,d\phi.$$
$$ds^2 = a^2(2 - 2\cos\phi)\,d\phi^2,\; ds = 2a\sin\phi/2\,d\phi$$

इसलिए प्रस्तुत स्थिति में

(4)
$$v = \frac{ds}{dt} = 2a\sin\frac{\phi}{2}\frac{d\phi}{dt} = -4a\frac{d}{dt}\cos\frac{\phi}{2}$$

और

(5)
$$\frac{dy}{ds} = -\frac{1}{2}\frac{\sin\phi}{\cos\phi/2} = -\cos\frac{\phi}{2}$$

यदि (3) में (4) और (5) प्रतिस्थापित करें तो प्राप्त करते हैं

(6)
$$\frac{d^2}{dt^2}\cos\frac{\phi}{2} = -\frac{g}{4a}\cos\frac{\phi}{2}.$$

यह समीकरण सरल लोलक के समीकरण (15.3) से केवल इस बात में भिन्न है कि परतन्त्र चर को अब ϕ के स्थान पर $\cos\frac{\phi}{2}$ कहते हैं। परन्तु इसका (6)

1. Cusps 2. Component

के समाकलन पर कोई परिणाम नहीं होता। अतएव पहले का समीकरण, (15.4) ज्यों का त्यों रहता है, अर्थात्

$$(7) \qquad T=2\pi\left(\frac{l}{g}\right)^{\frac{1}{2}}, \text{ केवल यहाँ } l=4a,$$

क्योंकि (6) में पहले के l का स्थान $4a$ ने ले लिया है।

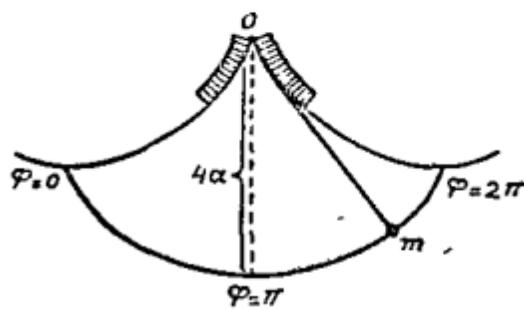
समी० (15.3) सरल लोलक के केवल छोटे-छोटे विस्थापनों का निरूपण करता था और यथार्थ संबंध (15.1) से एक सन्निकटन द्वारा प्राप्त किया गया था। दूसरी ओर, हमारे प्रस्तुत समीकरण (6) और उसके समाकलन से प्राप्त समी० (7) किसी भी आयाम के दोलनों के लिए बिलकुल ठीक है। तो वृत्तजात लोलक निर्दोषतया तुल्यकालिक हुआ। उसका आवर्त्तकाल दोलनों के आयाम से पूर्णतया स्वतंत्र है।*

जिस विधि का उपयोग किया गया है उसके बारे में देखते हैं कि (6) में हमारे कण की गति न तो कार्त्तीय निर्देशांकों द्वारा और न किसी ऐसी परामिति द्वारा निरूपित की गयी है जिसका वृत्तजातीय वक्र से कोई अति समीप का संबंध हो वह तो वक्रजात का जनन करने वाले पहिये के घूर्णन-कोण ϕ के अर्द्ध द्वारा ही निरूपित है।

परंतु हम देखते हैं कि यद्यपि इस परामिति[1] का वृत्तजात से ज़रा दूर ही का संबंध है, फिर भी वह इस समस्या के पास पहुँचने की सरलतम विधि प्रदान करती है। उसका प्रवेश हमें षष्ठ अध्याय की उस व्यापक लाग्रांज विधि का पूर्वानुभव कराता है जो गति-समीकरणों में किसी भी (स्वेच्छ) परामिति का परतंत्र चरों की भाँति उपयोग कराने देती है।

* वृत्तजात को समकालवक्र भी कह सकते हैं (वृत्तजात पर किये दोलनवृंद "परस्पर तुल्यकालिक" होते हैं)। उसे द्रुततम पात-वक्र[2] भी कहते हैं (क्योंकि वह इस प्रश्न का उत्तर देता है कि "नियत गुरुत्वाकर्षणीय बल आरोपित संहति कौन से वक्र पर स्खलित हो ताकि दिये हुए दो अंत-बिन्दुओं के बीच की दूरी तै करने के लिए वह लघुतम-संभव समय ले ?" निकलता यह है कि दोनों बिंदुओं को मिलाने वाली ऋजुरेखा या अन्य किसी वक्र की अपेक्षा वृत्तजात पर चलने में संहति कम समय लगाती है) द्रुततम पातवक्र समस्या और भी अधिक लक्षणीय है। क्योंकि उसी के लिए परिणमन-कलन के प्रथम सिद्धांत विकसित किये गये थे।

1. Parameter 2. Brachisto-chrone

वृत्तजात लोलक की तुल्यकालिकता का हाइगिंज का आविष्कार जितना ही उल्लेखनीय है उतना ही उल्लेखनीय उनकी वह विधि है जिससे वे वृत्तजात पर गोलक की घर्षणहीन गति करा सके। उन्होंने इस नियम से लाभ उठाया कि वृत्तजात का केंद्रज[1] एक दूसरा वृत्तजात होता है जो जनक वृत्तजात के बराबर है। अतएव यदि $l=4a$ लंबाई की डोरी आकृति २७ के बिंदु O से बाँधे (इस आकृति में ऊपर के दो वृत्तजातीय चाप एक निशिताग्र[2] बनाते हैं), और यदि डोरी कस कर खींची हुई हो कि वह वृत्तजात के दाहिने भाग से सटी होकर ठहरे (या बायी ओर के भाग से, यदि विक्षेप उधर की ओर हो) तो डोरी का अंत-बिंदु P नीचे का वृत्तजातीय चाप रचता है। इस प्रकार से लटकाये हुए गोलक का वृत्तजात पर चलन उतना ही घर्षणहीन होगा जितना कि सरल लोलक के गोलक का वृत्तीय चाप पर चलना।

आ० २७—हाइगिंज का तुल्यकालिक वृत्तजातीय लोलक।

वास्तव मे, लोलक-घड़ियों के निर्माण के व्यापार में हाइगिंज के इस विचार का त्याग कर दिया गया है। बेसल[3] तथा अन्यों के अनुसंधानों के अनुसार, लोलक के ऊपरी सिरे पर एक कमानी—साधारणतया एक छोटा सा प्रत्यास्थ पटल[4]—लगा देना पर्याप्त है। यदि पटल की लंबाई और गोलक की सहति उचित प्रकार से निर्वाचित की जायँ तो तुल्यकालिकता की पर्याप्त मात्रा प्राप्त हो जाती है।

§ १८. गोलीय लोलक

यहाँ लोलक को इस प्रकार लटकाने की आवश्यकता है कि सहति बिंदु m एक गोलीय पृष्ठ पर स्वच्छंदतापूर्वक चल सके। गोले की त्रिज्या $=l=$लोलक की लंबाई। ऐसी परिस्थिति में वह निम्नलिखित नियंत्रण प्रतिबंध के वश में होगा—

(1) $$F=\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2-l^2)=0,$$

जहाँ गुणनखंड $\frac{1}{2}$ सुविधा के लिए लगा दिया गया है।

1. Evolute 2. Cusp 3. Bessel
4. Elastic lamina

यहाँ नियंत्रण के प्रतिबंधों की संख्या r एक है तथा $X_1=X_2=O, X_3=-mg$; अतएव प्रथम प्रकार के लाग्रांज समीकरण (12.9) निम्नलिखित रूप धारण करते हैं

$$(2) \qquad m\ddot{x}=\lambda x,\quad m\ddot{y}=\lambda y,\quad m\ddot{z}=-mg+\lambda z.$$

समीकरणों (13.13) और (13.13a) के विचार से, (2) के प्रथम दो समीकरणों से λ का निरसन z-अक्ष के प्रति कोणीय घूर्ण का अचरत्व या, जो कि वही बात हुई, क्षेत्रफलीय वेग का अविनाशित्व, प्रदान करता है, अर्थात्

$$(3) \qquad x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}=2\frac{dS}{dt}=C \ (S = \text{प्रभावित क्षेत्रफल})$$

दूसरी ओर, यदि लाग्रांज समीकरण (2) को $\dot{x},\dot{y},\dot{z}$ से गुणा करें तो ऊर्जा समीकरण प्राप्त करते हैं; क्योंकि प्रतिबध (1) t से स्वतंत्र है (दे० पृष्ठ १२)। योग प्रदान करता है

$$(4) \qquad m(\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y}+\dot{z}\ddot{z})=-mg\dot{z}+\lambda(x\dot{x}+y\dot{y}+z\dot{z})$$

परंतु (1) से

$$\frac{dF}{dt}=x\dot{x}+y\dot{y}+z\dot{z}=0.$$

दूसरी ओर, प्रकटतया,

$$\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y}+\dot{z}\ddot{z}=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right)=\frac{1}{2}\frac{dv^2}{dt}.$$

तो (4) का t के लिए समाकलन प्रदान करता है

$$(5) \qquad \frac{m}{2}v^2=-mgz+\text{नियताक},$$

जिसे नीचे दिये रूप में लिखेंगे

$$(5a) \qquad T+V=E, \text{ जहाँ } V=mgz.$$

लाग्रांज समीकरणों को अब अंततः क्रमश: x,y,z से गुणा करिए। (1) की सहायता से इस प्रकार λ जान सकते हैं—

$$\lambda l^2 - mgz = m(x\ddot{x} + y\ddot{y} + z\ddot{z})$$

या,

$$(6) \qquad \lambda l = mg\frac{z}{l} + m\left(\frac{x}{l}\ddot{x} + \frac{y}{l}\ddot{y} + \frac{z}{l}\ddot{z}\right)$$

अब किसी गोल के तल के x, y, z विंदु पर अभिलंब की दैशिक कोटिज्याएँ $\frac{x}{l}, \frac{y}{l}, \frac{z}{l}$ होती हैं, अतएव चिह्न को छोड़कर दाहिने पार्श्व का द्वितीय पद गोलीय तल के लंबवत् अवस्थितित्वीय बल F_n^* है, इसी प्रकार दाहिने पार्श्व का प्रथम पद, चिह्न को छोडकर, गुरुत्व बल का उसी दिशा मे घटक F_n है। दालांबिर के अनुसार इन दोनों के योग का सतुलन गोले के तल की परिक्रिया R_n को, अर्थात्, भौतिकतया, लोलक के अवलंबन के तनाव को, करना चाहिए। अतएव समीकरण (6) का अर्थ निम्नलिखित समीकरण द्वारा संक्षेपतः प्रकट किया जा सकता है

$$(7) \qquad \lambda l = -(F_n + F_n^*) = R_n$$

देखिए कि एक गुणनखंड l के भीतर ही भीतर, λ वह नियत्रण है जो कि गति पर (1) के प्रभाव से पडता है और यह नियत्रण गति की दिशा के लंबवत् आरोपित होता है। व्यापक स्थितियों में, जहाँ नियत्रण के कई प्रतिबध हों और इसलिए कई लाग्रांज गुणक विद्यमान हों, वहाँ इसी प्रकार की अभ्युक्तियाँ लागू होंगी।

समीकरण (5) का द्वितीय समाकलन करने के लिए निम्नलिखित गोलीय निर्देशांकों का उपयोग करेंगे—

$$x = l\cos\phi\sin\theta,$$
$$y = l\sin\phi\sin\theta,$$
$$z = l\cos\theta.$$

इनसे निम्नलिखित बनते हैं—

$$\dot{x} = l\dot{\theta}\cos\phi\cos\theta - l\dot{\phi}\sin\phi\sin\theta,$$
$$\dot{y} = l\dot{\theta}\sin\phi\cos\theta + l\dot{\phi}\cos\phi\sin\theta,$$
$$\dot{z} = -l\dot{\theta}\sin\theta.$$

कोणीय संवेग के अविनाशित्व का समीकरण (3) निम्नलिखित हो जाता है—

(8) $$2\frac{dS}{dt}=x\dot{y}-y\dot{x}=l^2\sin^2\theta\cdot\dot{\phi}=C$$

और ऊर्जा समीकरण (5a),

(9) $$\frac{ml^2}{2}(\dot{\theta}^2+\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2)+mgl\cos\theta=E$$

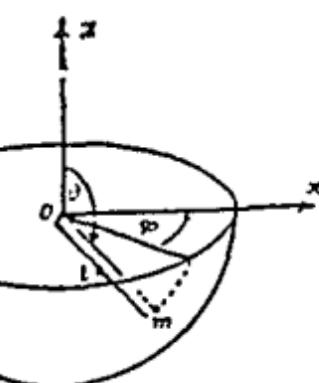
चर राशियों का एक और निम्नलिखित परिवर्तन—

$$u=\cos\theta;\quad \dot{\theta}=-\frac{1}{(1-u^2)^{\frac{1}{2}}}\frac{du}{dt}$$

(8) को (10) में

(10) $$\dot{\phi}=\frac{C}{l^2(1-u^2)}$$

और (9) को (11) में

(11) $$\left(\frac{du}{dt}\right)^2=U(u)$$

$$=\frac{2}{ml^2}(E-mglu)(1-u^2)-\frac{C^2}{l^4}$$

आकृति २८

त्रिज्या l के गोलीय पृष्ठ पर गुरुत्व बल के अधीन चलते हुए सहति बिंदु m की तरह माना गया गोलीय लोलक।

रूपांतरित कर देता है। t और u का यह सम्बन्ध हमें t को u के फलन की भाँति प्राप्त करवाता है—

(12) $$t=\int\frac{du}{U^{\frac{1}{2}}}\cdot$$

समी० (10) भी अब इसी प्रकार समाकलित रूप में लिखा जा सकता है क्योंकि (10) और (11) से

$$\frac{d\phi}{du}=\dot{\phi}\frac{dt}{du}=\frac{C}{l^2(1-u^2)}\cdot\frac{1}{U^{\frac{1}{2}}}.$$

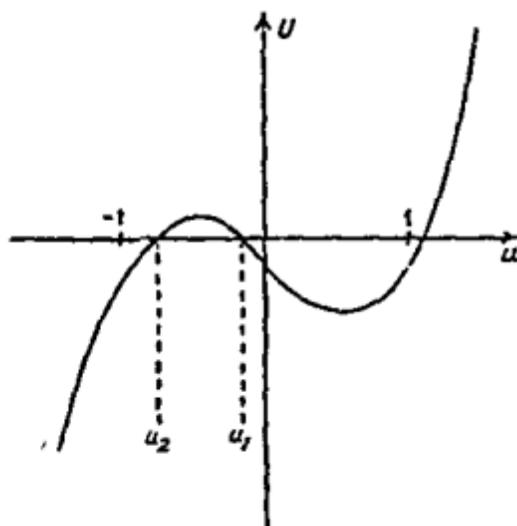
इस कारण प्राप्त होता है

(13) $$\phi=\frac{C}{l^2}\int\frac{du}{1-u^2}\cdot\frac{1}{U^{\frac{1}{2}}}\cdot$$

U, $u=\cos\theta$ में तृतीय घात का फलन है। $U^{\frac{1}{2}}$ केवल $U>0$ के लिए ही वास्तविक होगा। तो यदि समीकरण के नियतांक किसी वास्तविक भौतिक समस्या के हो तो अंतर

$$-1<u<+1$$

में $u=u_2<u=u_1$ ये दो मान होने चाहिए जिनके बीच U धनात्मक होगा (देखिए आ० २९)।

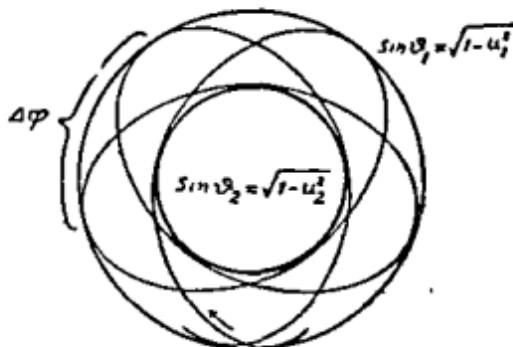
$u_1=\cos\theta_1$ और $u_2=\cos\theta_2$ ये वे दो अक्षांश हैं जिनके बीच संहति बिंदु इधर-उधर दोलन करता है। जब (12) या (13) का समाकलन u की

आकृति २९—तृतीय घात का वक्र $U(u)$ और उसकी भुजाक्ष के साथ काटें $u=u_1$ और $u=u_2$. $u_2<u_1<0$ का अर्थ है कि प्रक्षेपपथ निचले अर्द्धगोल में स्थित है।

इन दो में से एक सीमा पर पहुँचता है तब न केवल समाकलन की दिशा में वरन् $U^{\frac{1}{2}}$ के चिह्न में भी परिवर्तन होगा ताकि समाकल वास्तविक और धनात्मक रहें। दो परस्परानुगामी आवर्त्तन स्थानों के बीच पूरे आवर्त्तकाल का चौथाई भाग व्यतीत होता है, अर्थात्

$$(14) \qquad \frac{T}{4}=\int_{u_2}^{u_1}\frac{du}{U^{\frac{1}{2}}}.$$

देखिए कि दोलन अब आकाश में आवर्ती[1] नहीं रहता जैसे कि एक ही समतल में गति वाले लोलक में होता है, वरन् उसमें धीरे-धीरे एक पुरःसरण होता रहता है। पुरःसरण कोण[2] $\Delta\phi$, का हिसाब जिससे कि संहति एक पूर्ण आवर्त्तकाल T में आगे बढ़ती है (या पीछे हटती है), (13) से लगाया जा सकता है और निम्न लिखित निकलता है—

$$(15) \qquad 2\pi+\Delta\phi=\frac{4C}{l^2}\int_{u_2}^{u_1}\frac{du}{(1-u^2)\,U^{\frac{1}{2}}}$$

यह पुरःसरण आकृति ३० में रेखांकित है जो वेब्स्टर[3] से लिया गया है।

आकृति ३०—गोलीय लोलक के पुरःसरण पथ का "विहगम-दृष्ट" अर्थात् ऊपर से देखा दृश्य। पुरःसरण कोण $\Delta\phi$ है θ_1 से θ_2 और फिर θ_1 को लौटने का समय अर्द्ध आवर्त्तकाल हुआ अतएव $\Delta\phi$ पूरे चक्कर के लिए हुआ।

समाकल (12) प्रथम प्रकार का ठीक वैसा ही दीर्घवृत्तीय समाकल है जैसा कि सरल लोलक के लिए (15.8) दीर्घवृत्तीय समाकल था। यह ऐसे समाकलों का जातिनाम है जिनके समाकल्यों[4] के हरों के समाकलन की चर राशियों में तीसरे या चौथे घात के बहुपदी का वर्गमूल हो। यह बात कि समीकरण (15·8) इस

1. Periodic 2. Angle of precession
3. A. G. Webster, "Dynamics of Particles," Leipzig, Teubner (1912) p. 51.
4. Integrand

जाति में आता है, रूपान्तरण $u=\sin\frac{\phi}{2}$ का प्रवेश कराने से देखा जा सकता है ताकि u कलन की चरराशि हो जाय। इसके अतिरिक्त यदि $a=\sin\frac{\alpha}{2}$ रख दें तो (15.8) निम्नलिखित हो जाता है—

$$\int\frac{du}{[(a^2-u^2)(1-u^2)]^{\frac{1}{2}}}.$$

विशेषतया, T का व्यंजक[1] (14), ठीक (15.12) की भाँति, प्रथम प्रकार का पूर्ण समाकल है। दूसरी ओर समाकल (13), जिसके हर में $U^{\frac{1}{2}}$ के अतिरिक्त दो अन्य गुणनखड $(1\pm u)$ हैं, "तृतीय प्रकार का दीर्घ वृत्तीय समाकल" है, और (15) "तृतीय प्रकार का पूर्ण दीर्घवृत्तीय समाकल" है।

प्रश्न (III. 1) दिखलाता है कि अत्यणु[2] दोलनों के लिए गोलीय लोलक की गति को व्यक्त करने वाला समीकरण प्रारंभिक हो जाता है और पुर:सरण-कोण[3] $\Delta\phi\to 0$.

§ १६. विविध प्रकार के दोलन

स्वतंत्र और प्रणोदित[4], अवमदित[5] तथा अनवमंदित दोलन

स्वतंत्र, अनवमदित दोलनो की विवृति § ३, उपप्र० क० ४, में दी जा चुकी है। उन्हें सरलावर्त्त दोलन कहा गया था। इस स्थान पर हम पहले-पहल

अनवमंदित प्रणोदित दोलनवृन्द

पर विचार करेंगे। उनका अवकल समीकरण निम्नलिखित लेंगे—

(1) $$m\ddot{x}+kx=c\sin\omega t$$

जहाँ $\omega=\frac{2\pi}{T}$ प्रणोदक अर्थात् चालन बल की वृत्तीय आवृत्ति है।

यहाँ हमने अवकल समीकरण को परतंत्र चरराशि x के लिए रैखिक बनाया है। यह अनुज्ञेय है, कम से कम लघदोलनों के लिए। (मिलाइए, सरल लोलक) यही बात इस और आगामी प्रकरण के अन्य दृष्टांतों के लिए भी लागू है।

1. Expression 2. Infinitesimal 3. Precession angle
4. Forced 5. Damped

प्रत्यानयन[1] बल, (3.19) की भाँति, $-kx$ है; समी० (1) का c हमारे कण को दोलायमान करने वाले चालक बल का आयाम[2] है।

दाहिने अंग के होने के कारण, (1) असमांग रैखिक अवकल समीकरण हो जाता है। बायें अंग को o के बराबर रखने से संगी[3] समांग अवकल समीकरण प्राप्त होता है जैसा कि पहले ही समी० (3.23) के संबंध में कहा जा चुका है।

इस असमांग अवकल समीकरण का एक विशिष्ट हल निम्नलिखित द्वारा दिया जाता है—

$$x = C \sin \omega t,$$

जहाँ C को नीचे दिया समीकरण संतुष्ट करना चाहिए

$$C(k - m\omega^2) = c$$

यदि, (3.20) के नमूने पर, हम रख लें कि—

$$(2) \qquad \omega_o = \left(\frac{k}{m}\right)^{\frac{1}{2}},$$

तो प्राप्त करते हैं

$$(3) \qquad C = \frac{c/m}{\omega_o^2 - \omega^2}.$$

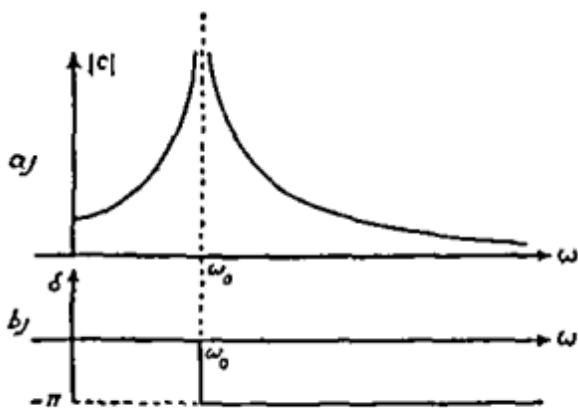
समी० (1) का व्यापक हल इस विशिष्ट हल से और संगी समांग समीकरण के व्यापक साधन (हल) से बनता है—

$$(4) \qquad x = C \sin \omega t + A \cos \omega_o t + B \sin \omega_o t.$$

प्रथम पद का आयाम C बढते हुए ω के साथ अधिक होता है और $\omega = \omega_o$ पर अनन्त हो जाता है। यहाँ पहुँचकर वह ऋणात्मक अनन्तराशि की तरफ चला जाता है तथा निरपेक्ष मान में धीरे-धीरे कम होता रहता है और ω के ∞ को पहुँचने पर $(\omega \rightarrow \infty)$ शून्य हो जाता है।

वास्तव में जब C ऋणात्मक हो जाता है तब आयाम का चिह्न नहीं बदलता क्योंकि आयाम परिभाषा से ही ऋणात्मक नहीं होते। अतएव आयाम को $|C|$

1. The restoring force 2. Amplitude 3. Associated

द्वारा ही सूचित करते रहेंगे और चिह्न का जो परिवर्तन होता है उसे गुणनखंड ज्या में रख देंगे जहाँ वह $\delta = \pm\pi$ के कला-परिवर्तन की भाँति आवेगा।

आ० ३१ क, ख—अनवमदित प्रणोदित दोलनों के आयाम और कला।

ये बातें आकृति ३१ में (a) और (b) पर चित्रांकित की गयी हैं जहाँ ω के फलनों की भाँति आयाम $|C|$ स्थान (a) पर और कला $[\delta]$ स्थान (b) पर आलेखित किये गये हैं।

आकृति ३१ख में पहले से ही यह निर्णय नही कर सकते कि $\omega > \omega_0$ के लिए कला आगे है या पीछे ; अर्थात् δ को $+\pi$ या $-\pi$ लें। परंतु हम थोडी सी पूर्व भावना कर लेंगे और अनवमदित कपनो को अवमदित कपनो की सीमात स्थिति समझ लेंगे (नीचे देखिए)। यह हमें $-\pi$ के पक्ष में निर्णय करवाता है, जिस कारण (4) का पहला पद निम्नलिखित प्रकार में सविस्तार लिख सकते हैं—

$$(4a) \qquad x = \frac{c/m}{\omega^2 - \omega_0^2} \sin(\omega t - \pi) \qquad (\omega > \omega^0)$$

यह बात कि $\omega = \omega_0$ होने पर आयाम अनत हो जाता है, स्वतत्र और प्रणोदित दोलनों के बीच अनुनाद की घटना को चित्रित करती है। यह एक ऐसी घटना है जो भौतिकी के सारे क्षेत्रों में अति महत्त्व के काम करती है। (3) और (4a) का हर, जिसके शून्य हो जाने के कारण आयाम अनंत हो जाता है, "अनुनाद हर" कहलाता है। यह अतर्ज्ञानित. स्पष्ट होगा कि दोलायमान निकाय की निजी आवृत्ति जितनी ही चालन बल की आवृत्ति के निकट होगी उतनी ही भली भाँति निकाय इस बल का अनुसरण करेगा।

परंतु हमें यह सदा मन मे रखना चाहिए कि अनुनाद के अनंत आयाम का निगमन करने मे हम अतीव बहिर्वेशन[1] के दोषी होते है क्योंकि प्रायः सभी स्थितियों में हमारा रैखिक अवकल समीकरण अत्यणु दोलनों के लिए ही लागू है।

अब तक हमने अपना सारा ध्यान समी० (4) के दायें अंग के प्रथम पद पर ही लगाया है। अन्य दो पद आदि के प्रतिबंधों द्वारा निर्धारित किये जाते हैं। इनके लिए मान लीजिए कि—

$$t=0 \text{ पर } x=0,\ \dot{x}=0.$$

इस कारण

$$A=0,\ \omega C+\omega_o B=0, \text{ अतएव } B=-\frac{\omega}{\omega_o}C.$$

परिणामतः,

$$(5) \qquad x=C\left(\sin\omega t-\frac{\omega}{\omega_o}\sin\omega_o t\right).$$

इस समीकरण की अंतर्वस्तु को, आइए, आवृत्तियों ω और ω_o के निकट अनुनाद की विशेष स्थिति पर विचार कर, अधिकतर स्पष्ट कर दें। इसके लिए हम

$$\omega=\omega_o+\Delta\omega$$

रखकर निम्नलिखित विस्तार करते हैं—

$$\sin\omega t-\frac{\omega}{\omega_o}\sin\omega_o t=\sin\omega_o t+t\Delta\omega\cos\omega_o t$$

$$-\sin\omega_o t-\frac{\Delta\omega}{\omega_o}\sin\omega_o t.$$

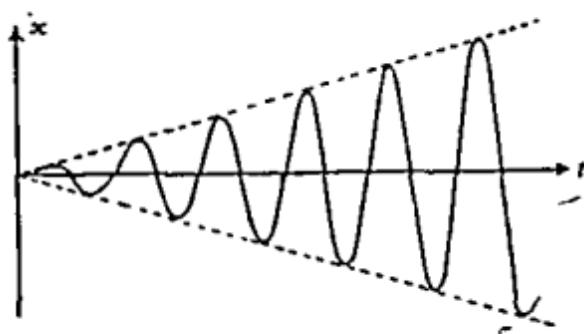
तो अब समी० (5) प्रदान करता है

$$x=C\Delta\omega\left(t\cos\omega_o t-\frac{1}{\omega_o}\sin\omega_o t\right).$$

और (3) के विचार से, सीमा $\Delta\omega=0$ पर,

$$(6) \qquad x=\frac{c}{2m\omega_o^2}\left(\sin\omega_o t-\omega_o t\cos\omega_o t\right).$$

1. Extrapolation

इस प्रकार का दोलन, जो आकृति ३२ में चित्रित, अब आवर्त्ती नहीं रहता जैसा कि स्वतंत्र दोलन था। क्योंकि (6) में t दीर्घकालीन पद की भांति आता है अर्थात् अब वह त्रिकोणमितीय फलन में केवलमात्र आयामांक की भांति ही नहीं आता। यहां $t \rightarrow \infty$ के लिए आयाम का मान $C=\infty$ के निकट पहुँचता है जैसा कि आ० ३१ में $\omega=\omega_0$ के लिए सूचित किया गया था।

आ० ३२—स्वतंत्र और प्रणोदित दोलनों के अनुनाद। आयाम की दीर्घकालिक वृद्धि।

स्वतंत्र, अवमंदित दोलनवृंद

इनका अवकल समीकरण निम्नलिखित होता है

(7) $$m\ddot{x}+kx=-w\dot{x}.$$

दायें पार्श्व का जो पद है वह घर्षण संबंधी है और वेग का समानुपाती है। यह एक ऐसा अनुमान है जो शनैं गामी, पटलीय (अर्थात् अप्रचंड) बहाव (वायव प्रतिरोध) की द्रव-गतिकी से समर्थनीय है।

समी० (7) समांग रैखिक अवकल समीकरण है। पहले की भाँति हम—

(7a) $$\frac{k}{m}=\omega_0^2, \; [\omega_0=\text{अनवमंदित निजी आवृत्ति}]$$

रख लेते हैं। निम्नलिखित सुविधा कर संकेतन-परिवर्त्तन भी कर लीजिए

(7b) $$\frac{w}{m}=2\rho, \; \rho>0.$$

तो अब समी० (7) नीचे दिया रूप धारण करता है—

(8) $$\ddot{x}+2\rho\dot{x}+\omega_0^2 x=0.$$

समी० (3 23) के नीचे जिस विधि का वर्णन किया गया है वह अब अपना पूरा गुण प्रकट करती है। वहाँ की भाँति हम (8) में

(8a) $x=C_e\lambda t$

का प्रतिस्थापन करते हैं और इस प्रकार λ में

लाक्षणिक समीकरण प्राप्त करते है अर्थात्

$$\lambda^2+2\rho\lambda+\omega_0^2=0.$$

इसके निम्नलिखित दो मूल है--

$$\lambda=-\rho\pm(-\omega_0^2+\rho^2)^{\frac{1}{2}}=\begin{cases}\lambda_1\\ \lambda_2\end{cases}.$$

अतएव व्यंजक (8a) को निम्नलिखित में व्याप्त कर देना चाहिए

(8b) $x=C_1e\ \lambda_1t+C_2e\ \lambda_2t$

अब दो स्थितियों को ध्यान में लाना चाहिए

1. $\rho<\omega_0$; 2. $\rho>\omega_0$

पहली स्थिति वह है जो साधारणतया व्यवहार में प्रचलित होती है। यहाँ गति आवर्त्ती दोलन की होती है जिसका आयाम घटता रहता है। दूसरी स्थिति तीव्र या "अनावर्त्ती" अवमंदन की है । दोनों स्थितियो में गति को इस प्रतिबध से विशिष्ट कर देंगे कि $t=0$ पर $x=0$, जिससे, (8b) के अनुसार, $C_2=-C_1$ हो जाता है।

प्रथम स्थिति $\rho<\omega_0$, $\lambda=-\rho\pm i(\omega_0^2-P^2)^{\frac{1}{2}}$,

$$x=2C'_1e^{-pt}\sin(\omega_0^2-P^2)^{\frac{1}{2}}t.$$

लघु ρ के लिए आवर्त्त काल

$$T=\frac{2\pi}{(\omega_0^2-\rho^2)^{\frac{1}{2}}}$$

अनवमंदित दोलनो के आवर्त्तकाल से नही के बराबर भिन्न होगा। $e^{-\rho t}$ अवमदन गुणनखंड है; ρT लघुगणकीय अपचय

दूसरी स्थिति 2. $\rho>\omega_0$ यहाँ λ_1, λ_2 दोनो वास्तविक है और प्राप्त करते हैं

$$x=2C_1e^{-\rho t}\sinh(\rho^2-\omega_0^2)^{\frac{1}{2}}t$$

जहाँ $\sinh$ (शाइन) अतिपरवलयिक ज्या (ज्याति) है।

अन्त में इस प्रकार के दोलन का विवरण देंगे जिसमे अब तक दिये हुए प्रकार के दोलन सम्मिलित हैं, अर्थात्

अवमंदित, प्रणोदित दोलनवृंद

इनका अवकल समीकरण निम्नलिखित रूप मे दे सकते हैं

$$m\ddot{x}+w\dot{x}+kx=c\sin\ \omega t,$$

या (7a, b) मे दी हुई संक्षिप्तिकाओं के साथ,

$$\ddot{x}+2\rho\dot{x}+\omega_0^2 x=\frac{c}{2mi}\left(e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}\right) \tag{9}$$

समांग समीकरण के व्यापक समाकल (8b) मे अब नीचे दिये हुए रूप में लिखित एक विशिष्ट साधन का योग कर देंगे।

$$x=|C|\sin\ (\omega t+\delta)=\frac{|C|}{2i}\left(e^{i(\omega t+\delta)}-e^{-i(\omega t+\delta)}\right)$$

आइए इसे (9) में प्रवेश करावे। बाये और दाये पार्श्वों के $e^{\pm\omega t}$ के गुणन खंडों की तुलना निम्नलिखित प्रदान करती है--

$$|C|\ (-\omega^2+2\ i\rho\omega+\omega_0^2)e^{i\delta}=\frac{c}{m},$$

तथा $$|C|\ (-\omega^2-2\ i\rho\omega+\omega_0^2)\ e^{-i\delta}=\frac{c}{m}.$$

इन दो संबधो का गुणन और विभाजन प्रदान करता है, क्रमात्,

$$|C|^2=\left(\frac{c}{m}\right)^2\ \frac{1}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\rho^2\omega^2}$$

और $$e^{2i\delta}=\frac{\omega_0^2-\omega^2-2i\rho\omega}{\omega_0^2-\omega^2+2i\rho\omega}$$

तदनुसार,

$$|C|=\frac{c}{m}\ \frac{1}{[(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\rho^2\omega^2]^{\frac{1}{2}}} \tag{10}$$

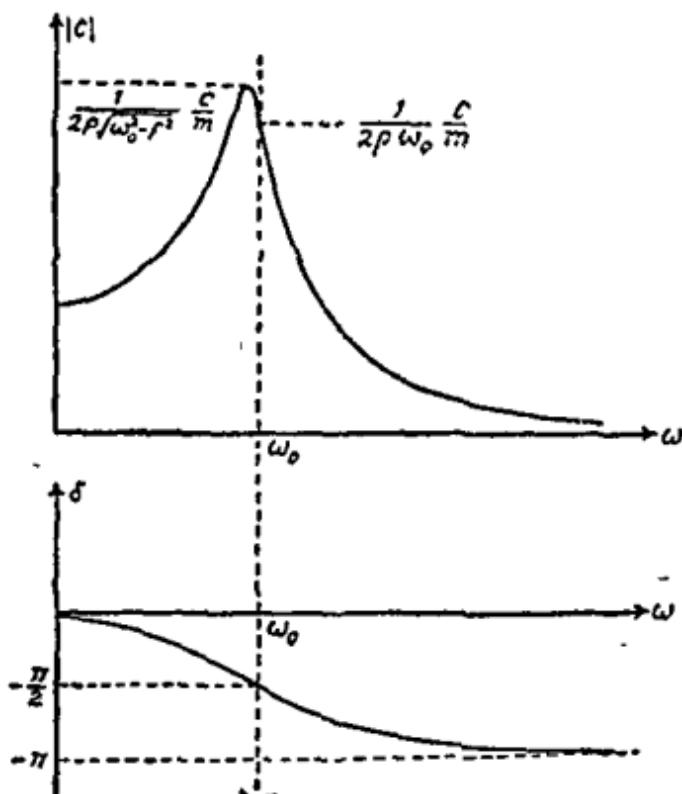
एवं

$$\tan\ \delta=\frac{1e^{2i\delta}-1}{ie^{2i\delta}+1}=-\frac{2p\omega}{\omega_0^2-\omega^2}. \tag{11}$$

ω के इन दो फलनो के आकृति ३३ मे दिये हुए आलेखनो की आ० ३१ क, ख से तुलना कीजिए।

आकृति ३३ दिखलाती है कि पहले का अनन्त अनुनाद-महत्तम[1] अवमंदन के कारण एक परिमित मान के रूप में कम हो गया है। प्रसगवश यह भी देखिए कि

1. Resonance maximum

महत्तम मान अब ठीक $\omega = \omega_0$ वाले स्थान पर नहीं आता, वरन् कुछ तनिक कम ω पर। देखिए प्रश्न III 2।

आ० ३३—अवमंदित प्रणोदित दोलनों के आयाम तथा कला।

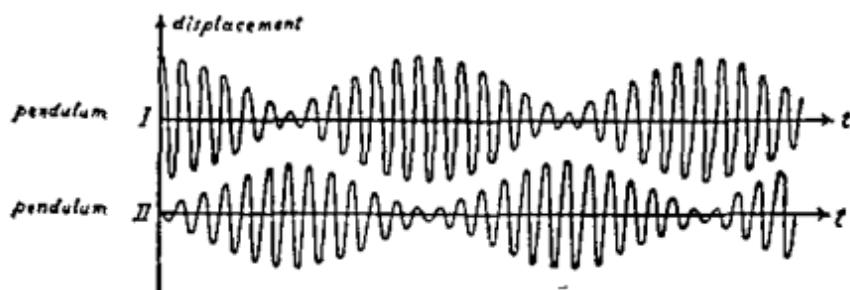
आकृति ३३ यह भी दिखलाती है कि बढ़ते हुए ω के साथ, δ का मान $\omega = 0$ पर 0 होकर ऋणात्मक हो जाता है; $\omega = \omega_0$ पर उसका मान ठीक $-\frac{1}{2}\pi$ होता है और जब $\omega \to \infty$ वह $-\pi$ के पास पहुँचता है। इस प्रकार हम अपने पहले के $\pm\pi$ के बीच के निर्वाचन (आ० ३१) को ठीक ठहरा देते हैं, जहाँ हम अनवमदित की स्थिति ले रहे थे। वास्तव में हम अब देखते हैं कि दोलन की कला सदैव प्रणोदक अर्थात् चालन बल की कला के पीछे ही रहती है। प्रणोदित दोलनों के और दृष्टांतों के लिए देखिए प्रश्न संख्या III.3 और III.4.

§ २० सहानुभूति-जनित दोलन

अब तक जिन प्रकारों के दोलनों का वर्णन हुआ है उनमें केवल एक संहति बिंदु आता है। अब हम दोलनों के उन प्रकारों का वर्णन करेंगे जिनमें दो दोलनीय संहतियाँ

आती है और दोनों सहनियों में परस्पर हल्का युग्मन होता है। सहानुभूति जनित दोलन कई वर्षो मे वैद्युत मापनो मे महत्वशाली हो गये हैं। वहाँ एक प्राथमिक परिपथ होता है और दूसरा गौण। पश्चोक्त साधारणतया पूर्वोक्त मे "प्रेरणतया" युग्मित होता है। प्राथमिक परिपथ मे दोलन उत्पन्न कराये जाते हैं (पथ "उत्तेजित" किया जाता है)। ऐसा करने पर गौण परिपथ मे भी वैसा ही होने लगता है, विशेषतया यदि अनुनाद तीव्रता से होने लगे। सच तो यह है कि रेडियो मे बहुतायत से व्यवहृत "द्विगुणतया समस्वरित युग्मन मचिका"[1] मे केवल एक प्राथमिक और एक इससे समस्वरित गौण परिपथ होता है। यहाँ पर हम, स्वाभाविकतया, युग्मित यांत्रिक दोलनवृद की ही बात करेंगे जिनका कि उपयोग बहुधा वैद्युत दोलनों के लिए नमूनो की भाँति हुआ है।

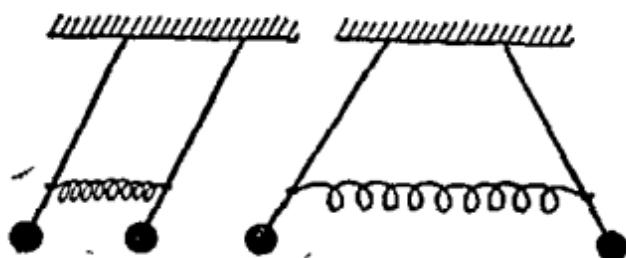
सहानुभूति-जनित दोलनो का एक विशेषरूप से शिक्षाप्रद दृष्टात तयोक्त "युग्मित लोलकद्वय" प्रस्तुत करते हैं। अनुनाद की स्थिति में दो एक-जैसे लबे और एक ही जैसे भारी लोलक होते हैं। उनका मनश्चित्रण सरल ढग से करने के लिए उन्हें एक ही समतल में दोलन करते हुए समझ सकते हैं। उनका युग्मन एक सर्पाकार कमानी द्वारा किया जा सकता है। जैसे कि आ० ३५ में इंगित किया गया है। दोनों लोलकों की आपेक्षिक गति में यदि कमानी थोडा-सा ही प्रतिरोध डाले तो युग्मन को दुर्बल कहते हैं, कमानी का तनाव और अधिक होने की स्थिति मे युग्मन सबल कहलाता है। हम मान लेंगे कि हमारे लोलकों का युग्मन दुर्बल है। यदि दोनों लोलकों की लंबाई या उनका भार बिलकुल एक-जैसा न हो तो कहेंगे कि वे "मिले हुए नहीं" हैं या "बेमेल" हैं।

पहले उन बातों का वर्णन करेंगे जो अनुनाद की स्थिति में होती हैं।

आ० ३४—युग्मित लोलक-द्वय अनुनाद की स्थिति मे।

1. Doubly tuned coupling stage

समझिए कि पहला लोलक उत्तेजित है, दूसरा शुरु में विराम अवस्था में है। आकृति ३४ में परिणामित दोलनो का चित्रण किया गया है।

प्रत्येक लोलक के दोलन मूर्च्छनागत (मॉड्यूलेटेड) होंगे।

ऊर्जा एक लोलक से दूसरे में पारी-पारी से जायेगी। जिस समय एक लोलक महत्तम आयाम के साथ दोलन करता है, उस समय दूसरा विराम दशा में होता है।

आ० ३५—अनुदान में युग्मित लोलको के दो प्रकृत दोलन-ढग।

इसके स्थान पर, यदि दोनों लोलक एक ही साथ एक ही प्रबलता से गतिशील कर दिये जायें (देखिए आ० ३५), या तो दोनो एक ही ओर (आ० ३५ बायाँ पार्श्व) या प्रतिकूल दिशाओं में (आ० ३५, दायाँ पार्श्व), तो ऊर्जा का विनिमय नही होता। हमारे दो स्वतंत्रता-संख्याओं वाले इस युग्मित निकाय के इन दो दोलन ढंगो को दोलन के प्रकृत ढंग कहते है। व्यापक नियम है कि n स्वतंत्रता-संख्याओं वाले दोलनशील निकाय के n प्रकृत दोलन ढंग होते है।

दूसरी ओर, यदि लोलक बेमेल हों तो निश्चय ही ऊर्जा विनिमय अब भी होता है; परन्तु विनिमय इस प्रकार का होगा कि प्रथम उत्तेजित दोलन का लघुतम आयाम शून्य से भिन्न होगा। केवल वही लोलक जो आदि में विराम दशा में होगा, गति चक्र में फिर विराम दशा को पहुँचेगा। इस प्रकार, ठीक मिले हुए न होने के कारण दोनों लोलकों की "सहानुभूति" में बाधा पड जाती है।

अब हम पूर्ण अनुनाद के सिद्धांत का स्थूल-वर्णन करेंगे। इसके लिए सरलतम अनुमान ही करेंगे और अवमंदन की बिलकुल उपेक्षा कर देंगे तथा गोलकों के वृत्तीय प्रक्षेप-पथों का उनके निम्नतम बिंदुओं पर खींची हुई स्पर्शरेखाओं द्वारा सन्निकटन करेंगे, जैसा करना पर्याप्ततया लघु विस्थापनों के लिए अनुज्ञेय है।

समझिए कि लोलक I का दोलन आयाम x_1 है, लोलक II का x_2; यह भी समझिए कि k है "युग्मन गुणांक", अर्थात् कमानी में एक मात्रक दैर्घ्य के दीर्घी-

कारण कारित तनाव का किसी एक लोलक की सहति द्वारा भागफल। समस्या के युगपत् अवकल समीकरण ये होंगे।

(1) $$\ddot{x}_1+\omega_0^2 x_1=-k(x_1-x_2),$$
$$\ddot{x}_2+\omega_0^2 x_2=-k(x_2-x_1)$$

यदि (1) में

(2) $$z_1=x_1-x_2, \quad z_2=x_1+x_2,$$

का उपयोग करें तो घटाने और जोड़ने से प्रकृत ढंगों के लिए ये दो समीकरण मिलते हैं—

$$\ddot{z}_1+\omega_0^2 z_1=-2kz_1 \text{ अर्थात् } \ddot{z}_1+(\omega_0^2+2k)z_1=0$$

(3) और $$\ddot{z}_2+\omega_0^2 z_2=0$$

क्रमात् तदनुसार आवृत्तियाँ हुईं

(4) $$z_1 \text{ के लिए } (\omega=\omega_0^2+2k)^{\frac{1}{2}}\cong\omega_0+\frac{k}{\omega_0};$$
$$z_2 \text{ के लिए } \omega'=\omega_0$$

समीकरण (3) के व्यापक हल ये हैं—

(5) $$z_1=a_1\cos\omega t+b_1\sin\omega t,$$
$$z_2=a_2\cos\omega' t+b_2\sin\omega' t.$$

उत्तेजन के क्षण, $t=0$ पर समझिए कि

(6) $$x_2=\dot{x}_2=0,\ \dot{x}_1=0,\ x_1=C,$$

जो देते हैं—

(7) $$\dot{z}_1=z_2=0, \quad z_1=z_2=C$$

तो परिणाम निकलता है कि—

(8) $$b_1=b_2=0,\ a_1=a_2=C$$

इस कारण

$$z_1=C\cos\omega t,\ z_2=C\cos\omega' t$$

अंततः

(9) $$x_1=\frac{z_2+z_1}{2}=C\cos\frac{\omega'-\omega}{2}t.\cos\frac{\omega'+\omega}{2}t$$
$$x_2=\frac{z_2-z_1}{2}=-C\sin\frac{\omega'-\omega}{2}t.\sin\frac{\omega'+\omega}{2}t$$

समझिए कि पहला लोलक उत्तेजित है, दूसरा शुरू में विराम अवस्था में है। आकृति ३४ में परिणामित दोलनों का चित्रण किया गया है।

प्रत्येक लोलक के दोलन मूर्च्छनागत (मॉड्यूलेटेड) होंगे।

ऊर्जा एक लोलक से दूसरे में पारी-पारी से जायेगी। जिस समय एक लोलक महत्तम आयाम के साथ दोलन करता है, उस समय दूसरा विराम दशा में होता है।

आ० ३५—अनुदान में युग्मित लोलकों के दो प्रकृत दोलन-ढग।

इसके स्थान पर, यदि दोनों लोलक एक ही साथ एक ही प्रवलता से गतिशील कर दिये जायें (देखिए आ० ३५), या तो दोनों एक ही ओर (आ० ३५ बायाँ पार्श्व) या प्रतिकूल दिशाओं में (आ० ३५, दायाँ पार्श्व), तो ऊर्जा का विनिमय नहीं होता। हमारे दो स्वतन्त्रता-संख्याओं वाले इस युग्मित निकाय के इन दो दोलन ढंगों को दोलन के प्रकृत ढंग कहते हैं। *व्यापक नियम है कि n स्वतंत्रता-संख्याओं* वाले दोलनशील निकाय के n प्रकृत दोलन ढग होते हैं।

दूसरी ओर, यदि लोलक बेमेल हो तो निश्चय ही ऊर्जा विनिमय अब भी होता है; परंतु विनिमय इस प्रकार का होगा कि प्रथम उत्तेजित दोलन का लघुतम आयाम शून्य से भिन्न होगा। केवल वही लोलक जो आदि मे विराम दशा मे होगा, गति चक्र में फिर विराम दशा को पहुँचेगा। इस प्रकार, ठीक मिले हुए न होने के कारण दोनो लोलकों की "सहानुभूति" में बाधा पड़ जाती है।

अब हम पूर्ण अनुनाद के सिद्धांत का स्थूल-वर्णन करेंगे। इसके लिए सरलतम अनुमान ही करेंगे और अवमंदन की बिलकुल उपेक्षा कर देंगे तथा गोलकों के वृत्तीय प्रक्षेप-पथों का उनके निम्नतम बिंदुओं पर खीची हुई स्पर्शरेखाओ द्वारा सन्निकटन करेंगे, जैसा करना पर्याप्ततया लघु विस्थापनो के लिए अनुज्ञेय है।

समझिए कि लोलक I का दोलन आयाम x_1 है, लोलक II का x_2; यह भी समझिए कि k है "युग्मन गुणांक", अर्थात् कमानी में एक मात्रक दैर्घ्य के दीर्घी-

करण कारित तनाव का किसी एक लोलक की सहति द्वारा भागफल। समस्या के युगपत् अवकल समीकरण ये होंगे।

$$(1)\qquad \ddot{x}_1+\omega_0^2 x_1=-k(x_1-x_2),$$
$$\ddot{x}_2+\omega_0^2 x_2=-k(x_2-x_1).$$

यदि (1) में

$$(2)\qquad z_1=x_1-x_2,\quad z_2=x_1+x_2,$$

का उपयोग करें तो घटाने और जोड़ने से प्रकृत ढगों के लिए ये दो समीकरण मिलते है—

$$\ddot{z}_1+\omega_0^2 z_1=-2kz_1 \text{ अर्थात् } \ddot{z}_1+(\omega_0^2+2k)z_1=0$$

$$(3)\text{ और }\qquad \ddot{z}_2+\omega_0^2 z_2=0$$

क्रमात् तदनुसार आवृत्तियाँ हुई

$$(4)\qquad z_1 \text{ के लिए } (\omega=\omega_0^2+2k)^{\frac{1}{2}}\cong\omega_0+\frac{k}{\omega_0}\,;$$

$$z_2 \text{ के लिए } \omega'=\omega_0$$

समीकरण (3) के व्यापक हल ये है—

$$(5)\qquad z_1=a_1\cos\omega t+b_1\sin\omega t,$$
$$z_2=a_2\cos\omega' t+b_2\sin\omega' t.$$

उत्तेजन के क्षण, $t=0$ पर समझिए कि

$$(6)\qquad x_2=\dot{x}_2=0,\ x_1=0,\ x_1=C,$$

जो देते है—

$$(7)\qquad \dot{z}_1=z_2=0,\quad z_1=z_2=C$$

तो परिणाम निकलता है कि—

$$(8)\qquad b_1=b_2=0,\ a_1=a_2=C$$

इस कारण

$$z_1=C\cos\omega t,\ z_2=C\cos\omega' t$$

अतत.

$$(9)\qquad x_1=\frac{z_2+z_1}{2}=C\cos\frac{\omega'-\omega}{2}t.\cos\frac{\omega'+\omega}{2}t$$
$$x_2=\frac{z_2-z_1}{2}=-C\sin\frac{\omega'-\omega}{2}t.\sin\frac{\omega'+\omega}{2}t$$

(4) के अनुसार, दुर्बल युग्मन की स्थिति में,

$$\frac{\omega \sim \omega'}{2} \cong \frac{k}{2\omega_0} \leqslant 1.$$

अतएव (9) के दक्षिणी अंगो के प्रथम गुणनखड समय के साथ धीरे-धीरे ही चढ़ते हैं। यही वह बात है जो आ० ३४ में चित्रित दोलनों में संकरों को उत्पन्न करती है।

यदि दोनो लोलकों मे समस्वरता न हो अर्थात् यदि $l_1 \neq l_2$ या 1 और $m_1 \neq m_2$ तो वाद[1] इतना सरल नही रहता। अब मात्रक दीर्घीकरण के कारण कमानी में तनाव को c मान कर हम

$$\omega_1^2 = \frac{g}{l_1}, \quad \omega_2^2 = \frac{g}{l_2}, k_1 = \frac{c}{m_1}, k_2 = \frac{c}{m_2}$$

रख देते है और आदि के समीकरण (1) के स्थान पर निम्नलिखित प्राप्त करते हैं—

(10)
$$\ddot{x}_1 + \omega^2_1 x_1 = -k_1(x_1 - x_2),$$
$$\ddot{x}_2 + \omega^2_2 x_2 = -k_2(x_2 - x_1)$$

यहाँ फिर दो प्रकृत ढग होते हैं जो कि (3.24) में दी हुई विधि को बढ़ाने से प्राप्त किये जा सकते हैं। [समी० (1) में हम एक अधिकतर सुविधाजनक विधि का व्यवहार कर सके थे जो कि उस स्थिति के लिए विशेषतया उपयुक्त थी; यह विधि व्यापक तथा लागू नही है।] हम निम्नलिखित प्रतिस्थापन करते है—

(11)
$$x_1 = Ae^{i\lambda t}, \quad x_2 = Be^{i\lambda t}$$

और (10) से ये दो लाक्षणिक समीकरण प्राप्त करते हैं—

(12)
$$A(\omega^2_1 - \lambda^2 + k_1) = k_1 B$$
$$B(\omega_2^2 - \lambda^2 + k_2) = k_2 A.$$

(12) से प्राप्त तयोक्त दीर्घकालिक समीकरण* λ^2 में वर्गात्मक[2] है, क्योंकि

(13)
$$\frac{B}{A} = \frac{\omega_1^2 - \lambda^2 + k_1}{k_1} = \frac{k^2}{\omega_2^2 - \lambda^2 + k_2},$$

जिस कारण

(14)
$$\{\lambda^2 - (\omega_1^2 + k_1)\} \{\lambda^2 - (\omega^2_2 + k_2)\} = k_1 k_2.$$

लघु k_1, k_2 के लिए (14) के ये दो सन्निकट मूल हैं

(*) इस शब्द का जन्म खगोलीय यांत्रिकी के स्थान-च्युति वाद में हुआ था।

1. Theory 2. Quadratic

$$(15) \qquad \lambda^2 = \begin{cases} \omega_1^2 + k_1 + \dfrac{k_1 k_2}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \\ \omega_2^2 + k_2 \dfrac{k_1 k_2}{\omega_2^2 - \omega_1^2}. \end{cases}$$

दीर्घकालिक समीकरण के इन दो मूलों का नामकरण ω^2 और ω'^2 करते हैं। अपिच, रैखिक अवकल समीकरणों के साधनों के अध्यारोपण वाले सिद्धांत का उपयोग करते हुए, हम परीक्षा मूलक साधन (11) का व्यापकीकरण उसी प्रकार कर देते हैं, जैसे कि (3.24b) में किया था। वास्तविक रूप में लिखा हुआ व्यापक साधन निम्नलिखित है —

$$(16) \qquad \begin{aligned} x_1 &= a \cos \omega t + b \sin \omega t + a' \cos \omega' t + b' \sin \omega' t \\ x_2 &= \gamma a \cos \omega t + \gamma b \sin \omega t + \gamma' a' \cos \omega' t + \gamma' b' \sin \omega' t. \end{aligned}$$

यहाँ γ और γ' राशि $\dfrac{B}{A}$ के वे विशिष्ट मान हैं जो (13) से क्रमात $\lambda^2 = \omega^2$ और $\lambda^2 = \omega'^2$ के लिए प्राप्त होते हैं।

आइये एक बार फिर उत्तेजन के प्रतिबंध लें कि $t=0$ पर

$$x_2 = 0, \; \dot{x}_2 = 0; \; \dot{x}_1 = 0, \; x_1 = C.$$

यह प्रदान करता है

$$(17) \qquad \begin{aligned} &\gamma a + \gamma' a' = 0, \; \gamma \omega b + \gamma' \omega' b' = 0, \\ &\omega b + \omega' b' = 0, \; a + a' = C \end{aligned}$$

जिनसे निम्नलिखित प्राप्त होते हैं—

$$b = b' = 0$$

और

$$a = \frac{\gamma'}{\gamma' - \gamma} C, \; a' = \frac{\gamma}{\gamma - \gamma'} C$$

यदि ये मान (16) में प्रतिस्थापित कर दे तो हम प्राप्त करते हैं

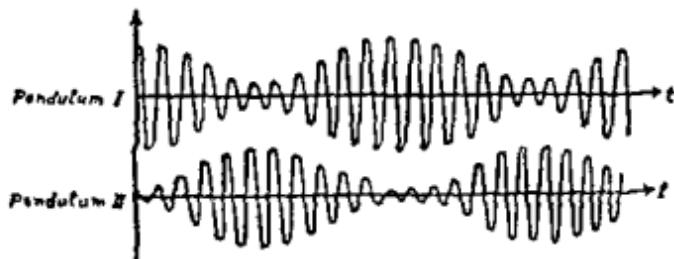
$$(18) \qquad \begin{aligned} x_1 &= \frac{C}{\gamma' - \gamma} (\gamma' \cos \omega t - \gamma \cos \omega' t) \\ x_2 &= \frac{C}{\gamma' - \gamma} \gamma \gamma' (\cos \omega t - \cos \omega' t). \end{aligned}$$

x_2 के समीकरण में (9) में व्यवहृत त्रिकोणमितीय रूपातरण कर निम्नलिखित प्राप्त कर सकते हैं —

$$x_2 = \frac{2\gamma\gamma'}{\gamma-\gamma'} C \sin \frac{\omega'-\omega}{2} t . \sin \frac{\omega'+\omega}{2} t \tag{19}$$

तो देखते है कि दूसरा लोलक अब भी निम्नलिखित समयों पर विराम दशा में पहुँचता है —

$$\frac{\omega'-\omega}{2} t = n\pi$$

परन्तु प्रथम लोलक ऐसा नही करता। जिस समय x_2 का आयाम महत्तम होता है उस समय x_1 शून्य नही, किंतु परिमित मान का होता है (देखिए समी० (18) का पहला और आकृति ३६)। दोष युक्त समस्वरण (मिलाने) का परिणाम होता है ऊर्जा का अपूर्ण स्थानातरण।

आ० ३६—थोड़े से बेमेल, युग्मित लोलकों का दोलन-लेख्य।

यदि उपर्युक्त वाद में वैद्युत घटनाओं को लगाना चाहें तो उसे इस प्रकार बढ़ाना होगा कि लोलकों का अवमदन उसमें आ जाय। अवमंदन की वैद्युत सदृश-वस्तु ओमिक[1] प्रतिरोध है (हमारा त्वरण सबंधी पद आत्म-प्रेरण के और हमारा प्रत्यानयन बल[2] वैद्युत धारितात्मक[3] प्रभावों के अनुरूप है)। और भी यह कि युग्मित परिपथो में वैद्युत दोलनों का विश्लेषण अभियाचना करता है कि हम स्थानीय "युग्मन" [k और $\pm(x_2-x_1)$ का गुणनफल] के अतिरिक्त "त्वरण और वेग युग्मन" का भी प्रवेश करावें। अपनी यांत्रिक समस्या में केवल स्थान युग्मन को ही विचार में लेना पड़ा था।

प्रश्न संख्या III·5 में प्रायोगिकतया सुविधाजनक एक ऐसी व्यवस्था की गति का अनुसधान करेंगे जिसमें लोलक एक नम्यतार से लोलक द्विसूत्रीतया लटकाये होंगे और उनका दोलन उनकी विराम दशा के समतल में नही, किन्तु उसके लंबवत् होगा।

1. Ohmic 2. Restoring force 3. Capacitive

एक चित्ताकर्षक व्यवस्था जिसमें कि दोनों युग्मित लोलक, कहिए कि, एक ही पिंड मे उपलब्ध हो जाते हैं, दोलायमान सर्पाकार कमानी* की है।

इस प्रकार की कमानी (देखिए आकृति ३७) न केवल अपनी अक्ष की दिशा मे दोलन(y) कर सकती है, वरन् इसी अक्ष के प्रति घूर्णक-दोलन (x) भी कर सकती है। परिमित विस्थापनो के लिए इन दो गतियों के बीच युग्मन कमानी स्वय उत्पन्न करती है। क्योंकि जब कमानी ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर खींची जाती है तब एक पार्श्विक बल का अनुभव होता है, और कमानी अपने को खोलने के लिए अपने तईं तार की दिशा की ओर खींच लेने का यत्न करती है। दूसरी ओर, यदि कमानी को लपेटकर ऊपर की ओर करते हैं तो वह अपने तईं y अक्ष की दिशा में छोटा कर लेने का यत्न करेगी। दूसरे शब्दो मे यदि दोलन y-दिशा मे उत्पादित किये जायें तो एक x-दोलन प्रेरित हो जाता है और इसका उल्टा। (जहाँ तक कि तार के द्रव्य पर प्रत्यास्थ प्रतिबल का संबंध है, y-दोलन ऐंठनी अर्थात् ऐंठन का, x दोलन विक्षेप का। इसके बारे में ब्योरों के लिए इस ग्रन्थमाला की द्वितीय पुस्तक देखिए)।

आकृति ३७—सर्पिल कमानी के ऐंठनी और विक्षेपी दोलन

समंजनीय सहति Z द्वारा ऊर्ध्वाधर और क्षैतिज दोलन ठीक-ठीक या पास-पास अनुनाद में लाये जा सकते हैं। अब यदि दोनों में से कोई एक दोलन उत्तेजित कर दिया जाय तो आ० ३४ या आ० ३६ में दिखलाया आयाम-विनिमय होता है।

§ २१. युगल लोलक

जैसा कि पिछले प्रकरण के प्रारंभ में किया गया था, पहले प्रस्तुत विषय संबंधी आनुभविक बातों का वर्णन करेंगे।

(*) ब्योरों के लिए पाठक को देखना चाहिए, Wüllner Festchrift, Teubner (1905): Lissajous Figures and Resonance Effects of Oscillating Helical springs; Their Use in the Determination of the Poisson Ratio, दोलायमान सर्पाकार कमानियों की लीसाजू आकृतियाँ और (उनके) अनुनाद प्रभाववृंद ; प्वासों अनुपात के निर्धारण में उनका उपयोग।

अंशदान करता है जिसका स्पर्श-रेखा की ओर का घटक $-mg\cos\psi.\sin(\phi-\psi)$ जितनी मात्रा का है। इस प्रकार हम निम्नलिखित गति-समीकरणों पर पहुँचते हैं—

(2)
$$M\ddot{X}=-M\frac{g}{L}X+mg\left(\frac{x-X}{l}-\frac{X}{L}\right)$$
$$m\ddot{x}=-m\frac{g}{l}(x-X),$$

या, अधिकतर सुविधाजनक रूप में

(3)
$$\ddot{X}+\left(\frac{g}{L}+\mu\frac{g}{l}+\mu\frac{g}{L}\right)X=\mu\frac{g}{l}x,$$
$$\ddot{x}+\frac{g}{l}x=\frac{g}{l}X.$$

आगे से $L=l$ रख देंगे और संक्षिप्तिका

(4)
$$\omega_o^2=\frac{g}{l}$$

का उपयोग करेंगे। तो अब हमारे समीकरणद्वय (3) ये हो जाते हैं—

(5)
$$\ddot{X}+\omega_o^2(1+2\mu)X=\mu\omega_o^2x,$$
$$\ddot{x}+\omega_o^2x=\omega_o^2X$$

ये गति-समीकरण कहते हैं कि ऊपरवाला लोलक निचले के साथ निचले के ऊपरवाले की अपेक्षा, μ बार कम दुर्बलता से युग्मित है।

समी० (5) को समाकलित करने के लिए हम (20.11) जैसे नीचे दिये प्रतिस्थापन का व्यवहार करते हैं

(6)
$$x=Ae^{i\lambda t}\ ;\ X=Be^{i\lambda t}$$

अतएव (5) से निम्नलिखित निकलता है

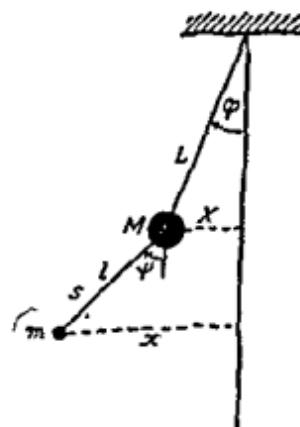
निर्धारण करने के लिए हम निम्नलिखित प्रकार से तर्क करते हैं ; हलके गोलक अवलंबन में तनाव गुरुत्व तथा अवस्थितित्वीय बल (अपकेन्द्रीयबल) से संतुलित है। पश्चोक्त द्वितीय कोटि की लघुराशि है और इसलिए उपेक्षणीय है। इस परिस्थिति में $S=mg\cos\psi$. जैसा कि ऊपर कहा गया है।

किसी भारी लोलक (जैसे कि झाड़-फानूस) से प्रायः उसी दोलन काल का एक हलका लोलक लटका देते हैं। आइए भारी लोलक को एक सुनिर्दिष्ट आवेग दें। *तो हलके लोलक में प्रबल गति का प्रादुर्भाव हो उठता है जो कि एकाएक शांत हो* जाती है और थोड़ी देर के लिए शून्य ही रहती है। इस समय देखते हैं कि भारी लोलक, जोकि अब तक विराम-प्राय दशा में ही रहा था, अब लक्षणीय आयाम से दोलन करने लगता है। परन्तु यह दोलन शीघ्र ही बद हो जाता है और अब हलका लोलक फिर काफी प्रबलता से चलने लगता है; इसी तरह यह बारी-बारी से होता रहता है।

जैसा कह आये है, अभियाचना यह है कि इन दो गोलकों की संहतियाँ M और m बहुत ही असम हों, परंतु उनके तुल्यात्मक दैर्घ्य, L और l लगभग एक जैसे ही हों तो समझिए कि—

$$\frac{m}{M}=\mu\ll 1$$

हम भारी लोलक के विस्थापन X और हलके लोलक के विस्थापन x, दोनों को लघु राशियाँ समझेंगे, *ताकि यहाँ भी वृत्तों के चापों का उनकी* स्पर्श-रेखाओं द्वारा सन्निकटन कर सकें। परिणामवश, कोणों ϕ और ψ को भी छोटा रखना पड़ेगा (दे० आकृति ३८, जिसमें ψ आपेक्षिक विस्थापन $x-X$ के लिए है)। अतएव कह सकते हैं कि—

$$\sin\phi=\phi=\frac{X}{L};\ \sin\psi=\psi=\frac{x-X}{l}$$

आ० ३८—युगल लोलक की रेखांकित व्यवस्था।

$$\text{(1)}\quad \text{और}\quad \sin(\psi-\phi)=\psi-\phi=\frac{x-X}{l}-\frac{X}{L};$$

$$\text{एवं,}\quad \cos\phi=\cos\psi=\cos(\phi-\psi)=1$$

ऊपर वाले लोलक पर न केवल गुरुत्व बल का वरन् निचले लोलक का भी प्रभाव पड़ता है। डोरी का तनाव* $S\simeq mg\cos\psi$ भी M की गति को कुछ

(*) प्रस्तुत प्रारंभिक विवृति में हमें इस तनाव S का एक वर्णनात्मक सहायक राशि की भांति उपयोग करना पड़ता है। आगे चलकर जब हम यही समस्या व्यापक लाग्रांज विधि द्वारा विश्लेषित करेंगे, तो प्रस्तुत प्रक्रम निष्प्रयोजन हो जावेगा। S का

अंशदान करता है जिसका स्पर्श-रेखा की ओर का घटक $-mg\cos\psi.\sin(\phi-\psi)$ जितनी मात्रा का है। इस प्रकार हम निम्नलिखित गति-समीकरणों पर पहुँचते हैं—

$$(2) \qquad M\ddot{X}=-M\frac{g}{L}X+mg\left(\frac{x-X}{l}-\frac{X}{L}\right)$$

$$m\ddot{x}=-m\frac{g}{l}(x-X);$$

या, अधिकतर सुविधाजनक रूप में

$$(3) \qquad \ddot{X}+\left(\frac{g}{L}+\mu\frac{g}{l}+\mu\frac{g}{L}\right)X=\mu\frac{g}{l}x,$$

$$\ddot{x}+\frac{g}{l}x=\frac{g}{l}X.$$

आगे से $L=l$ रख देंगे और संक्षिप्तिका

$$(4) \qquad \omega_o^2=\frac{g}{l}$$

का उपयोग करेंगे। तो अब हमारे समीकरणद्वय (3) ये हो जाते हैं—

$$(5) \qquad \ddot{X}+\omega_o^2(1+2\mu)X=\mu\omega_o^2x,$$

$$\ddot{x}+\omega_o^2x=\omega_o^2X$$

ये गति-समीकरण कहते हैं कि ऊपरवाला लोलक निचले के साथ निचले के ऊपरवाले की अपेक्षा, μ बार कम दुर्बलता से युग्मित है।

समी० (5) को समाकलित करने के लिए हम (20.11) जैसे नीचे दिये प्रतिस्थापन का व्यवहार करते हैं

$$(6) \qquad x=Ae^{i\lambda t}\,;\; X=Be^{i\lambda t}$$

अतएव (5) से निम्नलिखित निकलता है

निर्धारण करने के लिए हम निम्नलिखित प्रकार से तर्क करते हैं ; हलके गोलक अवलंबन में तनाव गुरुत्व तथा अवस्थितित्वीय बल (अपकेन्द्रीयबल) से संतुलित है। पश्चोक्त द्वितीय कोटि की लघुराशि है और इसलिए उपेक्षणीय हैं। इस परिस्थिति में $S=mg\cos\psi$. जैसा कि ऊपर कहा गया है।

(7)
$$A\,(\omega_o^2-\lambda^2)=B\omega_o^2$$
$$B\,[\omega_o^2\,(1+2\,\mu)-\lambda^2]=A\,\mu\omega_o^2.$$

इन दो समीकरणों से प्राप्त B/A के दो मानों को यदि बराबर रख दें तो λ^2 में निम्नलिखित वर्गात्मक समीकरण पर पहुँचते हैं—

(8)
$$(\lambda^2-\omega_o^2)^2+2\,\mu\omega_o^2\,(\omega_o^2-\lambda^2)=\mu\omega_o^4.$$

इस समीकरण के दो मूलों को $\lambda^2=\omega_o^2$ और $\lambda^2=\omega'2$ कहेंगे। μ के ऊँचे घातों को छोड़ देने से सुगमतापूर्वक इनके ये सन्निकट मान प्राप्त होते हैं—

(9)
$$\left.\begin{matrix}\omega\\ \omega'\end{matrix}\right\} = \omega_0\left(1 \pm \tfrac{1}{2}\mu^{\frac{1}{2}}\right)$$

तो वास्तविक रूप में लिखा हुआ, (5) का व्यापक हल निम्नलिखित है

(10)
$$x=a\cos\omega t+b\sin\omega t+a'\cos\omega' t+b'\sin\omega' t,$$
$$X=\gamma a\cos\omega t+\gamma b\sin\omega t+\gamma' a'\cos\omega' t+\gamma' b'\sin\omega' t.$$

§ 20 की भाँति, यहाँ γ और γ', B/A के वे मान हैं जो (7) से क्रमात $\lambda^2=\omega^2$ और $\lambda^2=\omega'^2$ के लिए निकलते हैं, अर्थात्

(11) $\gamma=-\,\mu^{\frac{1}{2}},\ \gamma'=+\,\mu^{\frac{1}{2}}$; और इसलिए $\gamma'-\gamma=2\,\mu^{\frac{1}{2}}$.

अब समझिए कि निकाय के उत्तेजन के समय, $t=0$ पर,

(12) $x=0,\ \dot{x}=0;\ X=0,\ \dot{X}=C.$

तो परिणाम निकलता है कि—

$$\left.\begin{matrix}a+a'=0\\ \gamma a+\gamma' a'=0\end{matrix}\right\}\ a=a'=0.$$

$$\left.\begin{matrix}\omega b+\omega' b'=0\\ \gamma\omega b+\gamma'\omega' b'=C\end{matrix}\right\}\ b=\frac{C}{\omega(\gamma-\gamma')}\ ;\ b'=\frac{C}{\omega'(\gamma'-\gamma)}\ .$$

अतएव हम अंतिम साधन ये प्राप्त करते हैं—

$$x=\frac{C}{\gamma-\gamma'}\left(\frac{\sin\omega t}{\omega}-\frac{\sin\omega' t}{\omega'}\right)$$

(13)
$$X=\frac{C}{\gamma-\gamma'}\left(\frac{\gamma}{\omega}\sin\omega t-\frac{\gamma'}{\omega'}\sin\omega' t\right).$$

आइए अब हम (11) को ध्यान मे रखते हुए इनमे वेगो x और $\dot{X}$ को पहुँचे। तो अंत में हम प्राप्त करते हैं—

$$x = \frac{C}{2\mu^{\frac{1}{2}}}\left(\cos \omega' t - \cos \omega t\right),$$

(14)

$$\dot{X} = \frac{C}{2}\left(\cos \omega' t + \cos \omega t\right)$$

अतएव यदि कला वही हो तो भारी ऊपर वाले गोलक का वेग हलके निचले की अपेक्षा $\mu^{\frac{1}{2}}$ बार छोटा होगा। यह भी लक्ष्य करिए कि (14) हमारे प्रारंभिक प्रतिबंधों (12) का पालन करते हैं। यही बात स्वय विस्थापनो के लिए भी कही जा सकती है। वेगो की भाँति, ω और ω′ के मानो के पास-पास होने के कारण, इनमे सकर होते है। समीकरणो (13) और (14) को समी० (209) के रूप के सदृश लिखकर यह मूर्च्छना स्पष्ट रूप से दिखलायी जा सकती है।

इस अध्याय को एक ऐसा प्रश्न देकर समाप्त करेंगे जो युग्मित दोलनो की श्रेणी मे आता है और जिसमे कि ऊपर दिये हुए दोलनो के बहुत ही सदृश दोलन उत्पन्न होते है। परतु तत्सबधी परिकलन के लिए एक सरलतर गणितीय विधि का उपयोग करेंगे जो § १९ के प्रणोदित* अवमदित दोलनो की विधि-जैसी होगी, ताकि दो युगपत् समीकरणो के स्थान पर केवल एक ही अवकल समीकरण के समाकलन का सामना करना पड़े।

तो आइए अपनी जेबघड़ी एक चिकनी कील पर इस प्रकार टाँग दे कि घड़ी बिलकुल स्वच्छंद लटके और घर्षण कम से कम हो। अपनी उँगलियो से या किसी कपड़े के टुकड़े से धीरे-धीरे छूकर घड़ी को बिलकुल विराम की अवस्था मे ले आइए। छोड़ने पर घड़ी तुरत ही गतियुक्त हो जाती है और विराम-दशा की ऊर्ध्वाधर स्थिति के प्रति बढ़ते हुए दोलन करने लगती है। ये दोलन एक सरल महत्तम आयाम के

* हम बिलकुल व्यापकतया कह सकते है कि किसी निकाय में बाह्य बल द्वारा दोलनों का उत्तेजन एक ऐसे अन्य निकाय के साथ युग्मन के तुल्य है, जिस पर पहला निकाय कोई प्रतिक्रिया नहीं करता। जिस स्थिति का वर्णन किये जाने को है उसके लिए तो निश्चय ही यह सच है कि दोलन-पहिये पर लोलकीय दोलन की प्रतिक्रिया शून्यप्राय कम होगी।

होकर कम होने लगते हैं और एक बार फिर विरामदशा में पहुँचते हैं। तत्पश्चात् पुराना प्रक्रम फिर चलता है।

घड़ी के इन दोलनों में हमें प्रकटतया उस गति का सामना करना पड़ता है, जो घड़ी के दोलन-पहिये के ताल के विरुद्ध प्रतिक्रिया द्वारा बनती है, अर्थात् कोणीय संवेग के अविनाशित्व वाले सिद्धांत की अभिव्यक्ति का। दूसरी ओर, दोलन आयामों के उच्चावचन[1] का कारण व्यतिकरण है—गुरुत्वाकर्षणीय क्षेत्र में घड़ी के स्वतंत्र लोलकीय दोलन और दोलन-पहिये द्वारा उत्तेजित प्रणोदित दोलनों के बीच व्यतिकरण[2]।

अपनी संकेतन-पद्धति में हम § १३, उप प्रक० २ का अनुसरण करेंगे। तदनुसार समझिए कि निकाय की संपूर्ण गति का कोणीय संवेग $\mathbf{M}$ है। इसे हम इन दो घटकों में विघटित कर लेते हैं, लोलक गति का कोणीय संवेग (p) और दोलन-पहिये[3] का कोणीय संवेग (b); इस प्रकार

$$\mathbf{M}=\mathbf{M}_p+\mathbf{M}_b \qquad (15)$$

$\mathbf{M}_p$ अवलंबन बिंदु O (कील) के प्रति निकाला जाता है, $\mathbf{M}_b$ दोलन-पहिये के केंद्र (B) के प्रति। पश्चोक्त अनुज्ञेय है, क्योंकि विशुद्ध कोणीय संवेग (अर्थात् जो ऐसी गति द्वारा कारित होता है जिसमें निकाय का संहति-केंद्र स्थिर रहता है) ठीक बल युग्म की भाँति (§ २३, समी० ९) अपने समतल में स्वेच्छया खिसकाया जा सकता है।* वास्तव में, दोलन पहिये की केंद्र B के प्रति सममिति के कारण, उसकी अवस्थितित्वीय क्रिया विशुद्ध संवेग-घूर्ण की होती है। समझिए कि दोलन-पहिये की वृत्तीय आवृत्ति ω है, वह दोलन-कमानी के कड़ेपन द्वारा निर्धारित होती है। समझिए कि लोलकीय दोलनों की शांत अर्थात् निजी वृत्तीय आवृत्ति ω_0 है। (11·6) और (16·4) के अनुसार हम

1. Fluctuation 2. Interference 3. Balance wheel

* यह इस तथ्य का सीधा परिणाम है कि किसी दिये हुए अक्ष के प्रति किसी निकाय का कोणीय संवेग इन दो कोणीय संवेगों के योग में विघटित किया जा सकता है—संहति-केन्द्र से जाते हुए समान्तर अक्ष के प्रति निकाय का कोणीय संवेग और दिये हुए अक्ष के प्रति संहति-केन्द्र का (जिसमें निकाय की सारी संहति हो) कोणीय संवेग। प्रस्तुत स्थिति में उपर्युक्त पद शून्य हो जाता है, क्योंकि दोलन-पहिये के संहति-केंद्र का वह कोणीय संवेग जो सारी घड़ी के दोलन के कारण हुआ था, M_p में सम्मिलित कर लिया गया था।

(16) $$M_p = I\dot{\phi}\ ,\ I = m_p a^2$$

रख देते है। m_p घड़ी की भारी महति है और a उसकी O से मापी हुई घूर्णन-त्रिज्या है।[1] दोलन-पहिये के दोलनो को हम स्वीकृततया ज्यावक्रीय मान लेंगे, जिन्हें इस कारण $\phi_b = \alpha \sin \omega t$

द्वारा वर्णित करेंगे। कोण ϕ_b का शीर्ष B है। तो दोलन-पहिये का कोणीय सवेग होगा

(17) $$M_b = m_b\,\omega b^2 \alpha \cos \omega t,$$

जहां m_b दोलन-पहिये की संहति है और b उसकी, B से मापी गयी, घूर्णन त्रिज्या।

जैसे कि यौगिक लोलक मे [समी० (16·1], बाह्य बल का घूर्ण है—

(18) $$L = -m_p\, gs\phi,$$

जहां, साधारण प्रथानुसार, छोटे ϕ के लिए सन्निकटन कर दिया है। यहां s घड़ी के गुरुत्वकेंद्र की O से दूरी है और ϕ वह कोण है जो O पर गुरुत्वकेंद्र मे जाती हुई रेखा ऊर्ध्वाधर से बनाती है। अब हम (13·9) का अनुप्रयोग करते है, उसमे (15), (16), (17) और (18) में दिये हुए मानो का उपयोग करते हैं, और अपने निकाय के लिए निम्नलिखित गति-समीकरण प्राप्त करते है—

(19) $$\ddot{\phi} + \frac{gs}{a^2}\phi = \frac{m_b}{m_p}\left(\frac{b}{a}\right)^2 \alpha\, \omega^2 \sin \omega t$$

यह समीकरण उस प्रकार के दोलन को निरूपित करता है जिसकी विवृति § १९ में अनवमदित प्रणोदित दोलन की भांति की गयी थी। हम फिर

$$\frac{gs}{a^2} = \omega_o^2$$

रख लेंगे जहां, याद होगा, ω_o लोलकीय गति की निजी आवृत्ति है। इसके अतिरिक्त निम्नलिखित सक्षेप भी कर लीजिए—

$$c = \frac{m_b}{m_p}\left(\frac{b}{a}\right)^2 \alpha\, \omega^2 \ll 1.$$

तो अब समीकरण (19) हो जाता है

(20) $$\ddot{\phi} + \omega_o^2 \phi = c \sin \omega t$$

1. Radius of gyration 2. Sinusoidal

आदि के प्रतिबंधों को संतुष्ट करनेवाला साधन कि $t=0$ पर $\phi=0$, $\dot{\phi}=0$ निम्नलिखित है

$$\phi=\frac{c}{\omega_0^2-\omega^2}\left(\sin\omega t-\frac{\omega}{\omega_0}\sin\omega_0 t\right). \tag{21}$$

नियतांक c इतना छोटा है (गुणनखंड m_b/m_p) कि दोलन दृश्य परिमाण का केवल तभी होगा जब कि संबंध $\omega_0=\omega$ का सन्निकटन होता हो, अर्थात् जब बाह्य लोलकीय दोलनों और दोलन-पहिये के आंतरिक दोलनों के बीच लगभग अनुनाद विद्यमान हो। आश्चर्य की बात यह प्रकट होती है कि यह अनुनाद न्यूनाधिकतया तभी होता है जबकि जेबघड़ी का आकार बहुत छोटा न हो (रमणियों की घड़ियाँ इस काम के लिए ठीक नहीं होतीं)।

समीकरण (21) और भी बतलाता है कि आयाम की मूर्च्छना और अनुनाद को पहुँचना $(\omega\to\omega_0)$ दोनों साथ ही साथ चलते हैं। संकरों का आवर्तकाल T इस अभियाचना द्वारा निर्धारित होता है कि

$$\omega T=\omega_0 T\pm 2\pi, \tag{22}$$

और इसलिए उसका मान होगा

$$T=\frac{2\pi}{|\omega-\omega_0|} \tag{22a}$$

संकरों[1] के दो निष्पदों[2] के बीच होनेवाले लोलकीय दोलनों को गिनकर वह बहुत ही ठीक-ठीक निकाला जा सकता है और इसलिए वह अनुनाद के अंश की सुलभ और यथार्थ मात्रा उपलब्ध कराता है। इस बारे में हम आकृति ३२ को देख सकते हैं जो, जैसा कि कह आये हैं, वैसा ही अवकल समीकरण को प्रदर्शित करती है, जैसा कि समी० (20)। परंतु यह याद रखना चाहिए कि रेखाकृति में हमने पूर्ण अनुनाद अर्थात् $T=\infty$ मान लिया था।

यदि घड़ी को थोड़ी देर के लिए अपने आप पर छोड़ दें तो देखेंगे कि संकर समाप्त हो जाते हैं। इसका कारण प्रकटतया घर्षण है (अवलंबन-स्थान पर और वायु का घर्षण), जिनकी अब तक उपेक्षा हुई है। यह घर्षण घड़ी की गति में स्वतंत्र लोलकीय दोलनों के अंशदान को अवमंदित कर देता है, केवल दोलन-पहिया-प्रणोदित दोलन रह जाते हैं; केवल इस, उत्तर्युक्त, अंशदान के आयाम में घर्षण के कारण कुछ कमी हो जाती है (मिलाइए, उदाहरणत, आकृति ३३)। हम इसका

1. Beats 2. Nodes

कारण यों बता सकते हैं—आदि मे प्रणोदित दोलन अपनी पूरी मात्रा मे विद्यमान होता है और स्वतत्र लोलकीय दोलन इतनी मात्रा मे उत्तेजित होता है कि $t=0$ पर वह प्रणोदित दोलन को शून्यीकृत कर कर देता है, जो कि आदि के प्रतिबधो से सहमत है कि $\phi=\dot{\phi}'=0$ वास्तव मे, घडी की आदि की गतिहीन दशा एक ऐसे आवेग के कारण समझी जा सकती है जो कि दोलन-पहिया-कारित दोलनो को ठीक शून्यीकृत कर देता है। इस आवेग के प्रभाव को घर्षण धीरे-धीरे नष्ट कर देता है, जिस कारण दोलन-पहिया-कारित केवल प्रणोदित दोलन ही रह जाते हैं।

घड़ी का दृष्टांत इन बातो के साहित्य मे पहले-पहल सन् १९०४ के "एलेक्ट्रोटेकनीश जाइटश्रिफ्ट"[1] मे, तुल्यकालिक यत्रजात के "आखेट" की घटना के सबंध मे, प्रकाशित किया गया था। यह बात उन दिनो के लिए समयानुरूप एव आश्चर्यजनक थी। दो तुल्यकालिक प्रत्यावर्त्तक एक ही विद्युत्पथ को समातरतया विद्युत्-शक्ति पहुँचाते हुए, अनुनाद होने के समय, अपनी गतियो तथा धाराओ मे अवाछित उच्चावचन दिखलाते हैं। हमारी घडीके संकरो का तथा जिन युग्मित दोलनों का हम अभी विश्लेषण कर चुके हैं, उनके युग्मन और अनुनाद का वे बहुत ही आवर्धित चित्र प्रस्तुत करते हैं।

1. "Elektrotechnische Zeitschrift"

चतुर्थ अध्याय

दृढ पिंड

§ २२. दृढ पिंडों की चल-गतिकी

प्रकरण ७ के प्रारंभ में हमने देखा था कि दृढ पिंड छः स्वतंत्रता-संख्याओं से संपन्न हैं; इन्हें हम स्थानांतरण की तीन और घूर्णन की तीन संख्याओं में उपविभाजित करेंगे।

पहले हम पिंड की दो विभिन्न अवस्थाओं पर विचार करें—"आदि स्थान" और "अंतिम स्थान" की अवस्थाओं पर। पिंड के किसी भी एक बिंदु को "अभिदेश बिंदु" O निर्वाचित कर लेते है, और उसके चारों ओर (कहिए कि मात्रक त्रिज्या[1] का) एक अभिदेश गोल[2] खींच लेते हैं। इस गोल पर दो बिंदु A और B चिह्नित कर लेते हैं। एक बार ये तीन बिंदु, O, A, B अपने आदि स्थानों से अंतिम स्थानों को ले जाये गये तो दृढ पिंड के अन्य सभी बिंदु उसी प्रकार अपने-अपने अंतिम ठिकानों पर पहुँच गये।

पहले हम बिंदु O को उसके आदि स्थान O_1 से उसके अंतिम स्थान O_2 को ले जाते हैं। समझिए कि यह एक समांतर विस्थापन अर्थात् *स्थानांतरण* द्वारा प्राप्त किया जाता है, जिसमे पिंड का प्रत्येक बिंदु उसी ऋजुरेखीय विस्थापन $O_1 \rightarrow O_2$ के वश होता है। *इस प्रकार स्थानांतरण की तीनों स्वतंत्रता-सख्याएँ हो गयी।*

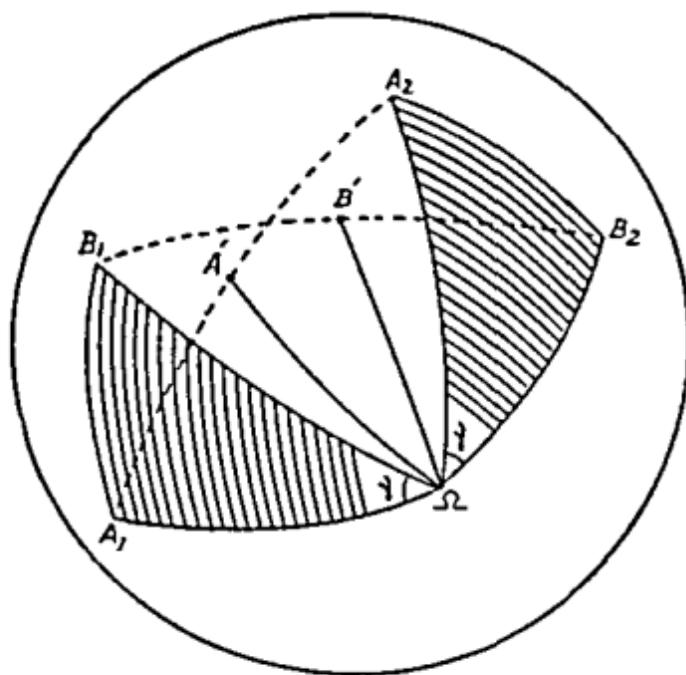
गोला K_1 जो O_1 के चारो ओर खीचा गया था, अब O_2 के चारो ओर रचित समत गोले K_2 से सपात में[3] है। परतु, व्यापकतया, A, B बिंदुओ के स्थानो के लिए ऐसा नही होगा। गोले K_1 पर इनके स्थानो को A_1, B_1 कहेंगे, गोले K_2 पर A_2, B_2। अब दिखायेंगे कि बिंदु $O_1{=}O_2$ के प्रति एक ऐसा निश्चित घूर्णन है जो A_1, B_1 बिंदुओं को A_2, B_2 तक पहुँचा देगा। इस घूर्णन का अक्ष और कोण, घूर्णन की तीनां स्वतत्रता–संख्याएँ देते है जो स्थानांतरण की तीन स्वतंत्रता-सख्याओ से जोड़नी होगी।

1. Unit radius   2. Sphere of reference

3. In coincidence,

घूर्णन-अक्ष की रचना के लिए, अर्थात् उस बिंदु Ω के निर्धारण के लिए जहाँ अक्ष मात्रक गोले को काटता है, A_1 को A_2 से तथा B_1 को B_2 से वृहत् वृत्तों के चापों द्वारा मिला दीजिए। इन चापों के केंद्रों A' और B' पर उन चापों के दो लम्बवत् द्विभाजक[1] खड़े करिए। इन दोनों की काट ही इष्ट बिंदु Ω है। घूर्णन-कोण, जिसे Ω भी कहेंगे, निम्नलिखित होगा—

(1) $$\Omega = \measuredangle A_1 \Omega A_2 = \measuredangle B_1 \Omega B_2$$

इन दो कोणों की समता, आकृति ३९ में रेखान्वित स्थान द्वारा दिखाये गये गोलीय त्रिकोणों (त्रिभुजों), $A_1 \Omega B_1$, $A_2 \Omega B_2$ की सर्वांगसमता का परिणाम है।

आ० ३९—बिंदु Ω के लिए रचना।

एक स्थिर बिंदु O के प्रति घूर्णन करते हुए दृढ पिंड के लिए घूर्णन-अक्ष बिंदु Ω ही निर्धारित करता है। यह रेखाचित्र यह भी इंगित करता है कि दो परिमित घूर्णनों का परिणामी कैसे निकाला जा सकता है।

इन दोनों त्रिकोणों की संगत भुजाएँ परस्पर बराबर हैं। इससे निकलता है कि आ०

1. Perpendicular bisectors

३९ में γ द्वारा दिखलाये हुए दो कोण एक दूसरे के बराबर हैं। इन दोनों कोणों के किसी एक को यदि पूरे कोण $A_1 \ \Omega \ B_2$ से घटायें तो समी० (1) का दाहिना या बिचला अग प्राप्त होता है। यह समीकरण प्रकटतया कहता है कि वही घूर्णन Ω न केवल बिंदु A_1 को A_2 पर पहुँचाता है, वरन् बिंदु B_1 को भी B_2 पर पहुँचा देता है।

यहाँ तक स्थानातरण के परिणाम और दिशा काफी दूरस्थ सीमाओं के बीच मे रहते हुए अभी कुछ भी* हो सकते हैं, क्योंकि अभिदेश बिंदु[1] O के निर्वाचन में हमें पूर्ण स्वतंत्रता है। दूसरी ओर, घूर्णन का परिमाण और अक्ष अभिदेश बिंदु के निर्वाचन से स्वतंत्र हैं। क्योकि समझिए O के स्थान पर किसी अन्य अभिदेश बिंदु O' का निर्वाचन कर लेते हैं। दृढ़ पिंड के किसी दिये हुए पूर्ण विस्थापन के लिए O और O' से किये हुए स्थानान्तरणो का अतर भी स्थानांतरण ही होगा। परंतु यह उत्तरोक्त स्थानातरण K_1 और K_2 गोलो पर A, B बिंदुओ के स्थानों पर कोई प्रभाव नही डालता। इसका परिणाम यह निकला कि आ० ३९ की रचना बिना किसी परिवर्तन के प्रस्तुत स्थिति के लिए भी लागू है और न केवल वही पहले का घूर्णन कोण Ω प्रदान करती है, वरन् अभिदेश बिंदु O' से जाता हुआ एक घूर्णन-अक्ष भी, जो पहले प्राप्त किये हुए अक्ष के समांतर होगा।

दृढ पिंड के परिमित विस्थापनो से कही अधिक महत्त्व के उसके वे अत्यणु[2] विस्थापन हैं, जो किसी परिमित गति के होने के लिए, एक के बाद दूसरे, अनवरत होते रहते हैं। इस लिए अब हम यह मान लेंगे कि स्थानातरण का परिमाण O_1O_2 और घूर्णन कोण Ω स्वेच्छया छोटे है। उनको तदनुसार छोटे कालांतर Δt से भाग दे दीजिए। इस प्रकार हम स्थानातरण का वेग u और घूर्णन का कोणीय वेग[3] ω प्राप्त करते हैं—

$$u = \frac{\overrightarrow{O_1O_2}}{\Delta t}, \quad \omega = \frac{\Omega}{\Delta t}. \tag{2}$$

*. प्रकरण २३ को शेषपूर्ति में देखेंगे कि हम, विशेषतया, स्थानांतरण की दिशा को घूर्णन अक्ष के समांतर कर सकते हैं। इसको "पेच विस्थापन" (स्क्रू डिसप्लेस-मेण्ट) कहते हैं।

1. Reference point

2. Infinitesimal 3. Angular velocity

पहले की भाँति, कोणीय वेग अभिदेश बिंदु O के निर्वाचन से स्वतन्त्र है, परन्तु **r** इस निर्वाचन पर निर्भर करता है। मोटा टाइप यह सूचित करता है कि ω को भी सदिश समझना होगा, जो न केवल कोणीय वेग का परिमाण, वरन् घूर्णन की अक्षीय दिशा भी व्यक्त करता है।

हम यह सहज ही दिखा सकते हैं कि ω में सदिश के लक्षण अवश्य होने हैं। पृष्ठ ९६ की आ० १५ और समी० (13 4) में आभासी घूर्णन पर विचार-आलोचना करते हुए हमने यह संबंध व्युत्पन्न किया था कि—

(3) $$\delta \mathbf{s} = \delta \boldsymbol{\phi} \times \mathbf{r}.$$

यदि अब हम आभासी घूर्णन[1] $\delta \boldsymbol{\phi}$ से कोणीय वेग $\omega = \frac{d\boldsymbol{\phi}}{dt}$ को जा पहुँचे और घूर्णन कारित आभासी विस्थापन $\delta \mathbf{s}$ से वेग $\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{s}}{dt}$ को, तो (3) से प्राप्त करते हैं कि—

(4) $$\mathbf{w} = \omega \times \mathbf{r}$$

जैसे कि आ० १५ में **r**, घूर्णन अक्ष पर स्थित अभिदेश बिंदु O से बिंदु P तक की सदिश त्रिज्या है, जिसका वेग **w** निर्धारित करना है।

अब दृढ पिंड के बिंदु P की गति पर दो परस्परानुगामी अत्यणु घूर्णनों $\omega_1\, dt$ और $\omega_2\, dt$ के पूरे प्रभाव पर विचार कीजिए। यहाँ अभिदेश बिंदु O दोनों ω_1 और ω_2 के अक्षों के लिए उभयनिष्ठ है। हम निम्नलिखित प्राप्त करते हैं—

(4a) $$\mathbf{w}_1 = \omega_1 \times \mathbf{r}\,,\ \mathbf{w}_2 = \omega_2 \times \mathbf{r},$$
$$\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = (\omega_1 + \omega_2) \times \mathbf{r}$$

इन समीकरणों के सबसे पिछले में वायाँ अंग वह वेग $\mathbf{w}_r$ है जो $\mathbf{w}_1$ और $\mathbf{w}_2$ से बनता है। (4) से तुलना करने पर देखते हैं कि—

(5) $$\omega_r = \omega_1 + \omega_2$$

उसी भाँति परिणामी कोणीय वेग है जो दृढ़ पिंड पर अपने प्रभाव में दो घूर्णनों $\omega_1\, dt$ और $\omega_2\, dt$ के तुल्य है। इससे परिणाम निकलता है कि **कोणीय वेगों का योग सदिशों की भाँति होता है**। जैसा कि सदिशों में होता है, योग में उनका क्रम निष्प्रयोजनीय है अर्थात् उनका योग क्रमविनिमयशील[2] है, क्योंकि—

(6) $$\omega_1 + \omega_2 = \omega_2 + \omega_1$$

1. Virtual rotation 2. Commutative

इन दोनों नियमों में से कोई भी परिमित घूर्णनों के लिए वैध नहीं है। उनका संयोजन सदिश-बीजगणित के सरल नियमों का अनुसरण नहीं करता, किन्तु हैमिल्टन द्वारा आविष्कृत चतुर्वर्गायनीय बीजगणित[1] का। और भी यह कि दो परिमित घूर्णनों का प्रभाव उनके क्रम पर निर्भर करता है। इस प्रकार के दो घूर्णनों का क्रमविनिमय नहीं होता।

इस स्थान पर ध्रुवीय और अक्षीय सदिशों के भेद पर विचार-आलोचना करना सुविधाजनक है।

ध्रुवीय सदिशों के उदाहरण हैं—वेग, त्वरण, बल, सदिश त्रिज्या, इत्यादि। ये तीराग्रयुक्त निर्देशित रेखों द्वारा निरूपित किये जा सकते हैं। निर्देशांक प्रणाली के घूर्णन में उनके समकोणिक घटकों[2] का रूपान्तरण निर्देशांकों की ही भाँति होता है, अर्थात् $+1$ सारणिक[3] के लम्बकोणीय रूपांतरण की व्यवस्था के अनुसार निर्देशांक प्रणाली के मूल बिंदु से होकर किये हुए प्रतिलोमीकरण में, जिसमें x, y, z क्रमात् $-x$, $-y$, $-z$ द्वारा प्रतिस्थापित किये जाते हैं, और रूपान्तरण का सारणिक -1 होता है, ध्रुवीय सदिशों के घटकों के चिह्न बदल जाते हैं।

कोणीय वेग, कोणीय त्वरण, ऐंठ और कोणीय संवेग अक्षीय सदिशों के उदाहरण हैं। अपनी-अपनी प्रकृति के अनुसार वे एक अक्ष द्वारा निरूपित किये जाते हैं, जिस पर घूर्णन का परिमाण और उसकी दिशा सूचित होती है (उदाहरणत., एक वक्र तीर और एक संख्या द्वारा)। इसके स्थान पर यदि उन्हें अक्ष पर लगाये हुए एक संगत परिमाण के तीर द्वारा निरूपित करें तो तीर की दिशा के बारे में कोई कैसा भी समझौता कर लेना होगा, जैसे कि दक्षिणावर्त पेच[4] का कायदा। निर्देशांक प्रणाली के शुद्ध घूर्णन में अक्षीय सदिशों के समकोणिक घटक अपने सगी तीरों के घटकों की भाँति रूपातरित होते हैं, अर्थात् लम्बकोणीयतया। परन्तु निर्देशांकों के मूलबिंदु से होकर किये हुए प्रतिलोमीकरण[5] में ये समकोणिक घटक चिह्न नहीं बदलते। इस प्रकार के रूपातरण में दक्षिणावर्त पेच के कायदे के स्थान पर वामावर्त पेच का कायदा लेना होगा। यह इस बात के अनुरूप है कि मूलबिंदु से होनेवाले प्रतिलोमीकरण में दक्षिणावर्त निर्देशांक प्रणाली वामावर्त हो जाती है।

1. Algebra of quaternions
2. Rectangular components
3. Determinant
4. Right handed screw
5. Inversion

दो ध्रुवीय सदिशों का सदिश-गुणनफल एक अक्षीय सदिश होता है (उदाहरणतः, बल का घूर्ण)। अक्षीय सदिश और ध्रुवीय सदिश का सदिश गुणनफल ध्रुवीय सदिश होता है [यथा, समी० (४) में वेग **w**]। निर्देशांकों के प्रतिलोमीकरण[1] के अधीन इन गुणनफलों के आचरण की पड़ताल कर, पाठक सहज ही इस बात में अपना निश्चय कर सकता है*।

इन अप्रासंगिक बातों के बाद हम दृढ़ पिंड की चल-गतिकी को लौटते हैं। उसके प्रत्येक बिंदु की गति समी० (2) के स्थानान्तरण संबंधी वेग **u** और घूर्णन संबंधी समी० (4) के वेग **w**, इन दो वेगों की बनी होती है। अतएव दृढ़ पिंड के किसी भी बिंदु का वेग **v** होगा—

$$\mathbf{v}=\mathbf{u}+\omega\times\mathbf{r}. \tag{7}$$

अभिदेश बिंदु O का निर्वाचन पूर्णतया हमारे हाथों में है। उसके लिए

$$\mathbf{v}=\mathbf{u} \tag{7a}$$

होता है। बहुत-सी बातों के लिए O को संहति[2] केन्द्र G पर रख लेना लाभकारी होता है। यह प्रकट हो जायगा यदि, उदाहरणतः, हम पिंड की गतिज ऊर्जा निकालना चाहें। यहां

$$T=\int\frac{dm}{2}\mathbf{v}^2. \tag{8}$$

इसके लिए (7) की सहायता से निम्नलिखित समीकरण बनाते हैं—

$$\mathbf{v}^2=\mathbf{u}^2+(\omega\times\mathbf{r})^2+2\mathbf{u}.(\omega\times\mathbf{r}) \tag{8a}$$

और तदनुसार T को तीन भागों में तोड़ देते हैं—

$$T=T_{transl}+T_{rot}+T_m \tag{9}$$

$$\left[=T_{\text{स्थानांत}}+T_{\text{घूर्णन}}+T_{\text{मिश्रित}}\right],$$

* इससे आगे हम केवल मात्र ऐंठ **L** और कोणीय वेग ω का उल्लेख करेंगे, यहां पाठक को याद रखना चाहिए कि इससे क्रमात् ऐंठ और कोणीय वेग के निरूपक अक्षीय सदिशों का मतलब है। दूसरी ओर, जब ऐंठ के समतल और कोणीय वेग के समतल का उल्लेख होगा तब उनसे, स्वभावतः, अक्षीय सदिशों, क्रमात् **L** और ω के लंबवत् समतलों का मतलब होगा।

1. Inversion of co-ordinates 2. Mass center

जहाँ T_m "मिश्रित" ऊर्जा है जो स्थानांतरण और घूर्णन के मेल से निर्धारित होती है।

कारण कि **u** का मान सभी बिंदुओं dm के लिए वही है, हम प्रकटतया प्राप्त करते हैं —

(10) $$T_{transl}=\frac{u^2}{2}\int dm=\frac{m}{2}u^2.$$

T_m निकालने के लिए हम निम्नलिखित रूपांतरण करते हैं —

(11) $$\begin{aligned} T_m &= \int \mathbf{u}.\ \omega\times\mathbf{r}\ dm \\ &= \mathbf{u}.\ \omega\times\int \mathbf{r}\ dm \\ &= m\mathbf{u}\ \omega\times\mathbf{R}, \end{aligned}$$

जहाँ **R** बिंदु O से सहति-केंद्र G तक का निर्देशित खंड है—

(11a) $$\mathbf{R}=\frac{1}{m}\int \mathbf{r}\ dm$$

जैसे समी० (13.3b) में। अब यदि O को G से सपाती कर दें, तो $\mathbf{R}=0$ और, (11) से

(11b) $$T_m=O,$$

तो अब गतिज ऊर्जा T केवल-मात्र स्थानांतरण कारित ऊर्जा T_{transl} और घूर्णन कारित ऊर्जा T_{rot} का योग हो जाती है। चलते-चलते, यह भी लक्ष्य कीजिए कि यदि पिंड किसी स्थिर बिंदु के प्रति घूर्णन करता है और यदि यही बिंदु अभिदेश बिंदु O निर्वाचित कर लिया जाय तो न केवल T_m वरन् T_{transl} भी शून्य हो जाता है (क्योंकि दोनों स्थितियों में $\mathbf{u}=0$), अतएव

(11c) $$T=T_{rot}$$

अब गतिज ऊर्जा के घूर्णनीय अंशदान पर हम ध्यान केंद्रित करेंगे। यदि $\omega\times\mathbf{r}$ के घटकों का वर्ग करें तो (8a) के मध्यपद से प्राप्त करते हैं —

(12) $$\begin{aligned} 2\,T_{rot} &= \omega_x^2\int(y^2+z^2)dm+\omega_y^2\int(z^2+x^2)dm \\ &\quad+\omega_z^2\int(x^2+y^2)dm \\ &\quad-2\,\omega_y\omega_z\int yz\,dm-2\omega_z\omega_x\int zx\,dm-2\omega_x\omega_y\int xy\,dm. \end{aligned}$$

निम्नलिखित संकेतन

(12a) $$\begin{aligned} I_{xx} &= \int(y^2+z^2)dm\ \ldots \\ I_{xy} &= \int xy\,dm\ \ \ldots \end{aligned}$$

के साथ, (12) देता है

$$(12b)\qquad 2T_{rot}=I_{xx}\omega_x^2+I_{yy}\omega_y^2+I_{zz}\omega_z^2 -2I_{yz}\omega_y\omega_z-2I_{zx}\omega_z\omega_x-2I_{xy}\omega_x\omega_y.$$

(11.3) में प्रविष्ट परिभाषा के अनुसार, I_{xx} है सहति-वितरण का अवस्थितित्व घूर्ण x-अक्ष के प्रति। I_{yy} और I_{zz} के लिए भी सगत बात लागू है। I_{xy}, I_{yz}, I_{zx} को हम अवस्थितित्व गुणनफल कहेंगे (कभी-कभी इनके लिए "अपकेन्द्र घूर्ण" नाम का पर्यायतया व्यवहार किया जाता है)। I_{xx} को भी बिना किसी द्वयर्थकता के हम I_x मे सक्षिप्त कर सकते है।

(11.5) के अनुसार (12) के बाये अग को $I\omega^2$ रख देते हैं और सक्षिप्तिकाओ

$$(13)\qquad \frac{\omega_x}{\omega}=\alpha\,,\ \frac{\omega_y}{\omega}=\beta,\ \frac{\omega_z}{\omega}=\gamma,$$

के साथ प्राप्त करते है—

$$(13a)\qquad I=I_{xx}\alpha^2+I_{yy}\beta^2+I_{zz}\gamma^2-2I_{yz}\beta\gamma-2I_{zx}\gamma\alpha-2I_{xy}\alpha\beta.$$

α, β, γ सदिश ω की दैशिक कोज्याएँ हैं और ω का अक्ष दृढ पिड में कही-भी स्थापित कर दिया जाता है। (13a) मे परिणाम निकलता है कि एक बार छः परिमाण I_{ik} दे दिये जायँ तो किसी अक्ष के प्रति अवस्थितित्व घूर्ण पूर्णतया निर्धारित हो जाता है।

हमारे I_{ik} के प्रकार के परिमाण-षष्ठक[1] को टेन्सर (*Tensor* तानक) या, अधिक ठीक तरह से, समित या ससमित टेंसर कहते हैं। इस नाम का जन्म प्रत्यास्थतावाद में हुआ था जहाँ प्रतिबल और कर्ष[2] के टेन्सर प्रधान भाग लेते हैं। व्यापकतया, टेंसर अति उपयुक्ततया एक वर्ग अनुसूची की भाँति लिखा जाता है। प्रस्तुत स्थिति में यह निम्नलिखित होगा—

$$(13b)\qquad I_{ik}\quad \begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

जहाँ $I_{xy}=I_{yx}$ . . .

प्रारभिक दृष्टिकोण से टेन्सरों का गणित सदिशों के गणित से कम साकार और सुबोध है। सदिश को रेखाखड द्वारा निरूपित करते हैं, परंतु टेन्सर के ज्यामितीय निरूपण के लिए हमें द्वितीय घात के तल की शरण लेनी पडेगी। प्रस्तुत स्थिति में यह "टेन्सर तल" इस प्रकार प्राप्त होता है कि हम —

1. A sextet of magnitudes 2. Stress & strain tensors

से भिन्न निर्देशाक प्रणाली मे रचा जाय तब मन ही मन मे मुख्य अक्षों की तीन दैशिक परामितियाँ जोड़ लेनी चाहिए। इस प्रकार फिर समित[1] टेसर के लक्षण बतानेवाले छः परिमाणों पर पहुँचते हैं।

महति वितरण के प्रत्येक समिति-समतल स्वभावतया घूर्णीय दीर्घवृत्तज के भी समिति-समतल होते हैं। घूर्णनीय समिति वाले महति वितरण का एक घूर्णीय परिक्रमण-दीर्घवृत्तज होता है, अर्थात् "आकृतीय अक्ष" की ओर मुख्य अक्ष होने के अतिरिक्त उसके अनन्ततया अनेक अन्य "निरक्षीय"[2] मुख्य अक्षवृन्द होते हैं। दृष्टांत की भाँति हम दो प्रकार के लट्टुओं का जिक्र कर सकते हैं—एक तो शंकु के आकार का, जो खिलौने की भाँति काम मे आता है, और दूसरा गतिचालक चक्र के रूप का, जो बहुधा निदर्शनकार्यों के लिए व्यवहार मे लाया जाता है (आ० ४० ए और बी)। प्रथम प्रकार में, पिंड के अक्ष के प्रति का अवस्थितित्व घूर्ण लघुतम होता है। अतएव संगत मुख्य अक्ष निरक्षीय अक्षों से अधिक लंबा होता है (सवत्र $\rho = I^{\frac{1}{2}}$ के विचार से)। यहाँ एक **उच्चाक्ष उपगोल**[3] प्राप्त होता है। दूसरे प्रकार में आकृतीय अक्ष के प्रति का अवस्थितित्व घूर्ण महत्तम होता है। अतएव संगत मुख्य अक्ष, उसी कारणवश, निरक्षीय अक्षों से छोटा होता है और परिणाम होता है **निम्नाक्ष उपगोल**।[4]

प्रसंगवश, घूर्णीय दीर्घवृत्तज परिक्रमण दीर्घवृत्तज हो जाता है, न केवल घूर्णनीय समिति वाले महति वितरण के लिए, अपि च जब कभी भी दो से अधिक समिति-समतल किसी अक्ष से होकर जाते हैं, यथा उदाहरणार्थ, वर्ग या षड्भुजीय समपार्श्व[5] में।

इसी प्रकार दीर्घवृत्तज भ्रष्ट होकर गोल बन जाता है, न केवल गोलीयतया समिति वितरण मे, वरन्, उदाहरणार्थ, घनात्मक वितरण जैसी स्थितियो मे भी, क्योंकि यहाँ टेसर तल के दीर्घवृत्तजीय रूप से संगत जितने समतल हो सकते हैं, उनसे अधिक समितिसमतल विद्यमान होते हैं। ऐसी स्थिति मे हम "गोलीय लट्टू" की बात करते हैं। गोलीय लट्टू (दे० आ० ४० सी) मे कोई भी अक्ष मुख्य अक्ष है।

§ २३ दृढ़ पिंडों की स्थैतिकी

यह विषय निर्माण संबंधी यांत्रिकी के संपूर्ण क्षेत्र, अर्थात् सेतुओं, पुश्तों, मेहराबों आदि की रचना का सैद्धांतिक आधार है। अतएव यांत्रिक इंजीनियरी की

1. Symmetrical 2. *Equatorial*
3. Prolate spheroid 4. Oblate spheroid 5. Prism

$$(14) \qquad \alpha = \frac{\xi}{\rho}, \;\; \beta = \frac{\eta}{\rho}, \;\; \gamma = \frac{\zeta}{\rho},$$

रख देते हैं जहाँ ξ, η, ζ से कार्तीय निर्देशांकों का मतलब है। अतएव

$$\rho = (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^{\frac{1}{2}}$$

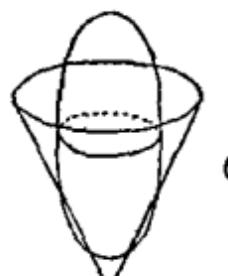
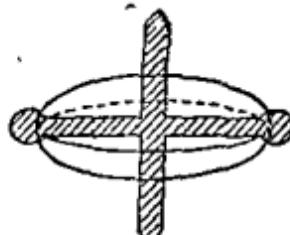
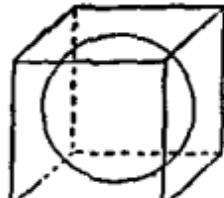
को विंदु O से सदिश त्रिज्या समझना चाहिए। ρ को अब $I^{-\frac{1}{2}}$ के बराबर रख देते हैं और O होकर जाते हुए प्रत्येक अक्ष पर I नहीं, वरन् $I^{\frac{1}{2}}$ का व्युत्क्रम जितना दैर्घ्य लगा देते हैं (नहीं तो द्वितीय घात का तल न प्राप्त होगा)। इस प्रकार (13*a*) से प्राप्त करते हैं—

$$(15) \qquad 1 = I_{xx}\xi^2 + I_{yy}\eta^2 + I_{zz}\zeta^2 - 2I_{yz}\eta\zeta - 2I_{zx}\zeta\xi - 2I_{xy}\xi\eta.$$

संभावित भ्रष्टताओं को छोड़कर यह दीर्घवृत्तज का समीकरण है, क्योंकि परिमित संहति वितरण के लिए I व्यापकतया शून्य से अधिक होता है। समी० (15) द्वारा निरूपित तल **घूर्णीय दीर्घवृत्तज**[1] कहाता है।

यदि निर्देशाकों का रूपातरण इस भाँति कर दें कि वे दीर्घवृत्तज के मुख्य अक्षों से संपाती हो जायँ तो इस रूप का समीकरण प्राप्त होता है—

$$(15a) \qquad 1 = I_1\xi_1^2 + I_2\xi_2^2 + I_3\xi_3^2,$$

जहाँ I_1, I_2, I_3 तीन **मुख्य अवस्थितित्व घूर्ण** हैं। मुख्य अक्षों के लिए अवस्थितित्व गुणनफल शून्य हो जाते हैं, और इसे मुख्य अक्षों की एक परिभाषा समझ सकते हैं। (13*b*) की टेन्सर अनुसूची विकर्ण[2] के रूप की रह जाती है। जब टेंसर मुख्य अक्षों

आ० ४० ए–सी.—(ए) खेल के लट्टू का घूर्णीय दीर्घवृत्तज; (बी) गतिपालक चक्र लट्टू का घूर्णीय दीर्घवृत्तज; (सी) गोलीय लट्टू का एक उदाहरण।

1. Momental ellipsoid 2. Diagonal

से भिन्न निर्देशाक प्रणाली में रखा जाय तब मन ही मन मे मुख्य अक्षों की तीन दैशिक परामितियाँ जोड़ लेनी चाहिए। इस प्रकार फिर समित[1] टेंसर के लक्षण बनानेवाले छः परिमाणों पर पहुँचते है।

संहति वितरण के प्रत्येक ममिति-समतल स्वभावतया घूर्णीय दीर्घवृत्तज के भी समिति-समतल होते हैं। घूर्णनीय समिति वाले संहति वितरण का एक घूर्णीय परिक्रमण-दीर्घवृत्तज होता है, अर्थात् "आकृतीय अक्ष" की ओर मुख्य अक्ष होने के अतिरिक्त उसके अनन्ततया अनेक अन्य "निरक्षीय"[2] मुख्य अक्षवृन्द होते हैं। दृष्टात की भाँति हम दो प्रकार के लट्टुओं का जिक्र कर सकते हैं—एक तो शंकु के आकार का, जो खिलौने की भाँति काम मे आता है, और दूसरा गतिचालक चक्र के रूप का, जो बहुधा निदर्शनकार्यो के लिए व्यवहार मे लाया जाता है (आ० ४० ए और बी)। प्रथम प्रकार में, पिंड के अक्ष के प्रति का अवस्थितित्व घूर्ण लघुतम होता है। अतएव सगत मुख्य अक्ष निरक्षीय अक्षों से अधिक लंबा होता है (संबंध $\rho = I^{-\frac{1}{2}}$ के विचार से)। यहाँ एक **उच्चाक्ष उपगोल**[3] प्राप्त होता है। दूसरे प्रकार में आकृतीय अक्ष के प्रति का अवस्थितित्व घूर्ण महत्तम होता है। अतएव सगत मुख्य अक्ष, उसी कारणवश, निरक्षीय अक्षों से छोटा होता है और परिणाम होता है **निम्नाक्ष उपगोल**।[4]

प्रसगवश, घूर्णीय दीर्घवृत्तज परिक्रमण दीर्घवृत्तज हो जाता है, न केवल घूर्णनीय समिति वाले संहति वितरण के लिए, अपि च जब कभी भी दो से अधिक समिति-समतल किसी अक्ष से होकर जाते हैं, यथा उदाहरणार्थ, वर्ग या षड्भुजीय समपार्श्व[5] मे।

इसी प्रकार दीर्घवृत्तज भ्रष्ट होकर गोल बन जाता है, न केवल गोलीयतया समिति वितरण मे, वरन्, उदाहरणार्थ, घनात्मक वितरण जैसी स्थितियों मे भी, क्योंकि यहाँ टेंसर तल के दीर्घवृत्तजीय रूप से सगत जितने समतल हो सकते हैं, उनसे अधिक समितिसमतल विद्यमान होते हैं। ऐसी स्थिति मे हम "गोलीय लट्टू" की बात करते हैं। गोलीय लट्टू (दे० आ० ४० सी) में कोई भी अक्ष मुख्य अक्ष है।

§ २३ दृढ़ पिंडों की स्थैतिकी

यह विषय निर्माण संबंधी यान्त्रिकी के संपूर्ण क्षेत्र, अर्थात् सेतुओं, पुश्तों, मेहराबों आदि की रचना का सैद्धातिक आधार है। अतएव यान्त्रिक इंजीनियरों को

1. Symmetrical 2. Equatorial
3. Prolate spheroid 4. Oblate spheroid 5. Prism

पाठ्य पुस्तकों में गणितीयतया एवं लेखाचित्रीयतया दोनों भाँति, उसकी अतीव ब्योरेवार विवृत्ति होती है। यहाँ हम विषय की केवल व्यापक बातें ही लेंगे।

(१) साम्यावस्था के प्रतिबंध

साम्यावस्था के सभी प्रश्नों की भाँति ये प्रतिबंध भी आभासी कर्म के सिद्धांत के अंतर्गत हैं। कारण कि यह सिद्धांत दालाँबेर सिद्धांत की एक विशेष स्थिति समझा जा सकता है जिसमें अवस्थितित्व बल शून्य है, इसलिए हमारा प्रस्तुत विश्लेषण § १३ के रेखीय और कोणीय संवेगों के सिद्ध तत्वों के नमूने पर किया जा सकता है। वास्तव में जिन आभासी विस्थापनों (स्थानान्तरण और घूर्णन) का वहाँ व्यवहार किया गया है वे प्रकटतया दृढ पिंड के आंतरिक सबंधों से संगत हैं और पिछले प्रकरण में विचारे हुए दृढ़ पिंड की व्यापक गति के दो घटक भागों के अनुरूप हैं।

समीकरणों (13.3) और (13.9) में अवस्थितित्व बलों को हटा देने से हम दृढ़पिंड की साम्यावस्था के व्यापक प्रतिबंधों को निम्नलिखित रूप में प्राप्त करते हैं—

$$(1) \qquad \Sigma \mathbf{F}_k = 0, \quad \Sigma \mathbf{L}_k = 0.$$

ये $\mathbf{F}_k$ दृढ पिंड के किन्हीं भी बिंदुओं P_k पर आरोपित बाह्य बलवृन्द हैं। प्रथम समीकरण (1) हमसे बल सदिशों को, उनके *अनुप्रयोग-बिंदुओं पर ध्यान दिये बिना ही,* सिरे से सिरा लगाकर किसी भी क्रम में रखने को, और पारिणामिक **बल बहुभुज**[1] पर विचार करने को कहता है। समीकरण (1) के अनुसार **साम्यावस्था के लिए बलों के बहुभुज को बंद होना चाहिए।**

$\mathbf{L}_k$ इन $\mathbf{F}_k$ के एक ऐसे अभिदेश बिंदु O के प्रति के घूर्ण हैं जिसका निर्वाचन कुछ भी हो सकता है, परन्तु जो सभी $\mathbf{F}_k$ के लिए वही हो। दूसरा समीकरण (1) हमसे इन $\mathbf{L}_k$ ओं को उनके (अक्षीय) सदिश निरूपकों द्वारा प्रतिस्थापित करने को (देखिए पृ० ४९) और ऐंठों के उस बलभुज पर विचार करने को कहता है जो इन सदिशों का सदिक् योग करने से बनता है। द्वितीय समीकरण (1) के अनुसार, **ऐंठ-बहुभुज भी, साम्यावस्था प्राप्त करने के लिए, बंद होना चाहिए।**

समीकरणों (13.12) और (13.13) के सादृश्य में, हम (1) के दो समीकरणों से निम्नलिखित छ: घटक समीकरणों को पहुँच सकते हैं—

$$\Sigma X_k = \Sigma Y_k = \Sigma Z_k = 0$$

$$(2) \qquad \Sigma(y_k z_k - z_k y_k) = \Sigma(z_k X_k - x_k Z_k)$$

$$= \Sigma(x_k Y_k - y_k X_k) = 0.$$

1. Force polygon

ये निर्देशांक अक्षों पर सदिश समीकरणों (१) के प्रक्षेपों को निरूपित करते है। ये x_k, y_k, z_k, बिंदु O को मूल बिंदु मान कर, वहां से मापे हुए अनुप्रयोग बिंदुओ के निर्देशांक है।

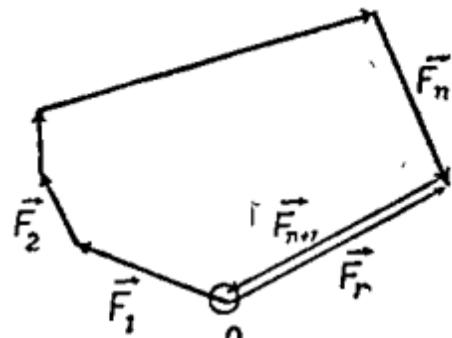
(२) सामर्थ्य-तुल्यता; बल निकायों का लघुकरण

यदि बाह्य बलवृंद (या ऐंठे) साम्यावस्था न उत्पन्न करते हों तो हम पूछ सकते है कि क्या कोई ऐसे गुणों का एकाकी बल (या एकाकी ऐंठ) हो सकता (या सकती) है कि केवल उसी के कारण दृढ पिंड उसी प्रकार चले जैसे कि दिये हुए बलो (या ऐंठों) के निकाय की क्रिया के अधीन चलता है?

यह प्रश्न उठाना, अन्य बातो के साथ-साथ, इस बात के लिए भी उपयोगी है (यद्यपि व्यापकतया वह उसके लिए पर्याप्त न भी हो) कि यदि दृढ पिंड पर ऐसे बलो का निकाय आरोपित हो जो स्वय साम्यावस्था नही उत्पन्न करा सकते, तो उन बलों का निर्धारण किया जा सके जो दृढ पिंड पर उसके आधारो द्वारा डाले जाते है।

प्रस्तुत स्थिति मे "खुले हुए" बहुभुज $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots \mathbf{F}_n$ (आ० ४१) को बद करने वाले खड को एक बार उस दिशा मे जिसमें कि बहुभुज बनाया गया था ($\mathbf{F}_{n+1}$) और एक बार इससे विपरीत दिशा में खीचने मे, $\mathbf{F}_r$ परिणामी[1] बल, हमे उक्त प्रश्न का उत्तर मिलता है। इसमे, (अर्थात् विपरीत दिशाओ मे एक ही खड की रचना से स्थिति मे) कोई भी परिवर्त्तन नही होता। अब हमारे पास एक बद बल बहुभुज, $\mathbf{F}_1 \ldots \mathbf{F}_{n+1}$, और एक एकाकी बल $\mathbf{F}_r$ है। इन दोनों को साथ-साथ लेना "खुले हुए" बल-बहुभुज $\mathbf{F}_1 \ldots \mathbf{F}_n$ के सामर्थ्य-तुल्य[2] है। परतु बल वृन्द $\mathbf{F}_1 \ldots \mathbf{F}_{n+1}$ साम्यावस्था मे है और उनकी उपेक्षा की जा सकती है। अतएव एकाकी बल $\mathbf{F}_r$ दिये हुए बलो $\mathbf{F}_1 \ldots \mathbf{F}_n$ के निकाय के सामर्थ्यतुल्य है। गणितीयतया,

आकृति ४१.—एक "खुले हुए" बलों के बहुभुज का परिणामी बल निकालने के लिए रचना।

1. Resultant 2. Equipollent

$$(3) \qquad \mathbf{F}_r = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k$$

इसी प्रकार का तर्क "खुले हुए" ऐंठ-बहुभुज के साथ भी किया जा सकता है। इससे एक परिणामी बल-घूर्ण $\mathbf{L}$ प्राप्त होता है जो दिये हुए घूर्णों $\mathbf{L}_1 \ldots\ldots \mathbf{L}_n$ के निकाय के सामर्थ्यतुल्य है, अर्थात्

$$(4) \qquad \mathbf{L}_r = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{L}_k.$$

चलते-चलते यह भी कह देना चाहिए कि एकाकी बल $\mathbf{F}_r$ के उसी विंदु O पर आरोपित करने में हमें कोई रोक नहीं है जो घूर्णों $\mathbf{L}_k$ का हिसाब करने के लिए अभिदेश विंदु लिया गया था। यह निर्वाचन आ० ४१ में इंगित है।

(३) अभिदेश विंदु का परिवर्तन

समी० (3) तुरत ही दिखला देता है कि $\mathbf{F}_r$ अभिदेश विंदु O के निर्वाचन से बिलकुल स्वतंत्र है। अतएव यदि किसी दूसरे अभिदेश विंदु O' के लिए एकाकी परिणामी $\mathbf{F}'_r$ हो तो

$$(5) \qquad \mathbf{F}'_r = \mathbf{F}_r$$

दूसरी ओर, समी० (4) से, $\mathbf{L}'_r$ के तदनुसार अर्थ होते हुए, हमें प्राप्त होता है

$$(6) \qquad \mathbf{L}'_r = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{L}'_k \text{ जहाँ } \mathbf{L}'_k = \mathbf{r}'_k \times \mathbf{F}_k$$

यहाँ $\mathbf{r}'_k$ विंदु O' से $\mathbf{F}_k$ के अनुप्रयोग-विंदु P_k तक मापी हुई सदिश त्रिज्या है। समझिए कि O' से O तक की सदिश दूरी $\mathbf{a}$ है। तो,

$$(6a) \qquad \mathbf{r}'_k = \mathbf{a} + \mathbf{r}_k, \quad \mathbf{L}'_k = \mathbf{a} \times \mathbf{F}_k + \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k = \mathbf{a} \times \mathbf{F}_k + \mathbf{L}_k$$

अतएव

$$(6b) \qquad \mathbf{L}'_r = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{a} \times \mathbf{F}_k + \sum_{k=1}^{n} \mathbf{L}_k$$

$$= \mathbf{a} \times \sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k + \mathbf{L}_r$$

परंतु (3) के विचार से

$$\mathbf{a} \times \sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k = \mathbf{a} \times \mathbf{F}_r.$$

अतएव हम प्राप्त करते हैं—

(7) $L'_r = L_r \times a \times F_r$.

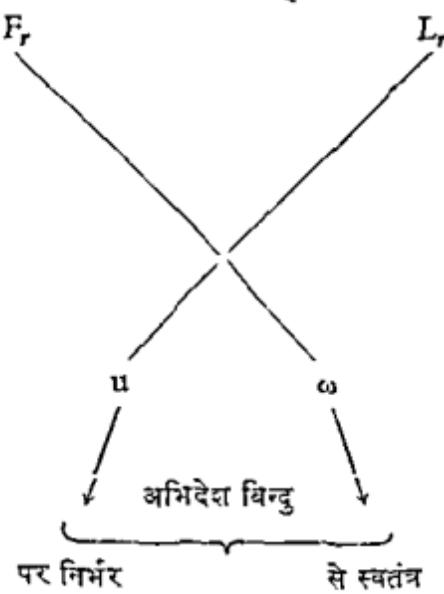
४—चल-गतिकी और स्थैतिकी की तुलना

जैसा कि समी० (22.2) के संबंध में कहा गया था, चलगतिकी में ω अभिदेश विंदु के निर्वाचन से स्वतंत्र होता है, परंतु u उस निर्वाचन पर निर्भर करता है। हम लिखते हैं कि—

(8) $$\omega' = \omega$$

और, (22.7) से, $\mathbf{v} = \mathbf{u}'$ तथा $\mathbf{r} = \mathbf{a}$ रखकर

(9) $$\mathbf{u}' = \mathbf{u} + \omega \times \mathbf{a}.$$

इस समीकरण की वही बनावट है जो (7) की, बशर्ते कि सदिशीय गुणनफल में गुणनखंडों के क्रम पर ध्यान न दें। यदि समीकरणों (5) और (6) को भी विचार में लें तो स्थैतिकी और चलगतिकी के बीच हम एक विलक्षण पारस्परिकता पर पहुँचते हैं जो नीचे दिये हुए ढंग में व्यक्त की जा सकती है—

यह कैंचीवत् पारस्परिकता[1] बल-युग्म और घूर्णन-युग्म की धारणाओं के बीच भी होती है जिसका वर्णन अब किया जायगा।

1. Crosswise reciprocity

बल-युग्म (या, संक्षेप में, "युग्म") प्रारंभिक स्थैतिकी में एक मौलिक तत्त्व है। जैसा कि भली भाँति ज्ञात है, एक युग्म में दो समातर तथा प्रतिकूल, एक ही परिमाण के बल, $\pm$ **F**, होते हैं *जिनकी क्रिया की रेखाएँ एक दूसरे से परिमित दूरी,* कहिए कि l, पर होती है। यदि इस प्रकार के युग्म का लघुकरण उपप्रकरण (2) के भाव में करें तो हमें प्राप्त होता है—

$$(10) \qquad \mathbf{F}_r = 0; \quad \mathbf{L}_r = \vec{L}; \left|\vec{L}\right| = |\mathbf{F}|\, l,$$

जहाँ सदिश $\vec{L}$ को दोनों बलो के समतल से लंबवत् दिशा में समझना चाहिए। परतु जहाँ, पहले का $\mathbf{L}_r$ अभिदेश विंदु O से, कहना चाहिए कि, लगा हुआ था, तहाँ हमारा प्रस्तुत $\vec{L}$ सभी अभिदेश विंदुओं के लिए वही होगा और आकाश में चलने के लिए पूर्णतया स्वतंत्र होगा; अर्थात् दो दिये हुए युग्म समितीयतया जोड़े जा सकते हैं और एक तीसरा युग्म प्रदान करते हैं; दो सम तथा प्रतिकूल घूर्णो के, समांतर समतलों मे आरोपित, युग्म कट जाते हैं, इत्यादि।

आइए, *घूर्णन-युग्म की परिभाषा कर अपनी उक्त विधि द्वारा इंगित कैचीवत्* पारस्परिकता का कुछ और अध्ययन करें। **घूर्णन-युग्म** से मतलब है दो सम और प्रतिकूल घूर्णनकारी वेगो $\pm\omega$, का जिनके अक्ष परस्पर समांतर पर कुछ दूरी, l, पर हों। जोडने के कायदे (22.5) के अनुसार, घूर्णन-युग्म के लघुकरण से एक परिणामी घूर्णनकारी वेग $\omega_r = 0$, प्राप्त होता है। अतएव हमारा दोनों घूर्णन-युग्म घूर्णन अक्षों के *समतल के लंबवत् एक शुद्ध स्थानांतरण को जन्म देता है। इस स्थानांतरण के* वेग का परिमाण सहज ही $|\vec{u}| = \omega l$ पाया जाता है। अतएव अपनी पारस्परिकता विधि के भाव में समीकरणों (10) से सादृश्य बिलकुल पूरा हो गया। हमारा पहले का $\mathbf{u}$ तो अभिदेश विंदु O के निर्वाचन पर निर्भर करता था, परंतु घूर्णन-युग्म के तुल्य का $\vec{u}$ अभिदेश बिंदु से स्वतत्र है और अपने तई समातर रखते हुए आकाश में किसी भी प्रकार स्थानातरित किया जा सकता है। इससे यह निकलता है कि दो स्वेच्छया स्थित घूर्णन-युग्म, ठीक अपने स्थानांतरण वेग $\vec{u}$ की भाँति, सदिशीयतया जुड़ते हैं; दो समान और प्रतिकूल घूर्णों के, समांतर समतलों में स्थित, घूर्णन-युग्म कट जाते हैं, इत्यादि।

शेषपूर्ति : रिंच[1] और पेंच-विस्थापन

समी० (7) से देखते हैं कि L_r अभिदेश बिंदु पर निर्भर करता है। अतएव इस बिंदु का निर्वाचन इस तरह करने को मन होता है कि L_r और F_r समांतर हो जायं। तब हम रिंच नामक बलनिकाय का एक विशेषतया सरल चित्र प्राप्त करते हैं, अर्थात् एक एकाकी बल और इस बल के प्रति काम करता हुआ एक घूर्ण या, तुल्यात्मकतया, उस बल के लंबवत् समतल में स्थित एक युग्म। यदि आदि का अभिदेशबिंदु हो O, तो रिंच के लिए आवश्यक O′ का स्थान इस प्रकार प्राप्त किया जाता है। समी० (7) में हम L_r को F_r के समांतर L_p तथा उसके लंबवत् L_n में विघटित कर लेते हैं और **a** को निम्नलिखित समीकरण में निर्धारित करते हैं —

(11) $$L_n = -\mathbf{a}\times F_r$$

तो अब (5) और (7) से अभिदेश बिंदु O′ के लिए प्राप्त करते हैं —

$$F'_r = F_r, \quad L'_r = L_p \| F_r.$$

जैसा कि रिंच की परिभाषा की अभियाचना है। समी० (11) कहता है कि इस काम के लिए अभिदेश बिंदु O को निम्नलिखित दूरी (a) से F_r और L_n के लंबवत् विस्थापित करना होगा—

$$a = -\frac{|L_n|}{|F_r|}.$$

पिछली विवृत्ति के भाव का, पर उसका ठीक अनुलोम, तर्क पेंच-विस्थापन को पहुँचाता है। समी० (9) को प्रारंभ-स्थल लेकर हम **u** को ω के समांतर u_p और उसके लंबवत् u_n में विघटित कर लेते हैं। पेंच के लिए अभिदेशबिंदु का जो विस्थापन **a** चाहिए वह निम्नलिखित समीकरण निर्धारित करता है —

(12) $$u_n = -\omega\times \mathbf{a}.$$

तो अब (8) और (9) से निम्नलिखित अभिदेश बिंदु O′ प्राप्त करते हैं —

(13) $$\omega' = \omega, \quad u' = u_p \,\|\, \omega,$$

जो, वास्तव में, एक पेंच-विस्थापन समीकरण निरूपित करता है। समीकरण (12) कहता है कि यहां अभिदेश बिंदु O कुछ दूरी द्वारा ω और u_n से लंबवत् विस्थापित होना चाहिए।

1. Wrenches

इस समाकल का मान निकालने के लिए हम पाठक को किन्हीं भी तीन सदिशों A,B,C के लिए सदिश त्रिगुणित श्रेणी-गुणनफल के निम्नलिखित सदिशों के कायदे का स्मरण कराते हैं कि—

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})-\mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) \tag{7}$$

इससे परिणाम निकलता है कि—

$$\mathbf{r}\times(\omega\times\mathbf{r})=\omega r^2-\mathbf{r}(\omega\cdot\mathbf{r});$$

और इसलिए, x-घटक को उदाहरण के लिए लेते हुए,

$$\begin{aligned} M_x &= \int[\mathbf{r}\times(\omega\times\mathbf{r})]_x\,dm \\ &= \omega_x\int(x^2+y^2+z^2)dm-\omega_x\int x^2dm \\ &\qquad -\omega_y\int xy\,dm-\omega_z\int xz\,dm. \end{aligned} \tag{8}$$

(22.12*a*) से अवस्थितित्व के घूर्णों और गुणनफलों का उपयोग कराकर हम अब (6) को निम्नलिखित रूप में दे सकते हैं—

$$\begin{aligned} M_x &= I_{xx}\omega_x-I_{xy}\omega_y-I_{xz}\omega_z, \\ M_y &= -I_{yx}\omega_x+I_{yy}\omega_y-I_{yz}\omega_z, \\ M_z &= -I_{zx}\omega_x-I_{zy}\omega_y+I_{zz}\omega_z \end{aligned} \tag{9}$$

इस प्रकार हम गत्यात्मक सदिश **M** और चलात्मक सदिश ω के बीच एक रैखिक संबंध को पहुँचते हैं। यह संबंध समीकरण (22.13*b*) के टेंसर *I* द्वारा प्राप्त हुआ है। अतएव कहते हैं कि **M** है ω का "रैखिक सदिश फलन"। इस प्रकार के रैखिक सदिश फलन टेंसर कलन-गणित के सभी अंगों में महत्त्वपूर्ण भाग लेते हैं, विशेषतया प्रत्यास्थता वाद में (देखिए इस ग्रन्थावली की द्वितीय पुस्तक)।

घूर्णन की गतिज ऊर्जा के व्यंजक (12.12*b*) के उपयोग से समीकरण (9) शिक्षाप्रद रूप में रखे जा सकते हैं। क्योंकि तब हम केवल निम्नलिखित प्राप्त करते हैं—

$$M_i=\frac{\partial T_{rot}}{\partial\omega_i},\quad i=x,y,z. \tag{10}$$

और भी देखिए कि यह पद-पुंज न केवल (9) में पहले से ही मान ली हुई स्थिति O=G या **u**=0 के लिए वरन् **u**≠0 तथा *O* के किसी भी स्थान के लिए भी वैध है। क्योंकि अधिकतर व्यापक स्थिति में केवल इस बात की आवश्यकता है कि

[T_{rot} पूर्णन] के लिए जो पदपुंज (22.12b) है वह T_m के व्यंजक (22.11) को जोड़ देने से पूरा कर दिया जाय। तो पद

$$\frac{\partial T_m}{\partial \omega_i} = m(\mathbf{R}\times\mathbf{u})_i$$

समी० (10) के दायें ओर जुड़ जाता है। परन्तु यह m वही पद है जो $\mathbf{M}$ के समीकरण (5) के दाहिनी ओर आता है जब कभी भी O और G सपाती नहीं होते। अंत में, सपूर्ण गतिज ऊर्जा T और $T_{rot}+T_m$ में केवल पद T_{transl} [T स्थानांत] भर का भेद है जो ω से स्वतंत्र है [देखिए (22.9) और (22.10)], इसलिए (10) को निम्नलिखित रूप में व्यापकीकृत कर सकते हैं—

$$(10a) \qquad M_i = \frac{\partial T}{\partial \omega_i}, \quad i = x, y, z,$$

जो O के किसी भी स्थान के लिए वैध है।

जो कुछ कोणीय संवेग $\mathbf{M}$ के लिए कहा गया है वह रैखिक संवेग $\mathbf{p}$ के लिए भी वैध है। यहाँ सीधे ही व्यापक स्थिति $O \neq G$ पर विचार करते हैं और समीकरणों (22.9), (22.10) तथा (22.11) से निम्नलिखित संबंध

$$\frac{\partial T}{\partial u_i} = m u_i + m(\omega \times \mathbf{R})_i$$

बना लेते हैं जो $\mathbf{p}$ के समीकरण (2) से सहमत है। अतएव (10a) का पूरक समीकरण होगा—

$$(11) \qquad p_i = \frac{\partial T}{\partial u_i}, \quad i = x, y, z.$$

समीकरण (10a) और (11) किसी भी यांत्रिक निकाय के सवेग और वेग निर्देशाकों के संबंधक बहुत ही अधिकतर व्यापक संबंध की विशेष स्थितियाँ हैं। इसका प्रमाण अध्याय ६, § ३६ तक स्थगित करना पड़ेगा। यहाँ केवल समी० (10) का ज्यामितीय अर्थ ही बतावेंगे जो हमें प्वैंसो[1] की विख्यात ज्यामितीय रचना को पहुँचा देता है। प्वैंसो की विधि हमें यह बताती है कि किसी दिये हुए अक्ष के सबंध में कोणीय संवेग $\mathbf{M}$ का अक्ष किस प्रकार जाना जाय। इस विधि के बारे में वही कहा जा सकता है जो ऊपर आये हुए समीकरण के बारे में कि वह

1. Poinsot

केवल दृढ़ पिंड के लिए ही नही, वरन् जहाँ भी ममित टेन्सर आवे वहाँ भी लागू है। यह टेन्सर एक द्वितीय घात के टेन्सर तल द्वारा निरूपित किया जाता है और फिर इस टेन्सर द्वारा दिये हुए रैखिक सदिश फलन को निकालना पड़ता है।

प्वैंसो रचना इस प्रकार की जाती है—घूर्णीय दीर्घवृत्तज के केंद्र O से (आ० ४२) कोणीय वेग का सदिश ω, खींच लिया जाता है और जहाँ ω इस दीर्घवृत्तज के पृष्ठ को काटता है वहाँ दीर्घवृत्तज के स्पर्श समतल की रचना की जाती है। O से इस स्पर्श समतल पर डाला हुआ लब, $\mathbf{M}$ की दिशा देता है। प्रमाण के लिए केवल यह स्मरण करने की आवश्यकता है कि किसी भी तल, $f(\xi, \eta, \zeta)$=नियत, के लिए, उसके स्पर्श समतल के अभिलंब की दैशिक कोज्याएँ

$$\frac{\partial f}{\partial \xi},\ \frac{\partial f}{\partial \eta},\ \frac{\partial f}{\partial \zeta}, \tag{12}$$

के समानुपाती होती हैं। हमारे लिए $f(\xi, \eta, \zeta)$ नियत, घूर्णीय दीर्घवृत्तज का समीकरण (22.15) है और ξ, η, ζ के लिए उसके अवकलज सचमुच ही समीकरण (9) के $\mathbf{M}$ के घटकों के समानुपाती हैं।

प्वैंसो रचना को हम समीकरण (10) का साक्षात् ज्यामितीय व्यंजन समझ सकते हैं, क्योंकि घूर्णीय दीर्घवृत्तज सारत. तल T_{rot}= नियत के सर्वसम है।

आकृति ४२—प्वैंसो रचना।
दो स्थितियों मे जहाँ घूर्णीय दीर्घवृत्तज (a) उच्चाक्ष उपगोल और (b) निम्नाक्ष उपगोल मे भ्रष्ट हो जाता है। कोणीय वेग ω और कोणीय संवेग $\mathbf{M}$ की आपेक्षिक स्थितियाँ यहाँ दिखलायी गयी हैं।

आकृतियाँ ४२ ए, बी संमित घूर्णीय दीर्घवृत्तज की वह स्थिति निरूपित करती है जहाँ ω, $\mathbf{M}$ और संमिति अक्ष ("आकृति का अक्ष") $\mathbf{f}$ एक ही समतल मे हैं। अतएव स्पर्श समतल दीर्घवृत्तज के उक्त तल के अनुप्रस्थ काट वाले दीर्घवृत्त की स्पर्शरेखा द्वारा निरूपित होगा। आकृति ४२ बी के उच्चाक्ष परिक्रमण-दीर्घवृत्तज (अर्थात् उच्चाक्ष उपगोल) मे

M और f, अर्थात् अक्ष, ω के इधर उधर स्थित हैं। आकृति ४२ ए के निम्नाक्ष उपगोल में M की स्थिति ω और f के बीच में है। दीर्घवृत्तज, जिसमें तीनों अक्ष असम हों, एक अधिकतर कठिन लेखाचित्रीय समस्या प्रस्तुत करता है।

यह प्रकरण समाप्त करते हुए हम जोर देकर कहते हैं कि इस प्रकरण में विवेचित संबंध सारतः दृढपिंड को पहुँचायी हुई इस न्यूटनीय परिभाषा के अतिरिक्त और कुछ नही कि "गति की मात्रा ही उसकी माप है, जो वेग और द्रव्य की मात्रा के मिलाव से उत्पन्न होती है।" हमारे प्रस्तुत सबंधो के, एक एकाकी कण के वेग और संवेग के बीच के संबंध से, कही अधिक जटिल होने का कारण यह है कि कण-यात्रिकी मे "द्रव्य की मात्रा" अर्थात् सहति अदिश है, परंतु दृढ पिंड की स्थिति में सहति के स्थान में आनेवाला अवस्थितित्वघूर्ण टेन्सर है।

§ २५. दृढ़ पिंड का गतिविज्ञान, उसकी गतियों के रूपों का सर्वेक्षण

आइए, पहले आकाश में स्वतन्त्रतापूर्वक चलते हुए दृढ पिंड पर विचार करें। अभिदेश विंदु के लिए उसके सहति-केन्द्र को निश्चित करेंगे और, § 23 के प्रदेशन से सहमत होते हुए, जो सब बलवृन्द पिंड पर आरोपित हों उनका, इस विंदु पर आरोपित होने के लिए, लघूकरण करेंगे। तब हमें केवल एक एकाकी परिणामी बल F और एक एकाकी परिणामी ऐंठ L से ही काम करने की आवश्यकता होगी। गति-समीकरण § १३ के सवेग के और सवेग-घूर्ण के समीकरण होंगे, जो ये हैं—

(1) $$\dot{P}=F,$$

तथा

(2) $$\dot{M}=L.$$

यत. एक दृढ पिंड की केवल छ: स्वतंत्रता-सख्याएँ होती है, अतः ये दो सदिश समीकरण ही पिंड की गति की दशा को पूर्णतया निश्चित करने के लिए पर्याप्त होंगे।

जब कभी भी F कोणीय वेग से स्वतंत्र हो और L स्थानातरणीय वेग से स्वतंत्र हो, तब समीकरणों (1) और (2) को अलग-अलग ले सकते है। उदाहरणार्थ, प्रक्षेप्यो के विज्ञान[1] मे ऐसा नही होता। यदि ऐसा होता हो तो (1) शुद्ध कण-यांत्रिकी की और (2) एक स्थिर विंदु के प्रति घूर्णन की समस्या हो जाती है, या, जैसा कि हम सक्षिप्तता के लिए कहेंगे, "नचाने के लट्टू वाली समस्या" की।

1. Ballistics

इस स्थान पर हमारा कुतूहल मुख्यतया पश्चोन्न में होगा। अभिदेश बिंदु का उपर्युक्त प्रकार से निर्वाचन कर लेने पर, हम गुरुत्व बल की उपेक्षा कर सकते हैं, क्योंकि उसका संहति-केन्द्र के प्रति कोई घूर्ण नही होता। वरन्, यदि वायु-प्रतिरोध, घर्षण और ऐसी बातों की भी उपेक्षा कर दे तो हमें बिना किन्हीं बलों के अधीन नचाने के लट्टू वाली समस्या का सामना करना पड़ता है। इस प्रकार कार्डन[1] अवलंबन में सदा घूर्णाक्षस्थायी (दे० आगे आ० ४७) बिना किन्हीं बलों के अधीन लट्टू होगा, बशर्ते कि गतिपालक चक्र की संहति की तुलना में जिम्बलों[2] (लटकाने के छल्लों आदि की युक्ति) की संहति की उपेक्षा कर दी जाय, जैसा कि साधारण रचनाओं में होता है। अन्यथा बहुत अधिक जटिल गणितीय समस्या का सामना करना पड़ेगा।

संहति-केंद्र के अतिरिक्त किसी अन्य स्थिर बिंदु के प्रति के घूर्णन को भी हम लेंगे। जैसा कि पृ० १६४ पर कहा था, उस स्थिति में इस स्थिर बिंदु को अभिदेश-बिंदु O बना देना और उसके प्रति आरोपित गुरुत्वाकर्षणीय घूर्ण $\mathbf{L}$ का प्रवेश करा देना युक्तिपूर्ण होगा। ऐसी स्थिति में उसे **भारी लट्टू** कहते हैं। उसकी विवेचना उपप्रकरण ४ और ५ में की गयी है।

बिना बलों के अधीन लट्टू की पूरी विश्लेषणीय विवृति आगामी प्रकरण के लिए स्थगित कर दी जायगी। वहाँ हम **यूलर के समीकरणों** द्वारा प्रस्तुत करण में परिचित होंगे। भारी लट्टू की पूरी विवृति को, जहाँ तक कि वह की जा सकती है, और भी स्थगित करना पड़ेगा, अर्थात् § ३५ तक। वहां **व्यापकीकृत लाग्रांज समीकरणों** की शक्तिमती विधि हमारे अधिकार में आ जायगी।

बिना बलों के अधीन लट्टू के लिए समी० (2) प्रदान करता है, $\dot{\mathbf{M}}=O$। यह तुरंत ही समाकलित किया जा सकता है, जिससे प्राप्त होता है

$$(3) \qquad \mathbf{M}=\text{नियत}।$$

बिना बलों के अधीन लट्टू का कोणीय संवेग परिमाण में एवं आकाशीय दिशा में नियत रहता है। यह अभ्युक्ति गैलिलियों के अवस्थितित्व नियम के पूर्णतया समांतर है, परंतु व्यापकतया, वेग तथा आकाशीय स्थान के लिए उतना सरल व्यंजन नही प्रदान करती जितना कि अन्य स्थिति में मिलता है।

(१) बिना बलों के अधीन गोलीय लट्टू

केवल गोलीय घूर्णीय दीर्घवृत्तज की स्थिति में $\mathbf{M}=I\omega$ होता है, जिससे

1. Cardan 2. Gimbals

M= नियत से ω= नियत निकलता है। घूर्णन अक्ष कोणीय संवेग के स्थिर अक्ष से नित्य संपाती रहता है। पिंड का प्रत्येक बिंदु, पिंड का रूप कुछ भी क्यों न हो (देखिए, उदाहरणार्थ पृष्ठ १६६, आ० ४०सी), इस अक्ष के चारों ओर नियत वेग से एक वृत्त बनाता है।

(२) बिना बलों के अधीन संमित लट्टू

यहाँ सरल घूर्णन गति तभी होती है जब **M** की दिशा मुख्य अक्षों में से किसी एक से, *अर्थात् या तो पिंड के अक्ष से या किसी निरक्षीय अक्ष से संपाती होती है।* बिना बलों के अधीन संमित लट्टू की व्यापक गति तथोक्त **सम-पुरःसरणयुक्त**[1] होती है।

इस प्रकार की गति को हम आ० ४३ की सहायता से समझाते हैं। घूर्णीय संवेग का अक्ष, जो आकाश में स्थिर रहता है, ऊर्ध्वाधरतः ऊपर की ओर खींचा गया है। घूर्णीय दीर्घवृत्तज के केंद्र के चारों ओर रचे हुए मात्रक त्रिज्या के गोल के तल को

आ० ४३—बिना बलों के अधीन ससमिति लट्टू का सम-पुरःसरण।

जहाँ यह अक्ष काटता है, वह बिंदु समझिए कि M है। इस गोल को जिन बिंदुओं पर घूर्णन के तथा किसी भी क्षण की समिति के अक्ष काटते हैं, उन्हें R और F कहिए। प्वैंसो विधि से ये तीनों अक्ष F से जाते हुए एक ध्रुववृत्तीय समतल[2] में होंगे। अतएव तीनों बिंदु M, R और F एक वृहत् वृत्त पर होंगे जो बिंदु M

1. Regular precession 2. Meridian plane

में जाता होगा। निश्चिति के लिए मान लेंगे कि घूर्णीय दीर्घवृत्तज निम्नाक्ष उपगोल है, इस स्थिति में M अन्य दो बिंदुओं F और R के बीच में होगा। किसी क्षण, गति OR के चारों ओर के घूर्णन की है। इस प्रक्रिया में F अभी कहे हुए वृहत् वृत्त के लम्बवत् आगे बढ़ता है। ऐसा करने में F और M के बीच की कोणीय दूरी में परिवर्तन नहीं होता। अतएव F का क्षणिक पथ M के चारों ओर के अक्षांशवृत्त का एक छोटा-सा चाप होगा (आ० ४३ में बायीं ओर का बाण)। अब R भी अपना स्थान बदलेगा। वह M और F के नये स्थान से जाते हुए वृहत् वृत्त को जायगा। इस गति में M और R के बीच की कोणीय दूरी अपरिवर्तित रहती है। क्योंकि वह प्वैंसो रचना द्वारा निर्धारित होती है। अतएव R भी M के इधर-उधर के अक्षांशवृत्त के चाप पर आगे बढ़ता है (आ० ४३ में दायीं ओर का बाण)। बिंदुओं F, M और R का आपेक्षिक स्थान अब वही होगा जो आदि में था। अतएव हमारे युक्तितर्क की प्रक्रिया दोहरायी जा सकती है। परिणाम यह निकलता है कि **संमिति-अक्ष और घूर्णन अक्ष, प्रत्येक आकाश में स्थिर कोणीय संवेग के चारों ओर एक-एक वृत्तीय शंकु की रचना करते हैं और प्रत्येक शंकु एक नियत कोणीय वेग से बनाया जाता है।** पश्चोक्त इसलिए कि वेग $\mathbf{M}$ के परिमाण और घूर्णीय दीर्घवृत्तज के संबंध में उसकी स्थिति द्वारा पूर्णतया निर्धारित होता है। इस प्रकार अब समपुरःसरण[1] के लक्षणों और स्वरूप का पूरा विवरण दे दिया गया।

केवल एक भेद के साथ यही बातें घूर्णीय उच्चाक्ष उपगोल[2] के लिए भी लागू हैं। भेद यह है कि इस स्थिति में R का स्थान M और F के बीच होगा (दे० आ० ४२ बी, पृ० १७७)।

(३) बिना बलों के अधीन अ-संमित लट्टू

सर्संमिति लट्टू की गति का रूप जो अभी-अभी व्युत्पन्न किया गया है, निम्न-लिखित भाँति संक्षेप में, परंतु ब्यौरे की उतनी स्पष्टता बिना, वर्णित किया जा सकता था—कोणीय संवेग सदिश $\mathbf{M}$ के अंत से, $\mathbf{M}$ के लंबवत् "निश्चर समतल" ϵ (दे० पृ० ९८) से होकर हम जाते हैं। $\mathbf{M}$ के मूल बिंदु के चारों ओर द्विगुणित गतिज ऊर्जा के दीर्घवृत्तज ("प्वैंसो दीर्घवृत्तज") की रचना करते हैं जो घूर्णीय

1. Regular precession 2. Momental prolate ellipsoid

M= नियत से ω= नियत निकलता है। घूर्णन अक्ष कोणीय संवेग के स्थिर अक्ष से नित्य संपाती रहता है। पिंड का प्रत्येक बिंदु, पिंड का रूप कुछ भी क्यों न हो (देखिए, उदाहरणार्थ पृष्ठ १६६, आ० ४०सी), इस अक्ष के चारों ओर नियत वेग से एक वृत्त बनाता है।

(२) बिना बलों के अधीन संमित लट्टू

यहाँ सरल घूर्णन गति तभी होती है जब M की दिशा मुख्य अक्षों में से किसी एक से, अर्थात् या तो पिंड के अक्ष से या किसी निरक्षीय अक्ष से संपाती होती है। बिना बलों के अधीन संमित लट्टू की व्यापक गति तथोक्त सम-पुरःसरणयुक्त[1] होती है।

इस प्रकार की गति को हम आ० ४३ की सहायता से समझाते हैं। घूर्णीय संवेग का अक्ष, जो आकाश में स्थिर रहता है, ऊर्ध्वाधरतः ऊपर की ओर खींचा गया है। घूर्णीय दीर्घवृत्तज के केंद्र के चारों ओर रचे हुए मात्रक त्रिज्या के गोल के तल को

आ० ४३—बिना बलों के अधीन ससमिति लट्टू का सम-पुरःसरण।

जहाँ यह अक्ष काटता है, वह बिंदु समझिए कि M है। इस गोल को जिन बिंदुओं पर घूर्णन के तथा किसी भी क्षण की समिति के अक्ष काटते हैं, उन्हें R और F कहिए। प्वैंसो विधि से ये तीनों अक्ष F से जाते हुए एक ध्रुववृत्तीय समतल[2] में होंगे। अतएव तीनों बिंदु M, R और F एक वृहत् वृत्त पर होंगे जो बिंदु M

1. Regular precession 2. Meridian plane

दीर्घवृत्तज के सदृश है। प्वैंसो दीर्घवृत्तज ϵ के स्पर्शीय है* और स्पर्शता का बिंदु कोणीय वेग ω का अंतिम बिंदु है। लट्टू की क्षणिक गति इस दीर्घवृत्तज के, ω के चारों ओर के, घूर्णन से बनी है। इस प्रक्रिया में दीर्घवृत्तज बिना फिसले समतल ϵ पर लुढ़कता है।† यदि प्वैंसो दीर्घवृत्तज परिक्रमण का हो तो स्पर्शता के बिंदु का वक्र M के चारों ओर एक वृत्त हो जाता है। अतएव ω रचित शंकु ("आकाश शंकु") और आकृति-अक्ष द्वारा रचित शंकु वृत्तीय शंकु हो जाते हैं। इस प्रकार हम फिर लट्टू का सम पुरःसरण प्राप्त करते हैं।

यही रचना अब तीन विभिन्न अवस्थितित्वघूर्णों वाले बल-स्वतंत्र एक व्यापक ("संमिति हीन") लट्टू की गति के प्वैंसो चित्र को पहुँचाती है। फिर प्वैंसो दीर्घवृत्तज को निश्चर समतल ϵ पर लुढ़काते हैं (देखिए टिप्पणी *)। अब स्पर्शता का वक्र[1] वृत्त नहीं रहता किंतु एक बीजातीत[2] वक्र हो जाता है, जो व्यापकतया बंद नहीं होता। इसी भाँति घूर्णन-अक्ष तथा "पिंड-अक्ष" की आकाश में गति के वर्णन करनेवाले शंकु भी अब बीजातीत हो जाते हैं। असमित लट्टू का विश्लेषण बिना बलों के अधीन भी दीर्घवृत्तीय समाकलों को ले आता है [देखिए § २६, (३)]। बिना बलों के अधीन समित लट्टू के विश्लेषण में केवल प्रारंभिक फलन ही आते हैं। परंतु हाँ, समितिहीन लट्टू के लिए भी, तीन मुख्य अक्षों के चारों ओर का विशुद्ध घूर्णन एक स्थिर भाव का घूर्णन होता है, जिसका निरूपण प्रारंभिक है।

(४) भारी सम्मित लट्टू

यहाँ गोलीय लट्टू को अलग न लेंगे क्योंकि उसकी गति सम्मित[3] लट्टू की गति से कुछ अधिक सरल नहीं होती।

भारी संमित लट्टू के लिए स्थिर बिंदु O (कोटर—सॉकेट में आधार बिंदु) संहति-केन्द्र G (संमित अक्ष पर स्थित) का अब संपाती नहीं होता। दूरी OG को s कहिए, तो गुरुत्वाकर्षणीय ऐंठ का परिमाण होगा

* यह (पृ० १७६ की) प्वैंसो रचना और शीघ्र ही आगे आनेवाले समीकरण (26.17a) का परिणाम है।

† अर्थ में 'बिना फिसले लुढ़कना' आकाश से और पिंड से प्रेक्षित कोणीय वेग सदिश ω की समता के तुल्य है। इस बारे में समी० (26.8a) देखिए, जहाँ इस समता का प्रमाण दिया गया है।

1. The curve of contact 2. Transcendental 3. Symmetrical

(4) $$|\mathbf{L}|=mgs \sin\theta,$$
जहाँ θ ऊर्ध्वाधर और आकृति-अक्ष के बीच का कोण है। **L** ऊर्ध्वाधर और समिति-अक्ष, दोनों के लववत् है, अर्थात् दूसरे शब्दों मे, यह क्षैतिज समतल और घूर्णीय दीर्घवृत्तज के निरक्ष समतल की काट पर होगा। काट की यह रेखा "पातो की रेखा" कहलाती है। यह शब्द खगोल विज्ञान से लिया गया है। चिह्नों की अधिकतर यथातय व्याख्या के लिए पृ० १८७-८८ देखिए।

व्यापक समीकरण (2) अब तुरत ही समाकलित नही किया जा सकता जैसा कि विना बलों के अधीन लट्टू के सबध मे किया जा सका था। क्योंकि अब तो कोणीय संवेग में निम्नलिखित नियम (समी० 5) के अनुसार निरतर परिवर्तन होता रहता है।

(5) $$d\mathbf{M}=\mathbf{L}dt$$
इस प्रकार किसी समय t के **M** के साथ अत्यणु सदिश **L** dt को जोड देने से $t+dt$ का कोणीय सवेग प्राप्त होता है। **M** का अत विंदु[1] क्षणिक पात-रेखा की दिशा में, अर्थात् ऊर्ध्वाधर और समिति-अक्ष के लववत्, आगे बढता है। इससे यह परिणाम निकलता है कि ऊर्ध्वाधर पर एव इस अक्ष पर भी **M** के प्रक्षेप नियत रहेंगे। इन दो नियतांकों को

(6) $$M'=M_{vert} \text{ (ऊर्ध्व) और } M''=M_{fig}$$
कहिए। ये दो राशियाँ M' और M'' स्वेच्छया प्रदेशित[2] की जा सकती है और गति समीकरणों के दो समाकलनाक नियतांक हैं।

एक तीसरा नियतांक पूर्ण ऊर्जा E का है। समी० (6.18) के संगत हमें गुरुत्वाकर्षणीय स्थैतिक ऊर्जा V प्राप्त होती है, जहाँ

(6a) $$V=mgs\cos\theta.$$
अतएव

(7) $$T+mgs\cos\theta=E.$$

गति के वैश्लेषणिक विवरण पर पहुँचने के लिए हमे T और (6) मे कथित **M** के प्रक्षेपों को लट्टू के उपयुक्त स्थानीय परामितियों[3] (यूलेरीय कोणों) के पदो में व्यक्त करना होगा। यह § ३५ मे किया जायगा। वहाँ देखेंगे कि प्रस्तुत गति के हिसाब लगाने में हम दीर्घवृत्तीय समाकलों को पाते हैं।

1. Terminus 2. Prescribed 3. Parameters

दीर्घवृत्तज के सदृश है। प्वांसो दीर्घवृत्तज C के स्पर्शीय है* और स्पर्शता का बिंदु कोणीय वेग ω का अंतिम बिंदु है। लट्टू की क्षणिक गति इस दीर्घवृत्तज के, ω के चारों ओर के, घूर्णन से बनी है। इस प्रक्रिया में दीर्घवृत्तज बिना फिसले समतल C पर लुढ़कता है।† यदि प्वांसो दीर्घवृत्तज परिक्रमण का हो तो स्पर्शता के बिंदु का वक्र M के चारों ओर एक वृत्त हो जाता है। अतएव ω रचित शंकु ("आकाश शंकु") और आकृति-अक्ष द्वारा रचित शंकु वृत्तीय शंकु हो जाते हैं। इस प्रकार हम फिर लट्टू का सम पुरःसरण प्राप्त करते हैं।

यही रचना अब तीन विभिन्न अवम्यितित्वघूर्णों वाले बल-स्वतंत्र एक व्यापक ("संमिति हीन") लट्टू की गति के प्वांसो चित्र को पहुँचाती है। फिर प्वांसो दीर्घवृत्तज को निश्चर समतल C पर लुढ़काते हैं (देखिए टिप्पणी *)। अब स्पर्शता का वक्र[1] वृत्त नहीं रहता किंतु एक बीजातीत[2] वक्र हो जाता है, जो व्यापकतया बंद नहीं होता। इसी भाँति घूर्णन-अक्ष तथा "पिंड-अक्ष" को आकाश में गति के वर्णन करनेवाले शंकु भी अब बीजातीत हो जाते हैं। असंमित लट्टू का विश्लेषण बिना बलों के अधीन भी दीर्घवृत्तीय समाकलों को ले आता है [देखिए § २६, (३)]। बिना बलों के अधीन समित लट्टू के विश्लेषण में केवल प्रारंभिक फलन ही आते हैं। परन्तु हाँ, समितिहीन लट्टू के लिए भी, तीन मुख्य अक्षों के चारों ओर का विशुद्ध घूर्णन एक स्थिर भाव का घूर्णन होता है, जिसका निरूपण प्रारंभिक है।

(४) भारी सम्मित लट्टू

यहाँ गोलीय लट्टू को अलग न लेंगे क्योंकि उसकी गति सम्मित[3] लट्टू की गति से कुछ अधिक सरल नहीं होती।

भारी संमित लट्टू के लिए स्थिर बिंदु O (कोटर—सॉकेट में आधार बिंदु) संहति-केन्द्र G (समित अक्ष पर स्थित) का अब संपाती नहीं होता। दूरी OG को s कहिए, तो गुरुत्वाकर्षणीय ऐंठ का परिमाण होगा

* यह (पृ० १७६ की) प्वांसो रचना और शीघ्र ही आगे आनेवाले समीकरण (26.17*a*) का परिणाम है।

† अर्थ में 'बिना फिसले लुढ़कना' आकाश से और पिंड से प्रेक्षित कोणीय वेग सदिश ω की समता के तुल्य है। इस बारे में समी० (26.8*a*) देखिए, जहाँ इस समता का प्रमाण दिया गया है।

1. The curve of contact 2. Transcendental 3. Symmetrical

आधारित है। निस्संदेह, ऊर्जा-समाकल (7) व्यापक घूर्णीय दीर्घवृत्तज के लिए भी वैध होगा।

समस्या की सारणीय विशेष स्थितियों में मान लेते हैं कि या तो संहति-वितरण एक विशेष प्रकार का है या गति एक विशेष रूप की है।

सबसे अधिक जानी हुई स्थिति कोवालेव्स्की[1] प्रदत्त है। यहाँ घूर्णीय दीर्घवृत्तज सम्मित मान लिया जाता है, संहति-केंद्र अब पिंड के अक्ष पर नहीं वरन् निरक्षीय समतल में होगा, जहाँ निरक्षीय समतल की परिभाषा है वह समतल जो स्थिर बिंदु से जाते हुए अक्ष के लंबवत् हो। इन बातों के अतिरिक्त यह भी अभियाचित है कि पिंड के अक्ष के प्रति का अवस्थितित्व घूर्ण निरक्षीय अवस्थितित्व घूर्ण का आधा हो। उस स्थिति में गति के रूप पर किसी निरोध की आवश्यकता नहीं है।

स्टाउड[2] वर्णित स्थिति में इस बात से मतलब है कि स्थिर भाव से घूर्णन के कौन-कौन अक्ष ऊर्ध्वाधर दिशा में रहते हुए उपयुक्त होंगे। निकलता यह है कि ये अक्ष पिंड में एक द्वितीय घात के शंकु पर होते हैं। इस शंकु पर तीनों मुख्य अक्षों के होने के अतिरिक्त महति-केंद्र से जाता हुआ अक्ष भी होता है। प्रत्येक अक्ष के लिए (एक चिह्न के भीतर ही भीतर) एक निश्चित कोणीय वेग होता है। इस स्थिति में न तो संहति-वितरण और न ही संहति-केन्द्र के स्थान को निर्दिष्ट करने की आवश्यकता होती है।

अंत में, हेसे-वर्णित स्थिति में लोलक[3] (गोलीय लोलक या विशेषतया सामान्य लोलक) की सरल गति से सादृश्य से मतलब है। ऐसी गति के लिए सहति-केन्द्र घूर्णीय दीर्घवृत्तज के एक विशेष अक्ष पर होना चाहिए और आदि का उत्तेजन उचित प्रकार का होना चाहिए, ठीक वैसे ही जैसे कि सम्मित लट्टू की स्थिति में, जिसका सहति-केन्द्र शुद्ध लोलक गति से केवल तभी चलता है जब आदि के कोणीय संवेग का समिति-अक्ष पर कोई घटक न हो।

§ २६. यूलर के समीकरण बलों के अनधीन लट्टू की मात्रात्मक विवृति

(१) यूलर के गति-समीकरण

दो विभिन्न अभिदेश-पद्धतियाँ लेते हैं—एक तो x, y, z, जो आकाश में स्थित है और दूसरी X, Y, Z, जो पिंड में स्थित है। (x, y, z) पद्धति में बिना बलों के अधीन गति के कोणीय संवेग के लिए एक निश्चर स्थान होता

1. Kowalewski 2. Staude 3. Kinematic

सम पुरःसरण अब गति का व्यापक रूप नहीं रहता, जैसा कि बिना बलों के अधीन लट्टू की स्थिति में था; वरन् केवल M', M'' और E के विशेषतया निर्वाचित मानों के लिए ही होता है। पुरःसरणीय गति जो प्रचलित रीति से उत्तेजित भारी लट्टू की गति में होती है, वह जान तो सम पड़ती है, परंतु वास्तव में सम नहीं होती। उसे छद्म-सम पुरःसरण[1] कह सकते हैं। अंत में, ऊर्ध्वाधर दिशा में लक्ष्य करते हुए आकृति-अक्ष के चारों ओर शुद्ध घूर्णन भी गति का एक समाव्य (स्थायी किंवा अस्थायी) रूप है, ω का परिमाण चाहे कुछ भी हो।

अब तक हमने केवल कोणीय सवेग के समीकरण (2) पर विचार किया है। अब रैखिक सवेग के समीकरण (1) पर भी सरसरी निगाह डाल लेनी चाहिए। उसका दायाँ अंग स्थिर बिंदु O पर आरोपित बल $\mathbf{F}$ है। यह दो बलों से संघटित है; एक तो ऊर्ध्वाधरतया नीचे की ओर आरोपित गुरुत्व बल $m\mathbf{g}$, और दूसरा आधार की प्रतिक्रिया $\mathbf{F}_{sup}$ (आधा)। बायें अंग में सवेग परिवर्तन, समी० (24.2) से, $\mathbf{u}=O$ रख कर,

$$\dot{\mathbf{p}}=m\frac{d}{dt}(\omega\times\mathbf{R})=m\dot{\mathbf{v}}$$

होगा, जहाँ $\mathbf{v}$ संहति-केन्द्र का वेग है। तो अब समी० (1) यह सरल अभ्युक्ति करता है—

$$F_{sup}=m(\dot{\mathbf{v}}-\mathbf{g}).$$

दूसरे शब्दों में, रैखिक सवेग के नियम की अभियाचना है कि किसी भी क्षण आधार को लट्टू की संहति × (संहति-केंद्र का त्वरण ऋण गुरुत्वीय त्वरण) जितना बल प्रदान करना होगा।

(५) भारी असंमित लट्टू

बहुतेरे महान् गणितज्ञों के अनेक प्रयत्न करने पर भी इस समस्या संबंधी अवकल समीकरणों का व्यापकतम रूप में समाकलन अभी तक नहीं हो सका है। कोणीय सवेग (6) के समाकलों में पहला तो निश्चय ही प्रभाव में रहता है, क्योंकि यहाँ भी गुरुत्वीय ऐंठ एक क्षैतिज अक्ष के प्रति काम करती है, अतएव सदिश $\mathbf{M}$ का अंतिम सिरा आकाश में स्थिर एक क्षैतिज समतल पर रहता है। परंतु दूसरा समाकल (6) अब अवैधीकृत हो जाता है, क्योंकि वह घूर्णीय दीर्घवृत्तज की समिति पर

1. Pseudo-regular precession

है—M=नियत (समी० 25.3)। पिंड की दृष्टि से M का स्थान निरंतर बदलता रहता है। इस परिवर्तन के नियम का हमें अध्ययन करना है।

अतएव पिंड में स्थित एक-बिंदु P पर और आकाश में स्थित बिंदु Q पर अपना ध्यान एकत्र कीजिए और समझिए कि दोनों बिंदु क्षण भर के लिए संपाती हैं। समझिए कि P का वेग आकाश में **v** है और Q का पिंड में **V**। चलात्मक समी० (22.4) के अनुसार $\mathbf{v}=\omega\times\mathbf{r}$। पिंड की दृष्टि में Q का वेग P के आकाश से दृष्ट वेग के बराबर पर प्रतिकूल दिशा में होगा। अतएव

$$\mathbf{V}=-\omega\times\mathbf{r}=\mathbf{r}\times\omega.$$

सारणी के रूप में—

	आकाश से दृष्ट	पिंड से दृष्ट
P	$\mathbf{v}=\omega\times\mathbf{r}$	$\mathbf{V}=0$
Q	$\mathbf{v}=0$	$\mathbf{V}=\mathbf{r}\times\omega$

सदिश **M** के आकाश में स्थिर अंतर्बिंदु को बिंदु Q निर्वाचित करते हैं और इसलिए लिखते हैं—

$$\mathbf{r}=\mathbf{M}\ ,\ \mathbf{V}=\frac{d\mathbf{M}}{dt}.$$

इस प्रकार $\frac{d\mathbf{M}}{dt}$ का अर्थ हुआ "पिंड में परिवर्तन" (आकाश में हुए परिवर्तन को $\dot{\mathbf{M}}$ कहा गया था जो यहाँ शून्य है)।

तो सारणी की द्वितीय पंक्ति से पढ़ लिया जाता है—

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt}=\mathbf{M}\times\omega. \quad (1)$$

यह बलों के अनधीन घूर्णनयुक्त पिंड के यूलर-समीकरणों की व्युत्पत्ति को पूरा कर देता है।

(X,Y,Z)—प्रणाली में उनके घटकों के पदों में हम उनका पुनर्लेखन करेंगे। ω के घटकों को ω_1, ω_2, ω_3 और **M** के घटकों को M_1, M_2, M_3 कहेंगे। समी० (1) प्रदान करता है—

$$\frac{dM_1}{dt} = M_2\omega_3 - M_3\omega_2,$$

(2)
$$\frac{dM_2}{dt} = M_3\omega_1 - M_1\omega_3,$$

$$\frac{dM_3}{dt} = M_1\omega_2 - M_2\omega_1.$$

यहाँ तक X, Y, Z की पद्धति नितान्त स्वेच्छ रही है। अब यदि X, Y, Z की दिशाएँ समी० (22.15 a) के मुख्य अवस्थितित्व-घूर्णों की ओर लें और उन्हें I_1, I_2, I_3 कहें, तो व्यापक संबंध (24.9) के विचार से, प्राप्त करते हैं

(3)
$$M_1 = I_1\omega_1,\ M_2 = I_2\omega_2,\ M_3 = I_3\omega_3;$$

और (2) निम्नलिखित सरल रूप धारण करता है—

(4)
$$I_1\frac{d\omega_1}{dt} = (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3,$$

$$I_2\frac{d\omega_2}{dt} = (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1,$$

$$I_3\frac{d\omega_3}{dt} = (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2.$$

हम जब कभी यूलर-समीकरणों की बात करते हैं तब इन्हीं विलक्षण रूप से सम्मित और सुरूप समीकरणों का ध्यान करते हैं।

आइए, इन्हें अब ऐसा बढ़ायें कि एक बाह्य ऐंठ $\mathbf{L}$ के प्रभाव की स्थिति सम्मिलित हो जाय। ऐसी स्थिति में $\mathbf{M}$ का अन्तबिंदु आकाश में स्थिर नहीं रहता, वरन् (25.2) के अनुसार उसका वेग $\mathbf{v} = \mathbf{L}$.

पिंड की दृष्टि से, बिंदु Q अब ऐसे वेग से चलता है जो $\mathbf{v} = \mathbf{L}$ और $\mathbf{V} = \mathbf{r} \times \omega$ से संघटित होता है। इसका परिणाम यह होता है कि समी० (1) को

(5)
$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \mathbf{M} \times \omega + \mathbf{L}$$

में बदल देना चाहिए और (2) तथा (4) के दक्षिणी अंगों से X, Y, Z संबंधी $\mathbf{L}$ के घटकों को जोड़ देना चाहिए। इससे **एक स्थिर बिंदु वाले दृढ़ पिंड के यूलर के गति-समीकरण** प्राप्त हो जाते हैं।

हम ये समीकरण स्पष्ट रूप से केवल भारी सममित लट्टू की स्थिति के लिए ही लिखेंगे, जहाँ $\mathbf{L}$ पातों की रेखा के प्रति काम करता है और, (25.4) से उसका परिमाण $|\mathbf{L}| = mgs \sin \theta$ होता है।

है—M=नियत (समी० 25.3)। पिंड की दृष्टि से **M** का स्थान निरंतर बदलता रहता है। इस परिवर्तन के नियम का हमें अध्ययन करना है।

अतएव पिंड में स्थित ए-बिंदु P पर और आकाश में स्थित बिंदु Q पर अपना ध्यान एकत्र कीजिए और समझिए कि दोनों बिंदु क्षण भर के लिए संपाती हैं। समझिए कि P का वेग आकाश में **v** है और Q का पिंड में **V**। चलात्मक समी० (22.4) के अनुसार $\mathbf{v}=\omega\times\mathbf{r}$। पिंड की दृष्टि में Q का वेग P के आकाश से दृष्ट वेग के बराबर पर प्रतिकूल दिशा में होगा। अतएव

$$\mathbf{V}=-\omega\times\mathbf{r}=\mathbf{r}\times\omega.$$

सारणी के रूप में—

	आकाश से दृष्ट	पिंड से दृष्ट
P	$\mathbf{v}=\omega\times\mathbf{r}$	$\mathbf{V}=0$
Q	$\mathbf{v}=0$	$\mathbf{V}=\mathbf{r}\times\omega$

सदिश **M** के आकाश में स्थिर अंतबिंदु को बिंदु Q निर्वाचित करते हैं और इसलिए लिखते हैं—

$$\mathbf{r}=\mathbf{M}\ ,\ \mathbf{V}=\frac{d\mathbf{M}}{dt}.$$

इस प्रकार $\frac{d\mathbf{M}}{dt}$ का अर्थ हुआ "पिंड में परिवर्तन" (आकाश में हुए परिवर्तन को $\dot{\mathbf{M}}$ कहा गया था जो यहाँ शून्य है)।

तो सारणी की द्वितीय पंक्ति से पढ़ लिया जाता है—

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt}=\mathbf{M}\times\omega. \tag{1}$$

यह बलों के अनधीन घूर्णनयुक्त पिंड के यूलर-समीकरणों की व्युत्पत्ति को पूरा कर देता है।

(X,Y,Z)—प्रणाली में उनके घटकों के पदों में हम उनका पुनर्लेखन करेंगे। ω के घटकों को ω_1, ω_2, ω_3 और **M** के घटकों को M_1, M_2, M_3 कहेंगे। समी० (1) प्रदान करता है—

$$\frac{dM_1}{dt}=M_2\omega_3-M_3\omega_2,$$
(2)
$$\frac{dM_2}{dt}=M_3\omega_1-M_1\omega_3,$$
$$\frac{dM_3}{dt}=M_1\omega_2-M_2\omega_1.$$

यहाँ तक X,Y,Z की पद्धति नितान्त स्वेच्छ रही है। अब यदि X,Y,Z की दिशाएँ समी० (22.15 *a*) के मुख्य अवस्थितित्व-घूर्णो की ओर ले और उन्हे I_1, I_2, I_3 कहे, तो व्यापक सबध (24.9) के विचार से, प्राप्त करते है

(3) $$M_1=I_1\omega_1,\ M_2=I_2\omega_2,\ M_3=I_3\omega_3;$$

और (2) निम्नलिखित सरल रूप धारण करता है—

(4)
$$I_1\frac{d\omega_1}{dt}=(I_2-I_3)\omega_2\omega_3,$$
$$I_2\frac{d\omega_2}{dt}=(I_3-I_1)\omega_3\omega_1,$$
$$I_3\frac{d\omega_3}{dt}=(I_1-I_2)\omega_1\omega_2.$$

हम जब कभी यूलर-समीकरणों की बात करते है तब इन्ही विलक्षण रूप से सम्मित और सुरूप समीकरणो का ध्यान करते है।

आइए, इन्हे अब ऐसा बढाये कि एक बाह्य ऐठ **L** के प्रभाव की स्थिति सम्मिलित हो जाय। ऐसी स्थिति मे **M** का अतर्विदु आकाश में स्थिर नही रहता, वरन् (25.2) के अनुसार उसका वेग $\mathbf{v}=\mathbf{L}$.

पिंड की दृष्टि से, बिंदु Q अब ऐसे वेग से चलता है जो $\mathbf{v}=\mathbf{L}$ और $\mathbf{V}=\mathbf{r}\times\omega$ से संघटित होता है। इसका परिणाम यह होता है कि समी० (1) को

(5) $$\frac{d\mathbf{M}}{dt}=\mathbf{M}\times\omega+\mathbf{L}$$

में बदल देना चाहिए और (2) तथा (4) के दक्षिणी अगों से X,Y,Z सबंधी **L** के घटकों को जोड देना चाहिए। इससे एक स्थिर बिंदु वाले दृढ पिंड के यूलर के गति-समीकरण प्राप्त हो जाते हैं।

हम ये समीकरण स्पष्ट रूप से केवल भारी संमित लट्टू की स्थिति के लिए ही लिखेंगे, जहाँ **L** पातों की रेखा के प्रति काम करता है और, (25.4) से उसका परिमाण $|\mathbf{L}|=mgs\sin\theta$ होता है।

ऊर्ध्वाधर, समिति-अक्ष, पात-रेखा, इन शब्दों में जो कुछ भी द्वयर्थकता है उसे दूर करने के लिए हम मान लेंगे कि

आकाश में स्थित z-अक्ष की धनात्मक दिशा ऊपर की ओर है और ऊर्ध्वाधर दिशा निश्चित करती है—

Z–अक्ष की धनात्मक दिशा संहति-केन्द्र से होकर जाती है और संमिति-अक्ष निश्चित करती है, ऊर्ध्वाधर दिशा से वह एक कोण θ बनाती है ;

पातों की रेखा (पात-रेखा)[1] वह अर्ध-अनंत रेखा है, जो धनात्मक z–तथा Z–अक्षों के लंबवत् है और जो θ के अधिक होने में दक्षिणावर्त पेच के आगे बढ़ने की दिशा में है।

हम यह भी विशेषतया कह देते हैं कि दूरी s एक धनात्मक राशि है। जो कोण-पातों की रेखा धनात्मक X-अक्ष से बनाती है उसे ϕ कहिए, तो X,Y,Z संबंधी $\mathbf{L}$ के घटक होंगे—

(5 a) $$mgs \sin\theta \cos\phi, \quad -mgs \sin\theta \sin\phi, \quad 0,$$

क्रमात् ; और $I_1 = I_2$ के साथ समीकरण वृंद (4) निम्नलिखित हो जाते हैं

(6) $$I_1 \frac{d\omega_1}{dt} = (I_1 - I_3)\omega_2\omega_2 + mgs \sin\theta \cos\phi$$

$$I_1 \frac{d\omega_2}{dt} = (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 - mgs \sin\theta \sin\phi$$

$$I_3 \frac{d\omega_3}{dt} = 0.$$

पिछला समीकरण दिखलाता है कि भारी संमित लट्टू के लिए (और इसलिए, और भी अधिक पुष्ट प्रमाण के साथ, बलों के अनधीन लट्टू के लिए) हम प्राप्त करते हैं—

(7) $$I_3\,\omega_3 = M_3 = \text{constant} \ (\text{नियत}),$$

जिसे हम पहले से ही जानते थे। साथ ही साथ यह भी देखते हैं कि भारी लट्टू के लिए यूलर-समीकरण और अधिक समाकलन के लिए उपयुक्त नहीं है, क्योंकि अब तक हमें ω_1, ω_2 के बीच के एवं θ, ϕ के बीच के संबंधों का पता नहीं है।

इन $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ के बारे में हम जोर देकर यह कहना चाहते हैं *कि वे सामान्य अर्थ* में वेग नहीं हैं, अर्थात् वे किसी प्रकार की आकाशीय माप के समय संबंधी अवकलज[2]

1. Line of nodes 2. Derivatives

एक सम्मिश्र चर राशि का प्रयोग कर, इनको एक में मिला लेना सुविधाजनक है। द्वितीय समीकरण को i से गुणा कर प्रथम से जोड़ देने से बनता है—

(10) $$I_1\frac{ds}{dt}=i(I_3-I_1)\,s\omega_3,\ s=\omega_1+i\omega_2.$$

इसका सक्षेप निम्न लिखित प्रतिस्थापन द्वारा कर लीजिए—

(11) $$\alpha=\frac{I_3-I_1}{I_1}\omega_3.$$

तो (10) का समाकलन प्रदान करता है

(12) $s=s_0e^{i\alpha t}$, s_0=अनुकलन का नियतांक। s लट्टू के निरक्षीय समतल पर कोणीय सवेग सदिश ω का प्रक्षेप है, यदि इस समतल का s के सम्मिश्र-तल की भाँति उपयोग करें। समीकरण (12) कहता है कि यह प्रक्षेप नियत कोणीय वेग α से त्रिज्या s_0 का एक वृत्त बनाता है। साथ ही साथ संपूर्ण कोणीय वेग सदिश ω आकृति-अक्ष के चारों ओर एक वृत्तीय शंकु की रचना करता है। इस शंकु का शीर्ष कोण β ऐसा होता है कि

(12a) $$\tan\beta\ [\text{स्पज्या}\ \beta]=\frac{(\omega_1^2+\omega_2^2)^{\frac{1}{2}}}{\omega_3}=\frac{|s_0|}{\omega_3}$$

यह उस सम पुरःसरण का चित्र है जो लट्टू पर स्थित प्रेक्षक देखता है। (आकाश में स्थित प्रेक्षक की दृष्टि में लट्टू का अक्ष निःसदेह क्षणिक घूर्णन-अक्ष के चारों ओर घूर्णन करता है। यह अक्ष, जैसा कि पहले ही जान चुके हैं, अपनी पारी में आकाश-स्थित कोणीय सवेग सदिश **M** के चारों ओर एक वृत्तीय शंकु बनाता है।) कारण कि हमारा विचार ऊपर कही बातें पृथिवी पर लागू करने का है, अतः आकाश-स्थित प्रेक्षक का नहीं वरन् लट्टू पर स्थित प्रेक्षक का दृष्टिकोण अधिक उपयोगी होगा, क्योंकि वही पृथिवी पर स्थित मनुष्य के दृष्टिकोण से संगत होगा।

पृथिवी एक ऐसा लट्टू है जिसका घूर्णीय दीर्घवृत्तज निम्नाक्ष[1] उपगोल[2] है। जिस स्थान पर समिति-अक्ष पृथिवीतल को काटता है उसे ज्यामितीय उत्तरी ध्रुव कहते हैं। व्यापकतया, वह खगोलीय उत्तरी ध्रुव से भिन्न होता है। पश्चोक्त ध्रुव वह बिंदु है जहाँ कोणीय वेग सदिश पृथिवीतल को काटता है। ऊपर दिये हुए यूलर-वाद के अनुसार, खगोलीय उत्तरी ध्रुव ज्यामितीय उत्तरी ध्रुव के चारों ओर एक वृत्त बनाता है। इस दृग्विषय (घटना) को यूलरीय गति कहते हैं। घूर्णनीय

1. Oblate 2. Spheroid

ध्रुव का पथ होने के कारण इस वृत्त को ध्रुवपथ (अंग्रेजी मे पॉलहोड अर्थात् ध्रुवमार्ग) भी कहते हैं।

पृथिवी के चपटेपन की उपयुक्त माप तयोक्त दीर्घवृत्तीयता है, जिसका परिमाण है

$$(13) \qquad \frac{I_3 - I_1}{I_1} \backsim \frac{1}{300}\,.$$

पृथिवी का कोणीय वेग दिन के दैर्ध्य मे निर्धारित किया जाता है—

$$(14) \qquad \omega_3 \backsim \omega = \frac{2\pi}{\text{दिन}}\,,$$

जिससे (11) के अनुसार

$$(15) \qquad \alpha = \frac{I_3 - I_1}{I_1}\,\omega_3 = \frac{2\pi}{300}\,(\text{दिन})^{-1}.$$

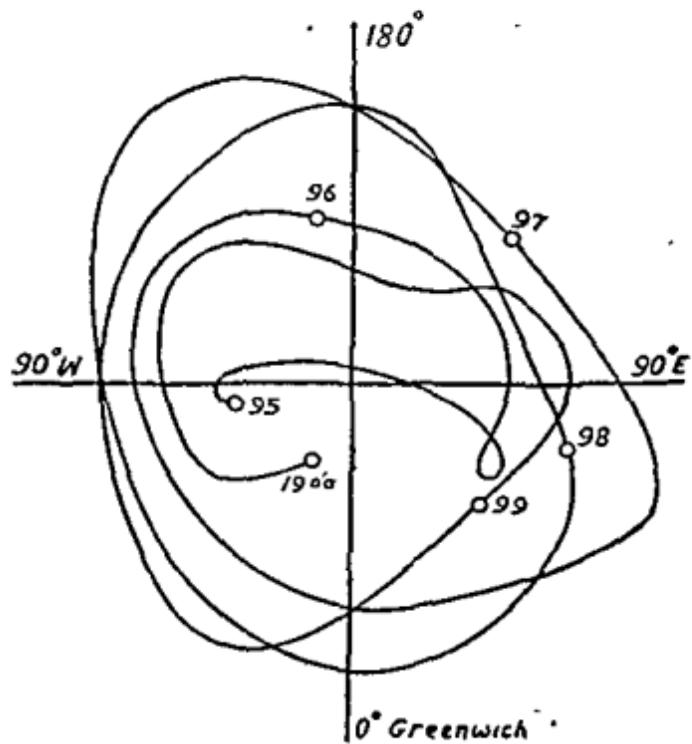
इस प्रकार पुरसरण के लिए यूलर का आवर्तकाल (यूलर काल) निकलता है

$$(16) \qquad \frac{2\pi}{\alpha} = 300 \text{ दिन} = 10 \text{ मास}\,।$$

हम पृथिवी के घूर्णन-अक्ष को पृथिवी-गोल (ग्लोब) मे स्थिर और ज्यामितीय ध्रुवों से जाते हुए समझने के अभ्यस्त हो गये हैं। यह पूर्ण रूप से ठीक नहीं है। पृथिवी पर किसी रेखांश के समातर किसी सहति का संचलन अवश्यमेव घूर्णन-अक्ष के स्थान में परिवर्तन कर देता है; और अक्षांश वृत्त पर सहित-सचलन अवश्यमेव कोणीय वेग अर्थात् दिन के दैर्ध्य मे परिवर्त्तन कर देता है।* ये दोनों परिवर्तन कोणीय सवेग के अविनाशित्व वाले नियम के परिणाम हैं। हम यह मान ले कि उक्त प्रकार के सचलन वद हो चुके हैं; और यह कि खगोलीय ध्रुव ज्यामितीय ध्रुव से विचलित है। इस स्थिति मे यूलरीय गति के प्रभाव से घूर्णन अक्ष ज्यामितीय ध्रुव के चारों ओर एक वृत्तीय गति प्रारभ कर देगा।

* इस प्रभाव के लिए जो पार्थिव संहति-परिवहन सबसे अधिक महत्त्व का है, वह एशिया महाद्वीप और प्रशान्त महासागर के बीच, यहाँ से वहाँ और वहाँ से यहाँ होनेवाला वायु का वार्षिक अभिप्रचारण है।

अब आइए, अपने सैद्धान्तिक परिणामों की ध्रुवीय उच्चावचनों के प्रेक्षणों से तुलना करें, जो अन्तर्राष्ट्रीय सहयोग से इकट्ठे किये गये हैं।

आ० ४४ में सन् १८९५ और सन् १९०० के बीच प्राप्त ध्रुपथ का स्थूल लेख्य किया गया है।

आकृति ४४—ध्रुवीय उच्चावचन, १८९५ और १९०० वर्षों के बीच के चादलर के आवर्तकाल का पुष्टीकरण।

खगोलीय ध्रुव का औसत विचलन, अर्थात् चूलर-वृत्त की माध्य त्रिज्या, इन वर्षों के प्रेक्षणों के अनुसार, कोई $\frac{1}{8}$ सेकंड चाप के या पृथ्वीतल पर ४ मीटर की है। परन्तु १० मास के काल के स्थान पर, आ० ४४ के अनुसार, सन् १९९६ से १९०० तक के चार वर्षों में ३½ पूरे परिक्रमण हुए, जिसके अनुसार काल १४ मास का हुआ।

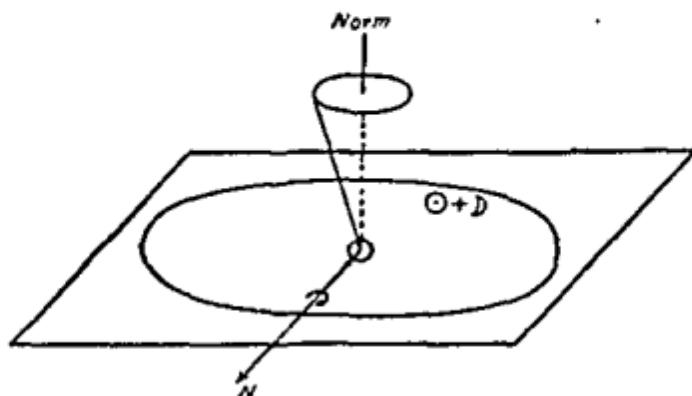
यह चौदह मास का आवर्त्तकाल, उसके अन्वेषक के नाम पर, चैण्डलर[1] काल कहलाता है। इसका स्पष्टीकरण उन प्रत्यास्थ विकृतियों से होता है जो ध्रुवीय उच्चावचन द्वारा परिवर्त्तित अपकेन्द्र प्रभाव के परिणामस्वरूप पृथिवी में होती है। पृथिवी की प्रत्यास्थता के मापांक का परिमाण फौलाद के मापांक की बराबरी करता है।

आकृति ४४ में खींचा हुआ प्रक्षित ध्रुवपथ निम्नलिखित तीन प्रभावों के अध्यारोपण द्वारा समझा जा सकता है—(१) चैण्डलर-काल में हुए उच्चावचन, (२) वार्षिक उच्चावचन, जिनका जन्म प्रकटतया अनिर्णीय है, और (३) असम कालांतरों पर होनेवाले विचलन जो पृथक्-पृथक् असंबंधित महति-परिवहनों की ओर लक्ष्य कर सकते हैं। यूलर के उस दस-मासिक काल का कोई भी चिह्न नहीं मिलता, जो पृथिवी को एक आदर्श दृढ़ पिंड मानकर व्युत्पन्न किया गया था।

पूर्णाक्ष स्थापकीयवाद की प्रथा के अनुरूप हमने पृथिवी के अक्ष की गति का वर्णन किया, जिसका पहले-पहल यूलर ने "बलों के अनधीन पुरःसरण" की भाँति अनुसंधान किया था। इस प्रकार हमने एक ऐसा शब्द अपना लिया है जो खगोल विज्ञान के प्रथानुसार एक बिलकुल दूसरे ही अर्थ में व्यवहृत होता है। वहाँ "पुरःसरण" से, क्रांतिवृत्त[2] के अभिलंब के चारों ओर पृथिवी के अक्ष के उस शनैः घूर्णन से मतलब है, जिसके कारण विषुवबिंदु[3] ५०″ प्रति वर्ष की दर से आगे बढ़ते रहते हैं। विषुवों[4] के इस पुरःसरण का आवर्त्तकाल $\frac{३६०°}{५०''}$ = २६००० वर्षों का है। "विषुवों के पुरःसरण" के स्थान पर "पातों की रेखा का आगे बढ़ना" भी कह सकते हैं। [क्रांतिवृत्तीय समतल जिस रेखा पर पृथिवी के निरक्षीय समतल[5] को काटता है, उसे 'पातों की रेखा' या 'पातरेखा' कहते हैं।] जैसा पहले कह चुके हैं, हमारा "पातों की रेखा" वाला नाम खगोल विद्या से लिया गया था।

विषुवों का पुरःसरण कोई स्वतंत्र गति नहीं है, वरन् सूर्य और चंद्र के आकर्षणों के संयुक्त प्रभाव द्वारा भूमण्डलीय लट्टू पर प्रणोदित गति है।

1. Chandler 2. Ecliptic 3. Equinoctial points
4. Equinox 5. Equatorial plane

इस प्रभाव का स्पष्टीकरण हम आ० ४५ द्वारा करेंगे, जहां हमने भारी संमित लट्टू के सिद्धानवाद की पूर्व कल्पना, कम से कम गुणात्मक दृष्टि से, कर ली है।

आकृति ४५—"विपुवों का पुरःसरण" नामक पृथिवी के अक्ष का पुरःसरण।

रेखाचित्र में क्रांतिवृत्त को समतल दिखलाया गया है जिस पर एक वृत्त खींच दिया गया है। हमें समझना चाहिए कि इस वृत्त की परिधि समभाव से सूर्य ⊙ और चंद्र ☽ की सहतियों से "लीप" दी गयी है। [वास्तव में हमें दो वृत्त खींचने चाहिए, एक सूर्य के लिए और एक चद्र के लिए।* हमने इन दोनों वृत्तों को एक में ही मिला दिया है।] एक समान सहति-वितरण सूर्य और चद्र के (गाउसीय स्थानच्युति की विधि के भाव में) उनके परिभ्रमणों में उनके पृथिवी संबधी क्षणिक स्थानों का समय-औसत निरूपित करते हैं। इस प्रकार का समय-औसत लेना इस प्रयोगात्मक तथ्य द्वारा ठीक ठहराते हैं कि पुरःसरण के उल्लिखित आवर्तकाल की तुलना में सूर्य और चन्द्र के आवर्तकाल बहुत ही छोटे हैं, अतएव यह पुरःसरण किसी भांति भी सूर्य और चद्र के क्षणिक स्थानों पर निर्भर नहीं कर सकता। ⊙+☽ वृत्त के केंद्र पर, भूमध्यरेखा पर अपने दो उभारों के सहित पृथिवी की एक अनुप्रस्थ काट दिखायी गयी है। ये उभार ही प्रस्तुत घटना में भाग लेते हैं, क्योंकि ⊙+☽ वलय दोनों उभारों को क्रांति-वृत्त के समतल में खींच लाना चाहते हैं। यह एक ऐसा प्रभाव है जो अन्तर्ज्ञानतः प्रत्यक्ष जैसा जान पड़ता है। अतएव पात-रेखा N के

* बात तो यह है कि चंद्र पृथिवी के इतना पास है कि उसका प्रभाव सूर्य के प्रभाव से लगभग दुगुना है।

चारों ओर एक ऐंठ प्राप्त होती है जो N के चारों ओर दिखलायी तीर की दिशा मे होती है। यह ऐंठ उसी प्रकार की है जैसी कि एक ऐसे लट्टू पर आरोपित गुरुत्वाकर्षणीय ऐंठ, जिसका सहृति-केन्द्र उसके स्थिर आधार बिंदु के नीचे होता है। अतएव परिणाम भी वैसा ही होता है जैसा कि लट्टू वाली स्थिति मे। लट्टू अपने को ऐंठ को तो नही सौप देता, किंतु उसका आकृति-अक्ष उससे "बचकर" एक लंबवत् दिशा में चला जाता है और ऊर्ध्वाधर के चारो ओर एक पुरसरण का शकु बनाने लगता है। ऊर्ध्वाधर यहाँ क्रातिवृत्त का अभिलब[1] है।

निश्चय ही, **सम पुरसरण** भारी लट्टू की गति का एक विशेष प्रकार है (दे० पृ० १८३)। अतएव प्रस्तुत परिस्थितियों में अधिकतर व्यापक **छद्म-सम पुरसरण** की प्रत्याशा करनी चाहिए, जिसमे सम पुरसरण पर छोटे-छोटे "अक्ष-विचलन"[2] अध्यारोपित होंगे। ये छोटे-छोटे अक्ष-विचलन और कुछ नही, 'केवल बलो के अनधीन आकृति-अक्ष के शक्वाकार दोलन-वृंद, अतएव, प्रस्तुत स्थिति मे, ध्रुवीय उच्चावचन हैं जो यूलर के आवर्त्तकाल में होते हैं [या चैण्डलर काल मे, जो भूमडलीय विकृति द्वारा पूर्वोक्त से प्राप्त होते हैं]। जिन छद्म-सम पुरसरणों की प्रत्याशा थी वे इस प्रकार बलों की अनुपस्थिति मे होनेवाले यूलरीय अक्ष-विचलन को जोड़ देने से विषुवों के पुरसरण से प्राप्त होते हैं।

यहाँ पर एक बार फिर हम एक पद के द्व्यर्थक व्यवहार के लिए क्षमायाचना करते हैं। खगोल विज्ञान में अक्ष-विचलन से पृथिवी के अक्ष का **स्वतंत्र** उच्चावचन नही समझा जाता, वरन् वह, जो उस पर चन्द्र की गति से प्रणोदित होता है। आकृति ४५ में हमारे उल्लिखित अनुमानो के प्रतिकूल, चन्द्र का कक्षा-समतल क्राति-वृत्त से सपाती नही है, वरन् उससे कोई ५° के कोण पर झुका हुआ है। सूर्य और पृथिवी की सयुक्त क्रिया के अधीन उसका अभिलब भी क्रातिवृत्त के अभिलब के चारो ओर एक पुरसरण शकु की रचना करता है। यह पुरसरण चन्द्रीय पातों के **पश्चसरण**[3] के समान है। [चंद्रीय कक्षा की क्रातिवृत्त से काट को 'चंद्रीय पात' कहते हैं।] परतु यह पश्चसरण पृथिवी की पातरेखा के आगे बढने की अपेक्षा बहुत ही शीघ्रता से, केवल १८ $\frac{2}{3}$ वर्षों में, होता है। यह समझने मे कोई कठिनाई न होनी चाहिए कि इस पुरसरण मे अपनी बारी से पृथिवी का अक्ष भी आता है। चन्द्रीय पातों के

1. Normal 2. Nutations 3. Recession

पश्चसरण का परिणाम होता है पृथिवी-अक्ष का खगोल विज्ञान में आया अक्ष-विचलन, *जिसका आवर्त्तकाल वही है जो चंद्र-पातों के पश्चसरण का है।*

(३) बलों के अनधीन अ-संमित लट्टू की गति। स्थायित्व के विचार से उसके घूर्णनों की परीक्षा।

अब हम समीकरणों (4) के समाकलन की ओर चलते हैं, उस स्थिति में जब $I_1 \neq I_2 \neq I_3$. इन समीकरणों को क्रमान् ω_1, ω_2, ω_3 से गुणा कर उनका योग निम्नलिखित प्रदान करता है—

$$I_1\,\omega_1\,\frac{d\omega_1}{dt} + I_2\,\omega_2\frac{d\omega_2}{dt} + I_3\,\omega_3\,\frac{d\omega_3}{dt} = 0$$

या, समाकलन करने पर,

(17) $$\tfrac{1}{2}\left(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2\right) = \text{नियत} = E.$$

E ऊर्जांक (ऊर्जा नियतांक) है और बायाँ अंग गतिज ऊर्जा है। यह समी० (22.12b) से सहमत है यदि उसे मुख्य अक्षोंके लिए विशिष्टीकृत कर लें। स्पष्ट है कि (17) के स्थान पर हम निम्नलिखित भी लिख सकते हैं—

(17a) $$E_{kin}\ [\,E\ \text{गतिज}\,] = \tfrac{1}{2}\,\mathbf{M}.\ \omega.$$

इसके स्थान पर हम समीकरणों (4) को $I_1\omega_1, I_2\omega_2, I_3\omega_3$ से गुणा कर सकते हैं। जोड़ने से एक बार फिर दायीं ओर शून्य मिलता है। समाकलन का फल इस प्रकार लिखा जा सकता है—

(18) $$(I_1\omega_1)^2 + (I_2\omega_2)^2 + (I_3\omega_3)^2 = \text{नियत} = |\mathbf{M}|^2.$$

बायीं ओर कोणीय संवेग घटको के वर्गफलों का योग है। जैसा कि जानते है, बलों की अनुपस्थिति में यह योग निश्चर रहता है, गति के मध्य में घटक भले ही बदलें।

(17) और (18) में हमें ω_1^2, ω_2^2, ω_3^2 के लिए दो रैखिक समघात समीकरण मिलते हैं, जिनको, उदाहरणार्थ, ω_2^2 और ω_3^2 के लिए ω_1^2 के पदों में हल कर सकते हैं,

(19)
$$\omega_2^2 = \beta_1 - \beta_2\omega_1^2,\quad \beta_1 = \frac{2EI_3 - |\mathbf{M}|^2}{I_2\,(I_3 - I_2)},\quad \beta_2 = \frac{I_1\,(I_3 - I_1)}{I_2\,(I_3 - I_2)};$$

$$\omega_3^2 = \gamma_1 - \gamma_2\,\omega_1^2,\quad \gamma_1 = \frac{2\,EI_2 - |\mathbf{M}|^2}{I_3\,(I_2 - I_3)},\quad \gamma_2 = \frac{I_1\,(I_2 - I_1)}{I_3\,(I_2 - I_3)}.$$

ω_2, ω_3 के इन मानों को यदि (4) के प्रथम समीकरण में प्रतिस्थापित करें तो निम्नलिखित प्राप्त होता है—

$$(20) \qquad \frac{d\omega_1}{[(\beta_1-\beta_2\omega_1^2)(\gamma_1-\gamma_2\omega_1)]^{\frac{1}{2}}} = \frac{I_2-I_3}{I_1}\,dt$$

अतएव t, ω_1 में, प्रथम प्रकार का दीर्घवृत्तीय समाकल है (मिलाइए, पृ० १३८)। फलनवाद हमें इसका उलटा कहने की अनुमति देता है कि ω_1 समय का दीर्घवृत्तीय समाकल है। निःसंदेह यही ω_2 और ω_3 के लिए भी लागू है।

समीकरणों (17) और (18) से यह और भी निकलता है कि ध्रुवय-शंकु या पिंड-शंकु अब वृत्तीय शंकु नहीं रहता, जैसा कि समित लट्टू के लिए वह होता है, वरन् चतुर्थ घात का शंकु हो जाता है।

अंत में अपने तीन मुख्य अक्षों में से किसी एक के चारों ओर अ-समित लट्टू के घूर्णन पर विचार करेंगे। हम जानते हैं (मिलाइए, § २५, उप प्र० (३) की समाप्ति की ओर) कि वे स्थिर भाव के घूर्णन होंगे। निश्चितता के लिए हम समझ लेंगे कि—

$$A>B>C.$$

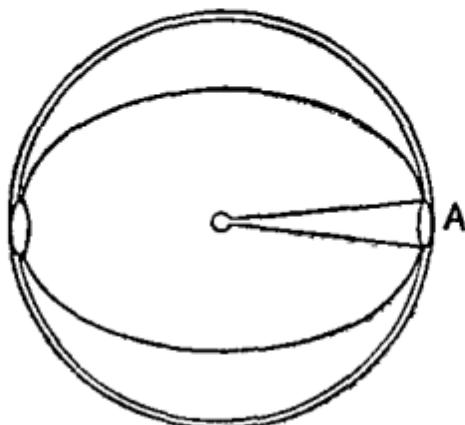
हम देखेंगे कि महत्तम और लघुतम अवस्थितित्व घूर्ण के अक्षों के प्रति के घूर्णन स्थायी होंगे, अतरवर्ती मुख्य घूर्ण के अक्ष के प्रति के अस्थायी। हम समीकरणों (17) और (18) से आरंभ करना ठीक समझते हैं। आगे दिये हुए रेखाचित्रों (आकृतियाँ ४६, पृ० १९८) के संबंध में सुविधाजनक होगा कि इन्हें कोणीय संवेग-घटकों M_1, M_2, M_3 के पदों में लिख लें—

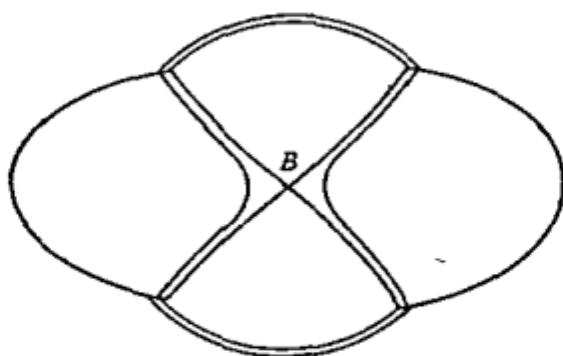
$$(21a) \qquad \frac{M_1^2}{I_1}+\frac{M_2^2}{I_2}+\frac{M_3^2}{I_3}=\text{नियत},$$

$$(21b) \qquad M_1^2+M_2^2+M_3^2=\text{नियत}=|\mathbf{M}|^2$$

समी० (21*b*) एक गोल का समीकरण है जिसकी त्रिज्या $|\mathbf{M}|$ है; (21*a*) तीन पृथक् अक्षों के दीर्घवृत्तज ("अभ्रप्ट" दीर्घवृत्तज) का है।

स्थिति १—दीर्घवृत्तज (21*a*) के दीर्घतम अक्ष के चारों ओर घूर्णन। शुद्ध घूर्णन में गोला बाहर से दीर्घवृत्तज को बिंदु A (आ० ४६क) पर स्पर्श करता है।

व्यापकतया, एक हलका-सा झटका गोले और दीर्घवृत्तज दोनों में ही परिवर्तन कर देगा। स्पर्शता का बिंदु A एक छोटे-से प्रतिच्छेद-वक्र[1] में परिवर्तित हो जायगा,

आकृति ४६ क—असमित लट्टू का घूर्णीय दीर्घवृत्तज के दीर्घतम अक्ष के चारों ओर स्थायी घूर्णन

परंतु यह A के आस-पास ही रहेगा। परिणाम होगा एक सँकरा पिंड-शंकु। प्रारंभ का घूर्णन स्थायी सिद्ध होता है।

आकृति ४६ ख—असमित लट्टू का घूर्णीय दीर्घवृत्तज के अंतरवर्ती अक्ष के चारों ओर अस्थायी घूर्णन

1. Curve of intersection

यही बात स्थिति ३ मे भी होती हे जिसमे घूर्णन दीर्घवृत्तज (21*a*) लघुतम अक्ष पर होता है। इस स्थिति मे गोला दीर्घवृत्तज के भीनर होना है और इसलिए स्पर्शता भीतर से होती है। हलका-सा झटका यहाँ भी स्पर्शता-बिदु को आस-पास के वक्र मे रूपांतरित कर देगा। आरभ का घूर्णन यहाँ भी स्थायी होगा।

स्थिति २—अतरवर्त्ती अक्ष के चारो ओर घूर्णन। यहाँ गोल दीर्घवृत्तज को एक चतुर्थ घात के वक्र मे प्रतिच्छेद करता है। उसका अपूर्व बिदु B (आ० ४६-ख मे सबसे आगे का बिदु) प्रारभ के घूर्णन को निरूपित करता है। यदि लट्टू को एक छोटा-सा आवेग दिया जाय तो प्रतिच्छेद वक्र फटकर दो शाखाओं म हो जाना है। घूर्णन अक्ष इनमे की एक शाखा पर चल निकलता है और पिड मे उसके आदि के स्थान से उसकी दूरी बढती रहती है। घूर्णन अस्थायी होगा।

इन बातो को वैश्लेपिकतया सिद्ध करना शिक्षाप्रद होगा। वैसा करने के लिए अवकल समी० (4) से आरभ करते हैं। यह दिखलाया जा सकता है (प्रश्न IV. 2) कि आरभ के घूर्णन के छोटी-सी स्थानच्युति द्वारा उत्पादित पार्श्वीय घटकगण प्रथम घात के दो युगपत् अवकल समीकरणों को सतुष्ट करते हैं। प्रथम और तृतीय स्थितियों में तो इनके साधन त्रिकोणमितीयात्मक होते हैं परंतु द्वितीय स्थिति मे घातीयात्मक[1] (स्थायित्व की कसौटी के लिए अत्यणु दोलनों की विधि)।

आइए, निम्नलिखित प्रयोग दियासलाई की (भरी हुई) डिबिया के साथ करे—उसके सबसे छोटे एक किनारे को आमने-सामने अँगूठे और तर्जनी से पकड कर डिबिया को झटका देकर छोड दीजिए (कि डिबिया लघुतम किनारे पर कलाबाजियाँ करती हुई गिरे)। इस प्रकार उसे इस लघुतम किनारे के प्रति पर्याप्त बडा कोणीय सवेग दे देते हैं। हम देखेंगे कि यदि प्रारभ मे डिबिया का ऊपर का लेबल वाला पार्श्व दिखलाई देता हो तो सारी गति भर वही पार्श्व दिखलाई देता रहेगा। यदि दीर्घतम किनारे को उसी प्रकार पकड़ कर छोडे तो वैसी ही घटना होगी यद्यपि उतनी स्पष्टता से नही। परतु यदि अतरवर्त्ती किनारे को आमने-सामने से पकडे कि सलाई लगाने वाला पृष्ठ दिखाई दे और अब पहले जैसी प्रक्रिया करें तो सारी गति भर हम यह पृष्ठ न देखेंगे, वरन् रग-परिवर्त्तन होता रहेगा।

गति की दशा के अस्थायीपन का एक दूसरा उदाहरण निम्नलिखित हे—कभी-कभी प्रकृति में घिसकर चिकने हुए पृष्ठों वाली चपटी बटियाँ या छोटे-छोटे पत्थर

1. Exponential

के टुकड़े मिलते हैं। किसी चौरस आधार पर रख कर यदि उन्हें अपने ऊर्ध्वाधर अक्ष के चारों ओर नचावें तो घूर्णन की केवल एक ही दिशा के लिए वह गति स्थायित्व दिखायेगी। यदि इसको प्रतिकूल दिशा में नचाया जाय तो अधिकाधिक लड़खड़ाने लगेगी और अत मे स्थायी दिशा मे, प्रारंभ की दिशा से प्रतिकूल दिशा मे, नाचने लगेगी। यही बात बहुधा छोटे-छोटे जेबी (पेंसिल बनाने के) चाकुओं के साथ भी होती दीख पड़ेगी, यदि हम चाकू के फल बद कर, उसे किनारे पर रख कर हलका-सा आवेग दे दें।

इस संबंध मे हम ज्यामितीय दृष्टि से सुस्पष्ट शिक्षाप्रद प्रयोग भी कर सकते हैं। एक अभ्रष्ट[1], चपटा, मुख्य अक्ष a, b, c वाला ($a>b>c$ तथा a और b का दैर्ध्य c से बहुत अधिक), लकड़ी का बना दीर्घवृत्तज का प्रतिमान[2] लीजिए। इस पर एक धातविक भारी पट्टी लगा दीजिए जो कि प्रारंभ मे दीर्घवृत्तज के तल से (a, c) काट में सटी हुई रहे। पट्टी को छोटे c-अक्ष के चारों ओर घुमा फिरा सकते हैं, परंतु प्रत्येक प्रयोग मे जकडी हुई रखी जाती है। ac स्थिति में पट्टी संहति-वितरण की समिति में गड़बड़ी नहीं डालती। c के चारों ओर का घूर्णन दोनो दिशाओं मे एक-सा स्थायी होगा। अब पट्टी को इस स्थिति से छोटे-से कोण द्वारा घुमा दीजिए। तो दोनो अवस्थितित्व के मुख्य अक्ष a और b में का प्रत्येक एक छोटे-से कोण γ द्वारा विस्थापित हो जावेगा। समतल आधार के सामने के दीर्घवृत्तज के निचले तल की समिति ac और bc समतलों की दो मुख्य वक्रता त्रिज्याओं द्वारा निर्धारित होती है। अतएव इन समतलों की समिति अपरिवर्तित रहती है। न्यूनकोण γ में नचाने की दिशा अब प्रतिकूल दिशा से ज्यामितीयतया "पहचानी" जा सकती है। वास्तव मे पूर्वोक्त स्थायी है, उत्तरोक्त अस्थायी क्योंकि उस स्थिति में लुंठन (लुढकने) की गतियाँ होती हैं जो समय के साथ और भी अधिक हो जाती हैं।

इस प्रयोग का एक अधिक सुदर, यद्यपि कम सुलभता से प्राप्य, रूप निम्नलिखित है (जी० टी० वाकर ने उसका निदर्शन हमें सन् १८९९ मे ट्रिनिटी कालेज, केम्ब्रिज में कराया था)—अभ्रष्ट दीर्घवृत्तज पीतल की चादर का बना हुआ है। आधार बिंदु के चारो ओर के कुछ वृत्तीय प्रदेश पर ठप्पा डाला हुआ है। शेष के दीर्घवृत्तजीय ढाँचे पर यह चलाया जा सकता है। इस डाट के एक छोटे-से कोणीय विस्थापन

1. Non-degenerate 2. Model

द्वारा आधार बिंदु के पास के निचले तल के वक्रता-सबध, ढाँचे के अवस्थिन्त्वीय वितरण के लिए, बदल जाते है यद्यपि यह वितरण गोचरतया अपरिवर्त्तित रहता है। यह परिवर्तन इतना कम है कि यदि दीर्घवृत्तज की परीक्षा करे तो वह अलक्षित ही रहता है। फिर भी नचाने की एक दिशा अभी भी दूसरी की अपेक्षा अधिमान्य है।

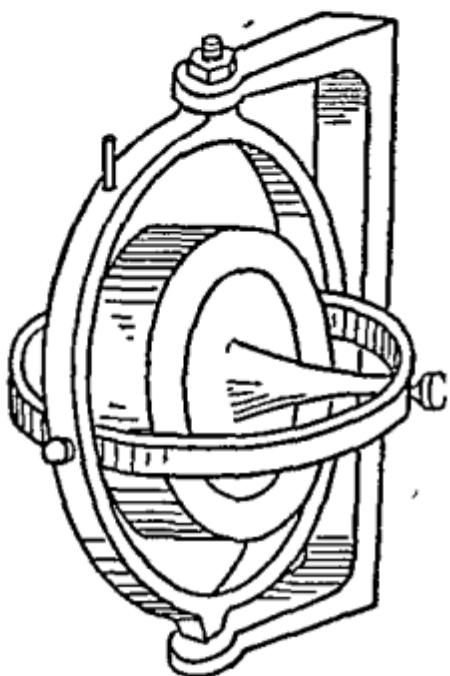
अभ्रष्ट दीर्घवृत्तज के ये प्रयोग, स्वयमेव ज्ञानप्रद, इस घटना की वैश्लेषिक विवृति का पर्याप्त प्रतिस्थापन भी प्रदान करते हैं। इस प्रकार के गणितीय अनुसधान मे उन लुंठन-दोलनो की जांच-पड़ताल करनी होगी जो नचाने पर किसी छोटी-सी स्थान-च्युति के अध्यारोपण से एक या दूसरी दिशा मे नचाने के साथ होने लगते है। वह दिखावेगा कि इन दोलनो की आवृत्ति के लाक्षणिक समीकरण के वास्तविक मूल एक ही स्थिति में होगे, दूसरी स्थिति में मूल सम्मिश्र होंगे। प्रथम स्थिति मे निर्णय होगा कि घूर्णन स्थायी है, द्वितीय स्थिति मे अस्थायी अर्थात् स्थान च्युति का अधिकाधिक होते रहना। इस विवृति के समीकरण राउथ[1] कृत ग्रथ (उच्चतर भाग, प्रकरण २४ तथा आगे के) में दिये हैं जिनका उल्लेख § ४२ मे होगा।

§ २७. नाचते हुए लट्टू के सिद्धान्त सम्बन्धी प्रदर्शक-निदर्शन-प्रयोग; व्यावहारिक अनुप्रयोग

कार्डन[2] का आलंबन नामक सुविज्ञात युक्ति के वर्णन से हम प्रारभ करते है। लट्टुओ और घूर्णाक्ष स्थापको[3] के गुणधर्मो के निदर्शन के लिए यह एक असाधारणतया कार्यसाधक उपाय प्रस्तुत करता है।

आलवन मे एक बाहरी और एक भीतरी वलय (घेरा) होता है। बाहरी घेरे की एक ऊर्ध्वाधर धुरी होती है जो बाहरी ढाँचे या पिंजरे मे लगी होती है। भीतरी घेरे की एक क्षैतिज धुरी होती है जो बाहरी घेरे मे लगी होती है। गतिपालक चक्र के रूप का लट्टू भीतरी घेरे के घूर्णन-अक्ष के लववत् अपने अक्ष पर घूर्णन करता है। आकृति ४७ गतिपालक धुरी को बाहरी घेरे के अक्ष के लववत् लक्ष्य करते हुए दिखलाती है। यह भीतरी वलय को क्षैतिज समतल में रखता है। उपकरण की इस व्यवस्था को उसकी प्रकृत स्थिति कहेगे।

1. Routh 2. Cardan 3. Gyroscope

गतिपालक चक्र की धुरी पर एक ऐसा उपाय किया हुआ है कि जिंबलों[1] (लटकाने के छल्ले आदि की युक्ति) को स्थिर रखते हुए, चक्र को उसकी प्रकृत स्थिति में रखते हुए कोणीय संवेग दिया जा सकता है। इस कोणीय संवेग को इतना बड़ा होना चाहिए कि अन्य सब बातें उसी से सारतः शासित रहें और जिंबलों की संहति का प्रभाव उपेक्षित रहे।

आ० ४७—कार्डन-आलंबन मे घूर्णाक्ष स्थापक। बाहरी वलय का घूर्णनाक्ष=उर्ध्वाधर; भीतरी वलय का घूर्णनाक्ष=कागज के लंबवत् क्षैतिज; घूर्णाक्ष स्थापक के स्थायी घूर्णनाक्ष= कागज के समतल मे क्षैतिज।

नीचे दिये हुए प्रयोगों में काफी बड़ा कोणीय संवेग और आदि में प्रकृत स्थिति मान ली जायगी।

१. **भीतरी वलय** पर हम हलका-सा दाव नीचे की ओर डालते हैं। परंतु यह वलय नही दबता वरन् **बाहरी** वलय पलट जाता है। इसलिए गतिपालक चक्र का अक्ष, क्षैतिज समतल में, दाब डालने के स्थान पर निर्भर करते हुए, आगे या पीछे को जाता है। भीतरी वलय को दबाने के बदले उस पर एक छोटे-से बट्टे द्वारा, एकपार्श्वतः बोझ डाल सकते हैं। तो जब तक कि कोणीय संवेग काफी बड़ा रहता है लट्टू का क्षैतिज अक्ष एक **सम पुरःसरण** करता है।

२. अब **बाहरी वलय** को दबाइए। वह तो गतिहीन रहता है परतु **भीतरी** वलय, बाहरी वलय पर, दाब की दिशा मे निर्भर करता हुआ, अपनी क्षैतिज स्थिति से ऊपर या नीचे जाता है। बाहरी वलय पर यदि मुक्का भी मारे, तो भी वह विशेष कुछ नही दबता। परतु वैसा करने पर देखेंगे कि लट्टू के अक्ष का, प्रकृत अवस्था में अक्ष के पास के स्थान के चारों ओर, एक क्षिप्र शकवीय दोलन होने लगता है।

1. Gimbals

३. यदि वाहरी वलय पर दाव पड़ता रहे जिससे कि भीतरी वलय के अनवरत घूर्णन के कारण, लट्टू का अक्ष ऊर्ध्वाधर के पास पहुँचता रहे, तो देखेंगे कि वाहरी वलय का प्रतिरोध अधिकाधिक दुर्बल होता जाता है। तब अनायास ही वाहरी वलय को क्षिप्र घूर्णनावस्था में कर सकते हैं, परन्तु उसी दिशा में जिसमें कि प्रारम्भ में दाव डाला गया था। यदि वाहरी वलय को प्रतिकूल दिशा में घुमाने का यत्न करें तो गतिपालक चक्र "विद्रोह" करता है, उसका अक्ष एकाएक प्रतिकूल दिशा में जाना चाहता है, और इस प्रकार भीतरी वलय को १८०° के कोण का झटका दे देता है। अब वाहरी वलय को अनायास इस प्रतिकूल दिशा में घुमा सकते है ; परन्तु यदि प्रारम्भ की घूर्णन दिशा को लौटावे तो लट्टू को एक दूसरा झटका लगता है।

४. यह घूर्णनोंकी परस्पर समांतर होने की प्रवृत्ति है जिसके बारे मे फूको[1] ने जोर दिया था। लट्टू का अक्ष ऊर्ध्वाधर स्थिति मे तभी तक स्थायी दशा मे होगा जब तक कि उसका घूर्णन वाहरी वलय के घूर्णन से समसंस्थ[2] अर्थात् एक ही भाव में (सम, समान; संस्थ, ठहराव) रहेगा। इसके विपरीत, यदि घूर्णन प्रति-समातर हो तो यह स्थिति अत्यन्त ही अस्थायी होगी और अक्ष तब ही विराम दशा मे आवेगा जब कि वह प्रतिकूल दिशा मे पहुँच जाय। इस पश्चोक्त दिशा में दोनों घूर्णन-अक्षों का समानरत्व फिर समसंस्थ हो जाता है। यदि वाहरी वलय के पार्श्वों पर दोनों ओर पारी-पारी से उचित काल मे दाव डालें तो लट्टू को भीतरी वलय के अक्ष के चारों ओर निरन्तरतया परिक्रमण करा सकते है।

५. यदि भीतरी वलय को वाहरी से इस प्रकार वांध दे कि भीतरी वलय की गतिशीलता न रहे तो लट्टू का गति के विरुद्ध प्रतिरोध भी नष्ट हो जाता है। ऐसा जान पड़ने लगता है कि अब उसकी कोई अपनी निज की इच्छा रही ही नहीं और अब जो भी दाव वाहरी वलय पर डाला जाय, लट्टू उसी का अनुसरण करता है, मानों लट्टू नाच ही न रहा हो। इस प्रकार लाक्षणिक घूर्णाक्ष-स्थापकीय प्रभाव तभी होते है जब लट्टू की स्वतत्रता-संख्याएँ तीन हो, यदि ये दो ही हुईं तो उक्त प्रभावों का नितात अभाव हो जाता है। परतु पृ० १०१ पर वर्णित आवर्त्तन-स्टूल के घूर्णनयुक्त पटरे से लट्टू को क्लैंप कर देने से लुप्त स्वतत्रता-संख्या का प्रत्यवस्थान[3] किया जा सकता है। यह इस प्रकार किया जाना चाहिए कि वाहरी वलय का अक्ष, जो अब

1. Foucault 2. Homologous 3. Restitution

तक ऊर्ध्वाधर रखा गया है, स्टूल के अक्ष के (जो सदा ऊर्ध्वाधर रहता है) विचार से झुक जाय और झुकाने का कोण बहुत छोटा न हो, तो दो स्वतंत्रता-सख्याओं वाले लट्टू का अक्ष घूर्णन करते हुए आधार के अक्ष की रेखा मे होना चाहता है, ठीक वैसे जैसे कि दिक्सूचक की सुई चुबकीय उत्तरी ध्रुव की ओर होने की चेष्टा करती है, अर्थात् ऊपर वर्णन किये हुए समसस्थ समातरत्व के भाव मे। इस प्रकार लट्टू को रखनेवाले एकाकी वलय का अक्ष ऊर्ध्वाधर समतल मे होकर इस प्रकार ठहरेगा कि लट्टू की धुरी की एक या दूसरी नोक, स्टूल के घूर्णन की दिशा पर निर्भर करते हुए, सबसे ऊपर होगी।

इन सब घटनाओं का स्पष्टीकरण (25.5) के मौलिक सिद्धात मे, अर्थात्

$$(1) \qquad d\,\mathbf{M} = \mathbf{L}\,dt.$$

अतर्निहित है। इस समीकरण द्वारा ऊपर दिये हुए पाँचों प्रयोग नीचे लिखे प्रकार से स्पष्टीकृत होते है।

१. जब भीतरी वलय को दवाते है तब $\mathbf{L}$ क्षैतिज और भीतरी वलय के घूर्णन अक्ष से सपाती होगा। कोणीय सवेग $\mathbf{M}$ आ० ४७ की बायी या दायी ओर निर्देशित होगा और इसलिए $\mathbf{L}$ द्वारा पार्श्वतः विक्षिप्त[1] हो जायगा। यदि यह मान लिया जाय कि लट्टू के अक्ष मे, जो प्रारंभ मे कोणीय सवेग से सपाती होता है, उसी का अनुसरण कर इस सपात को बनाये रखने की प्रवृत्ति होती है, तो आकृति-अक्ष का पार्श्वीय विक्षेप, अर्थात् बाहरी वलय का घूर्णन, स्पष्ट हो जाता है। जो अनुमान यहाँ किया गया है वह लट्टू के पर्याप्त क्षिप्र घूर्णनों के लिए वास्तव मे वैध है, यह § ३५ में समर्थित किया जायगा (देखिए, उस प्रकरण मे छद्म-सम पुर-सरण के बारे मे विचारालोचन)।

२. यदि बाहरी वलय पर दाब डाले तो $\mathbf{L}$ ऊर्ध्वाधरतया निर्देशित होता है। कोणीय सवेग, जो प्रारभ मे क्षैतिजतया दाये या बाये निर्दशित होता है, ऊपर या नीचे की ओर विक्षिप्त हो जायगा। अतएव उसी अनुमान द्वारा, जो (1) मे किया था, भीतरी वलय का घूर्णन प्राप्त करते हैं। यदि बड़ा प्रबल मुक्का बाहरी वलय पर लगायें तो कोणीय सवेग और लट्टू के अक्ष का सपात वाला हमारा अनुमान सन्नि-कटतया ही सतुष्ट होगा। तो अब पहले कहे हुए वे छोटे-छोटे शक्वाकार दोलन होने लगेंगे, जिनसे दोनों अक्षो के छोटे-से स्थान-भ्रश होने का भेद खुल जाता है।

३ और ४. उसी प्रकार देखिए कि यदि कोणीय सवेग का अक्ष ऊर्ध्वाधर-प्राय हो और यदि बाये वलय को लट्टू के घूर्णन के समसस्थ भाव मे घुमाये, तो कोणीय सवेग का अक्ष और अधिक ऊर्ध्वाधर के पास हो जाता है। तब जिवल और गतिपालक चक्र एक ही मे होकर ऊर्ध्वाधर के चारो ओर घूर्णन करते है। बाहरी वलय का प्रतिरोध जाता रहता है। यदि बाहरी वलय को असमसस्थ या प्रतिसमातर भाव में घुमा दे तो अक्ष का ऊर्ध्वाधर से तनिक-सा ही विचलन अक्ष को ऊर्ध्वाधर से अधिकाधिक हटाने के लिए पर्याप्त होता है। लट्टू की ऊर्ध्वाधर-प्राय स्थिति ऐसे असमसस्थ घूर्णन के लिए अस्थायी सिद्ध होती है।

५. यदि बाहरी और भीतरी वलय को एक-साथ बाँध दे तो बाहरी पहिये के घूर्णन से उस पर लगायी हुई ऊर्ध्वाधर ऐंठ **L** के वश कोणीय सवेग का अक्ष अब ऊर्ध्वाधर समतल मे नही घूम सकता। अतएव ऐंठ सारे निकाय मे सचारित हो जाती है। ऐसा होना संभव है क्योंकि सदिश **M** मे जो क्षैतिज दिक्-परिवर्त्तन होता है वह बाहरी वलय के धुराधारों द्वारा प्रतिकारित किया जा सकता है, क्योंकि अब भीतरी और बाहरी वलय दृढ़तापूर्वक सबधित है। परतु आवर्त्तन-स्टूल पर ऐसा नही होता। यहां कोणीय सवेग आरोपित **L** का कम-से-कम कुछ-न-कुछ अनुसरण कर सकता है। इससे समझ मे आ जाता है कि लट्टू के अक्ष की, स्टूल के अक्ष की दिशा मे लक्ष्य करने की प्रवृत्ति क्यो होती है।

अब हम कई व्यावहारिक अनुप्रयोगों की चर्चा करेंगे। पहले से ही बता देना चाहिए कि आगे दिये हुए विवेचन की बहुत सी बातो के ब्यौरे पुराने साहित्य मे मिल सकते हैं, जहाँ से ही नीचे की बहुत सी बाते ली गयी है।

(१) घूर्णाक्ष-स्थायीकारक और तत्सबंधी बातें

सन् १८७० के लगभग हेनरी बेसेमर[1] ने, जिनका नाम धातुशोधन के लिए विख्यात है, इंग्लिश चैनल पर जहाजी यात्रा के लिए एक बैठक-कोठरी[2] का निर्माण किया। वह कोठरी इस प्रकार लटकायी हुई थी कि जहाज के एक आगे-पीछे के अक्ष के प्रति इधर-उधर झूल सकती थी और जहाज की झूलन से एक गतिपालक चक्र द्वारा बचायी जा सकती थी। परतु गतिपालक चक्र का अक्ष कोठरी मे दृढ़तापूर्वक स्थापित था और इसलिए उसमे आवश्यक तृतीय स्वतंत्रता-सख्या की

1. Henry Bessemer 2. Drawing-room cabin

कमी थी (मिलाइए, ऊपर दिया हुआ ५वाँ विवरण)। अतएव उक्त निर्माण विफल सिद्ध हुआ और उसका शीघ्र ही परित्याग करना पड़ा।

पिस्टन इंजनों के संहति-संतुलन के संबंध में उल्लिखित (दे० पृ० १०३) ओ० श्लिक[1] वह व्यक्ति हुए जिन्होंने प्रस्तुत समस्या को भी सफलता-पूर्वक हल कर डाला। उनकी विधि का कई स्टीमरों में व्यवहार किया गया, यथा हैंबर्ग—अमेरिका लाइन के "सिलवाना"[2] और इटली के "कांत दि सेवाइया"[3] में। (पश्चोक्त के बारे में बहुत-सा साहित्य अमेरिकन प्रकाशनों में विद्यमान है।)

"सिलवाना" में गतिपालक चक्र का भार ५१०० किलोग्राम तथा उसका व्यास १.६ मीटर का था और वह १८०० घूर्णन प्रति मिनट करता था (जिससे १५० मीटर प्रति सेकंड परिमायी वेग[4] प्राप्त होता था)। वह एक पिंजरे में लगा हुआ था, जो लोलक की भाँति, जहाज के इधर-उधर जाते हुए एक अक्ष पर झूल सकता था, जिस कारण गतिपालक चक्र का संमिति-अक्ष जहाज के आगे-पीछे वाले एक ऊर्ध्वाधर समतल में दोलन करता था। यह पिंजरा हमारे *निदर्शन-लट्टू* के भीतरी वलय के अनुरूप है तथा स्वयं जहाज का पेटा बाहरी वलय के अनुरूप। आ० ४७ के ऊर्ध्वाधर के स्थान पर यहाँ जहाज का लंबा अक्ष है, ऊर्ध्वाधर के चारों ओर के पहले के घूर्णनों के बदले अब जहाज का इधर-उधर का डोलना या झूलना है। आवश्यक तीन स्वतंत्रता संख्याएँ जहाज के झूलनों, पिंजरे के दोलनों और गतिपालक चक्र के घूर्णनों से प्राप्त होती हैं। जब जहाज इधर-उधर झूलता है तब गतिपालक का अक्ष, जो प्रकृत दशा में ऊर्ध्वाधर होता है, अपने पिंजरे में पारी-पारी से आगे-पीछे झूलता है। अतएव जो ऊर्जा जहाज के इधर-उधर झूलने में होती है, वह पिंजरे की गति और स्थिति की ऊर्जा में परिवर्तित हो जाती है। जहाज का लुण्ठन (इधर-उधर झूलना) और पिंजरे का झूलन अब एक-दूसरे से युग्मित हो जाते हैं। यदि, विशेषतः उनके निजी दोलनों में अनुनाद हो तो युग्मित लोलकों की सी दशा प्राप्त होती है।

ठीक है कि अब तक जहाज के दोलनों का कुछ भी अवमंदन नहीं हुआ। परंतु अब पिंजरे की धुरी पर अनुप्रयुक्त एक ब्रेक-युक्ति द्वारा पिंजरे की दोलन-ऊर्जा और

1. O. Schlick 2. Silvana 3. Conte di Savoia
4. Peripheral velocity

इसलिए जहाज के लुण्ठन की ऊर्जा भी अवशोषित की जा सकती है, ठीक वैसे ही जैसे कि पहिये को स्पर्श करते हुए एक ब्रेक-जूते[1] द्वारा गाड़ी का वेग कम किया जा सकता है। निस्संदेह, पिंजरे पर ब्रेक की क्रिया इतनी प्रबल न होनी चाहिए कि गतिपालक चक्र के अक्ष का विक्षेप बिलकुल ही न हो सके, क्योंकि तब फिर दो स्वतन्त्रताओं के प्रभावहीन उसी लट्टू की दशा आ जायगी। भूकप के कपलेखों की भाँति के लुठन गति के रेखाचित्र दिखलाते हैं कि ब्रेक-क्रिया के लिए एक उपयोगितम या "सबसे अच्छे समझौते का" मान होता है। "सिल्वाना" में जैसे ही गतिपालक चक्र चलाया गया, प्राय वैसे ही लुठन का आयाम अपने प्रारंभिक मान का केवल १/६ वाँ या १/१० वाँ ही रह गया। इस दशा मे ढाँचे के दोलन का आयाम ३०° से ४०° के आस-पास रहता था।

यह सब होने पर भी घूर्णाक्षस्थापक[2] का अनुप्रयोग बहुत अधिक नहीं हुआ है। इसका कारण कुछ अंश में तो यह है कि इस प्रकार की रचना में कुछ खतरा सन्निहित रहता है—शीघ्रता से घूमता हुआ भारी गतिपालक चक्र अप्रिय सह-यात्री है—और कुछ अंश में उससे अधिक सफल एक प्रतियोगी का उद्भाव था। यह उद्भाव (उपज्ञा, इन्वेंशन) था फ्राम[3] की स्थापन-टकी। यह युक्ति बिलकुल दूसरे सिद्धांत पर आधारित है।

ऊपर दी हुई बातों से सबधित एक समस्या जहाज पर घूर्णाक्षस्थापकीय विधि से किसी घूमनेवाली मेज का स्थायीकरण है। हम यह नहीं जानते कि व्यावहारिक उपयोग के लिए यह समस्या कहाँ तक हल की जा सकी है। प्रत्यक्ष कारणों के लिए सभी देशों मे इस बात पर काम किया जा रहा है।

(२) घूर्णाक्ष दिक्सूचक

यह सर्वसुंदर और निर्दोष-प्राय घूर्णाक्ष-स्थापकीय युक्ति है। इसकी धारणा फूको के मन में उत्पन्न हुई थी। पृथिवी के घूर्णन को अपने लोलकीय प्रयोगों द्वारा निदर्शित कर (देखिए अध्याय ५, § ३१), वही बात नचाने के लट्टुओं द्वारा करने की योजना फूको ने तैयार की। उनके अन्य बहुतेरे दिक्सूचक प्रयत्नों में यहाँ केवल घूर्णाक्ष दिक्सूचक की ही चर्चा करेंगे, जो कि चुंबकीय दिक्सूचक का स्थान लेनेवाला

1. Brakeshoe 2. Gyrostabilizer 3. Frahm

था। फूको के घूर्णाक्ष दिक्सूचक में क्षैतिज समतल में नियन्त्रित दो स्वतन्त्रता-सख्याओं का नचाने का एक लट्टू होता है। यह समतल चुंबकीय उत्तरी ध्रुव की ओर नहीं, वास्तविक खगोलीय उत्तरी ध्रुव की ओर, अर्थात् पृथिवी के घूर्णन-अक्ष की दिशा को लक्ष्य करता है। वास्तव में ऊपर दिये हुए पचम निदर्शन-प्रयोग में हम यह व्यवस्था ले चुके हैं जहाँ स्थिर भीतरी वलय के कर नाच-लट्टू को आवर्त्तन-स्टूल से बाँध दिया था। घूर्णन करती हुई पृथिवी स्टूल के आवर्त्तन-पटरे का स्थान लेती है। दोनों स्थितियों में भेद केवल इतना ही है कि घूर्णनयुक्त पटरे को हम कोई भी बड़ा कोणीय वेग दे सकते हैं, जिस कारण लट्टू पर बड़ा प्रवल लक्ष्यकारक प्रभाव पड़ता है। परतु पृथिवी का कोणीय वेग बहुत छोटा है। अतएव फूको का घूर्णाक्षस्थापक ठीक दिशा मे आने में बड़ी देर लगाता है। प्रथमोक्त की व्यवस्था के लिए कहा था कि बाहरी वलय और स्टूल के घूर्णन अक्षों के बीच का कोण बहुत छोटा न होना चाहिए। प्रस्तुत स्थिति मे यह कोण भौगोलिक अक्षाश का कोटिपूरक कोण अर्थात् प्रेक्षण स्थान का "अक्षांश कोटि" है। पृथिवी के दोनों ध्रुवों पर यह कोण शून्य है। वहाँ लक्ष्यकरण-क्षमता भी शून्य हो जाती है। व्यापकतया यह क्षमता पृथिवी के कोणीय वेग, लट्टू के कोणीय सवेग और अक्षाश कोटि की ज्या की समानुपाती होती है।

फूको के प्रयोगों से प्रभाव के अस्तित्व का केवल स्थूल रूप से पता चलता है। उसका पूर्णतया प्रत्यक्षीकरण हर्मान आन्शुत्ज़ केम्फ[1] ने, उनकी रचना के निर्माण मे आनुक्रमिक सुधारों द्वारा, प्राप्त किया था। प्रारंभ मे उनका मूल उद्देश्य बहती बरफ के नीचे से जाती हुई पनडुब्बी (सबमरीन) द्वारा उत्तरी ध्रुव पहुँचना था। कारण कि चुबकीय दिक्सूचक के पाठ्याक उत्तरी ध्रुव के पास बहुत ही अविश्वसनीय—और पनडुब्बी के भीतर तो निताँत विफल—हो जाते हैं। उन्हे लट्टू को अपना दिक्-अन्वेषक बनाने की सूझी। सच है कि कई दशकों तक इस भावना के अनुसरण में वे उत्तरी ध्रुव तो न पहुँचे, परतु उनके प्रयोगों ने एक ऐमी आदर्श उपकरणिका तक पहुँचाया, जो कि जहाजी यात्राओं के लिए अपरिहार्य हो गयी है।

फूको से भिन्न, आन्शुत्ज़-घूर्णाक्षस्थापक क्षैतिज समतल में ही चलने के लिए नियन्त्रित नही होता, परतु इस समतल पर लोलक की भाँति, अपने भार के कारण

1. Hermann Anschutz Kempfe

खिच आता है। प्रारंभ मे पारे पर उसके उतराने की व्यवस्था थी। पीछे की रचनाओं मे दो या तीन लट्टुओं का व्यवहार किया गया, जिनके प्रभाव एक-दूसरे को प्रबल तथा सशोधित करते थे। नाचते लट्टुओं का कोणीय सवेग वैद्युत चालन द्वारा नियत रखा जाता है। नूतनतम आन्दुतुज-रचना मे सारा निकाय एक गोले मे बद रहता है। यह गोला जरा सी ही बड़ी त्रिज्या के एक दूसरे गोले मे प्राय बिना किसी घर्षण के तैरता रहता है। कारण कि घूर्णाक्षस्थापक को ऐसे पर्यटनों मे ले जाना होता है जिनमें कई महीनों तक उसे छूना नही होता, किसी विशेष युक्तिपूर्ण, स्वत चालित स्नेहन विधि का विधान करना होता है।

जहाज की अपनी ही गति के हानिकारक प्रभावों का निराकरण करने के उपाय विशेष महत्त्व के होते हैं। जब जहाज वक्र पथ पर जाता है या अपनी चाल बदलता है, तब क्षैतिज समतल के ऊपर-नीचे दोलन करने की योग्यता रखता हुआ घूर्णाक्ष-दिक्सूचक सगत अवस्थितित्व बलों का सुग्राही होता है। ये घूर्णन-अक्ष पर दाब डालते हैं, जिस कारण वह अपनी अक्षुब्ध स्थिति से विक्षिप्त हो जाता है और परिणामवश अशुद्ध आँकडे प्राप्त होते हैं। यह दिखाया जा सकता है कि जहाज की गति हानिहीन हो जायगी यदि ध्रुववृत्त के प्रति दिक्सूचक के स्वतत्र दोलनों का आवर्तकाल T निम्न-लिखित हो

$$T = 2\pi\left(\frac{l}{g}\right)^{\frac{1}{2}}. = (8\pi)^{\frac{1}{2}}.\ 10^3 \text{ सेकंड} = 84.4 \text{ मिनट}$$

यहाँ यह आवर्तकाल वही है जो ऐसे लोलक का होगा, जिसका दैर्घ्य पृथिवी की त्रिज्या, l जितना हो, और

$$l = \frac{2}{\pi}.\ 10^7 \text{ मीटर।}$$

(यह है ग्लित्शर[1] द्वारा पूरा किया हुआ शूलर[2] का नियम।)*

घूर्णाक्षस्थापक का एक और सुदर अनुप्रयोग बड़े-बडे स्टीमरों की स्वत.चालित चालन-यत्र रचना से सबंध रखता है। यदि तरगो और समुद्री धाराओं की गतियों के

1. Glitscher 2. Schuler

* देखिए, Wissensch, Veroffentl. aus den Siemenswerken, 19, 57 (1940)

होते हुए भी जहाज को अपना मार्ग ठीक रखना है तो कर्णधार के अनवरत मनोयोग और तदनुसार मार्ग पर रखने की यंत्ररचना की संशोधन-क्रिया की आवश्यकता होती है। इस संशोधन-क्रिया में सदैव कुछ न कुछ देर लगती है जिस कारण समय का ह्रास एवं तै की हुई दूरी में कमी होती है। इसके प्रतिकूल, घूर्णाक्षदिक्सूचक एक ऐसी "ज्ञान इन्द्रिय" है जो मनुष्य की अपेक्षा बहुत शीघ्रता से और अधिक यथार्थता के साथ "मालूम" (प्रतीत) कर सकती है और तात्क्षणिक संशोधन-कार्य कर सकती है। ऐसी संशोधन-क्रिया के कारण यात्रा का मार्ग प्रायः ठीक-ठीक ऋजुरेखीय (वास्तव में लाक्सोड्रोमिक अर्थात् रम्ब रेखीय)* हो जाता है, जिससे ऊर्जा की बड़ी बचत होती है। इस कारण आजकल प्रत्येक बड़े जहाज में एक स्वतःचलित मार्ग पर चलाने वाली यंत्ररचना लगी होती है।

(३) रेलगाड़ी के पहियों और बाइसिकिलों में घूर्णाक्षस्थापकीय प्रभाव

रेलगाड़ियों के पहियों का जुट एक ऐसा नचाने का लट्टू है जिसका कोणीय संवेग शीघ्रगामी रेलगाडियों के लिए बहुत बड़ा हो सकता है। जब पहिये किसी वक्र पर से जाते हैं तब किसी भी क्षण कोणीय संवेग का अवश्यमेव किसी ऐसे स्थान को विक्षेप होगा जो वक्र के अभिलंब द्वारा निर्धारित होगा। समीकरण (1) के अनुसार इसके लिए एक ऐंठ की आवश्यकता होती है जिसका अक्ष चलने की दिशा में होगा। परंतु ऐसी ऐंठ (जिसे बहुधा "घूर्णाक्षस्थापीय युग्म" कहते हैं) विद्यमान नहीं होती; अतएव घूर्णाक्षस्थापीय प्रभाव का परिणाम एक "विपरीत ऐंठ"[1] होती है जिस कारण पहियों का जुट बाहरी पटरी को बाहर की ओर दबाता है और भीतरी पटरी पर से उठा देता है। यह विपरीत ऐंठ अपकेंद्र बल के चलने की दिशा के प्रति के घूर्ण से जुड़ जाती है। जैसा कि हम जानते हैं पश्चोक्त प्रभाव का प्रतिकार पटरी के धरातल को उचित दिशा में उचित परिमाण में उठा देने से किया जाता है। दोनो घूर्णों का रूप

$$m\,v\,\omega$$

होता है। यहाँ v यात्रा का वेग है और ω रेलगाडी का वक्र में जाते समय कोणीय

*Loxo-dromic: Loxo, oblique; drome, run or course; तिर्यक् गतिक ? rhumb line=जहाज-मार्ग-रेखा (from Gk remebein, to turn or whirl round).

1. Countertorque

वेग। प्रस्तुत स्थिति मे *m* पहियों के जुट की पहिये की परिमा पर लघुकृत सहति है; परंतु अपकेन्द्र प्रभाव के लिए पहियों के ऊपर की सारी गाड़ी की पूर्ण सहति होगी। अतएव हमारा घूर्णस्थापकीय युग्म तथा उसके सम बराबर प्रतिकूल विपरीत-ऐंठ, अपकेन्द्र बल के घूर्ण की अपेक्षा बहुत ही छोटी होगी। बाहरी पटरी को जरा-सा ही और ऊपर उठाने से उसका प्रतिकार किया जा सकता है।

अधिक भारी प्रभाव पटरियों की किन्ही ऊर्ध्वाधर असमताओ के कारण हो सकते हैं; उदाहरणार्थ, किसी एक पटरी पर "कूबड"[1]। (इसी वर्ग मे उठाये हुए वक्र के प्रारंभ और अंत पर एक पटरी की बढ़ती या घटती ऊँचाइयाँ होंगी।) इस प्रकार के कूबड़ से कोणीय सवेग मे ऊर्ध्वाधर दिशा मे विचलन हो जाता है और इसलिए एक विपरीत ऐंठ का प्रादुर्भाव होता है, जो पहियों के जुट को पटरी-धरातल से परे ऐंठ देने का यत्न करता है, कहिए कि, जुट के अगले पहिये से पटरी पर दाब डालकर और जुट के अतिम पहिये को पटरी-धरातल से परे उभाडकर। पटरी और पहिये के 'पख' अर्थात् निकले हुए किनारे के बीच जो थोड़ा-सा खाली स्थान रह जाता है, उसके कारण ये "पख" कभी एक पटरी को, कभी दूसरी को 'काट' लेगे। ऐसी बात सचमुच ही शीघ्रगामी वैद्युत रेलगाड़ियों की परीक्षा-दौड़ो मे देखी गयी है। पटरियों की दशा और उनका ठीक-ठीक स्थान सब समय के लिए वश मे रखने के लिए जर्मन राष्ट्र-रेलवे[2] ऐसी परीक्षा-गाड़ियो का उपयोग करती है, जिनमे घूर्णाक्ष-स्थापकीय औजार लगे होते हैं। ये औजार आनशुत्ज़ कपनी द्वारा निर्मित हैं।

बाइसिकिल एक द्विगुणित अपूर्णपदीय निकाय हे, क्योंकि प्रश्न सख्या २.१ के पहिये की भांति, परिमित गति मे तो उसकी पांच स्वतत्रता-सख्याएँ होती है, परंतु अत्यणु गति मे केवल तीन (अपने क्षणिक समतल मे पिछले पहिये का घूर्णन, जिससे अगले पहिये का घूर्णन इन तीन प्रकारों मे युग्मित होता है—(१) शुद्ध लुण्ठन की दशा, (२) हैण्डल-बार के अक्ष के प्रति का घूर्णन और (३) भूमि पर उनके स्पर्श-बिदुओं को मिलानेवाली रेखा के प्रति अगले और पिछले पहिये का सार्व घूर्णन)। परतु यह तब ही जब कि स्वय साइकिल-सवार की स्वतत्रता-सख्याएँ विचार मे न ले। यह बहु-विदित है कि यदि वेग पर्याप्त हो तो इस निकाय का स्थायित्व इस बात पर भरोसा करता है कि या तो हैंडल-बार को घुमाकर या अपने शरीर को बिना जान-

1. Hump 2. Reichsbahn

बूझकर ही हिला-डुलाकर, साइकिल-सवार समुचित अपकेन्द्रीय प्रभावों को उत्पन्न करता है। इनकी अपेक्षा पहियों के घूर्णाक्षस्थापकीय प्रभाव बहुत ही कम होते हैं। यह पहियों की बनावट से प्रकट है। यदि घूर्णाक्षस्थापकीय प्रभावों को प्रबलतर करना होता तो पहियों के किनारे और उन पर चढ़ायी जानेवाली रबड़ की हालें यथाशक्य हलकी रखने के स्थान पर भारी रखनी पड़ती। परंतु फिर भी यह दिखलाया जा सकता है‡ कि निकाय के स्थायित्व में ये दुर्बल प्रभाव भी योग लेते हैं। यह इसलिए होता है कि जहाजों को ठीक मार्ग पर चलानेवाली स्वतः-चालित यंत्र-रचना की भाँति, गुरुत्व-केंद्र के नीचे हो जाने के प्रतिकूल अपकेंद्रीय प्रभावों की अपेक्षा ये अधिक शीघ्रता से प्रतिक्रिया करते हैं। इस गति के स्थायित्व की परीक्षा करने के लिए जिन अल्प दोलनों पर विचार करना पड़ता है, उनमे घूर्णाक्षस्थापकीय क्रिया केवल एक चौथाई आवर्त्तकाल से, जब कि अपकेन्द्र क्रिया आधे काल से, गुरुत्व-केन्द्र के दोलनों से पीछे रहती है।

पूरक--बिलियर्ड-खेल की यांत्रिकी

बिलियर्ड का सुंदर खेल दृढ़ पिंडों की गतिकी के अनुप्रयोगों के लिए एक संपन्न क्षेत्र प्रस्तुत कर देता है। यांत्रिकी के इतिहास में कॉरियोलिस नामक एक सुविख्यात विद्वान् उससे संबंधित है।*

निम्नलिखित व्याख्याओं का मूल उद्देश्य इस विषय पर उठायी हुई कतिपय समस्याओं का स्पष्टीकरण है। इन समस्याओं में न केवल गेंद के लुण्ठन तथा स्खलन की गतिकी, वरन् बिलियर्ड कपड़े पर घर्षण का वाद भी अपना उचित स्थान ग्रहण करता है।

‡ देखिए F. Klein & A. Sommerfeld, Theorie des Kreissels, Vol. IV. p. 880 and ff. स्थायित्व पर विचार करने के लिए निस्संदेह, साइकिल-सवार-कृत क्रियाओं को विचार से छोड़ देना होगा। यह मान लेना होगा कि न केवल बिना हाथों के ही, वरन् अपने शरीर को बिना हिलाये हुए भी, वह चढ़ा हुआ है। उसे केवल अपने भार द्वारा ही काम करना होगा। उपर्युक्त पुस्तक में नचाने के लट्टू के वाद के अन्य अनुप्रयोगों और उसकी गणितीय नींव की ब्योरेवार बातें दी गयी हैं।

*जी० कॉरियोलिस (G. Coriolis), *Theorie mathematique des effets du jeu de billiard*. Paris, 1835.

(क) ऊँचे और नीचे निशाने

अनुभवी खिलाडी प्राय सदैव गेंद को एक "पार्श्वता"* या "इग्लिश" दे देता है। परन्तु, अब तो बिना इग्लिश वाले निशानो पर विचार करेंगे जिनमे, इसलिए, क्यू‡ गेंद को उसके ऊर्ध्वाधिर माध्यिकायी[1] समतल मे, क्षितिज दिशा मे, मारता है। इस प्रकार के निशानो के दो भेद है—ऊँचे और नीचे।

यदि क्यू और गेंद का सघान-विंदु[2] मेज के समतल से $\frac{7}{5}$ए (ए=गेंद की त्रिज्या) ऊँचा हो तो उसे **ऊँचा निशाना** कहते हैं। यदि इससे कम ऊँचाई पर मारा जाय तो उसे **नीचा निशाना** कहते है (इसके और नीचे की बातो के सबध मे प्रश्नसख्या ४ ३ देखिए)। जब गेंद ठीक इन ऊँचाइयो पर मारा जाता है, तब प्रारभ मे ही शुद्ध लुठन होने लगता है। किसी गोल के अवस्थितित्व घूर्ण (जो पृ० ८८ पर दिया है) के प्रभाव से इन्ही स्थितियो मे जो गेंद का घूर्णन सचारित होता है वह ऐसे परिमाण का होता है कि उसका सगत परिमायी वेग स्पर्श विंदु पर आगे बढने की गति के ठीक बराबर पर प्रतिकूल होता है, जिस कारण शुद्ध लुठन का प्रतिबध (11 10) पूरित होता है।

ऊँचे निशानो मे, स्पर्श-विंदु पर लुंठन उत्पादित परिमायी वेग गेंद के सहति-केंद्र के वेग के प्रतिकूल और उससे बडा होता है। कपडे पर का घर्षण इस वेगाधिक्य (परिमायी वेग—आगे बढने के वेग) का विरोध करता है और इस प्रकार सहति-केन्द्र के प्रारभिक वेग को बढ़ा देता है। ऊँचे निशानो मे यह घर्षण गेंद पर निशाने की दिशा मे काम करता है। शुद्ध लुंठन मे अतिम वेग, जो तब प्राप्त होता है जब घर्षण वेगाधिक्य को "खा" लेता है, आदि के वेग से बडा होता है। जो गेंद ऊचाई पर मारे जाते है वे बहुत देर तक चलते रहते हैं और खिलाडी के अनुभवी होने का भेद बता देते है।

*गेंद को पार्श्व से मारना कि वह नाचता हुआ आगे बढ़े, साइड (side, पार्श्व) कहलाता है।

‡ बिलियर्ड जैसे खेलो में गेंद को चलानेवाले डंडे को क्यू (cue) कहते है। क्यू कोई चार फुट लंबा होता है; खिलाड़ी की ओर का सिरा मोटा, मारने को ओर का सिरा पतला, चमड़े से मढ़ा हुआ।

1. Median (Plane)

2. Point of impact

धीमा कर देता है। इस प्रकार गेंद विराम दशा से त्वरित हो जाता है और तदनुसार उसका घूर्णन कम होता रहता है। जैसे ही किनारे पर का परिमावी वेग केन्द्र के आगे बढ़ने के वेग के बराबर होता है, वैसे ही त्वरण बंद हो जाता है और अब शुद्ध लुंठन होने लगता है। एक बार ऐसी दशा में पहुँचने पर गेंद एक नियत अंतिम वेग से लुंठन करता रहता है (लुण्ठन घर्षण के बहुत छोटे प्रभाव की हम उपेक्षा कर देंगे)। यही पिच्छू निशाने का सिद्धात है।

इसी भाँति नीचे मारा हुआ गेंद अपना सहति-केंद्रवेग दूसरे मारे हुए गेंद को दे देता है और स्वयं क्षण भर के लिए विराम दशा प्राप्त करता है। मान लेंगे कि गेंद बहुत ही नीचे, कम से कम केंद्र से नीचे मारा गया था, जिस कारण टक्कर के बाद स्पर्श-बिंदु पर जो परिमावी वेग रह जायगा वह आगे की ओर को होगा। अब घर्षण पीछे की ओर आरोपित होगा। गेंद पीछे की ओर नियत त्वरण से चलने लगता है। साथ ही उसका घूर्णनीय वेग कम होता रहता है और अंत में शुद्ध लुंठन होने लगता है। यह खींच निशाने का सिद्धात है।

सर्पक[1] घर्षण के वेग से स्वतंत्र होने के कारण, सहति-केन्द्रवेग v, एवं परिमावी वेग $u = a\omega$, का समय के विचार से परिवर्तन ऋजुरेखीय होगा। अतएव अब तक विचार की हुई समस्याओं का उपचार गणितीय विधियों के बदले रेखाचित्रीय विधियों से अधिक सुविधापूर्वक किया जा सकता है। रेखाचित्रीय विधि से करने के लिए हम एक रेखाचित्र बनाते हैं जिनमें v और u के क्षणिक मानों को भुजाकों[2] की भाँति और समय को कोटयकों[3] की भाँति आलेखित करते हैं (प्रश्न संख्या ४ ३)।

(ग) क्षैतिज संघात में "इंग्लिश" कारित प्रक्षेप-पथ

यदि गेंद ऊर्ध्वाधर माध्यिकायी समतल में न मारा जाय, वरन् उसके एक ओर तो उसे "दाया इंग्लिश" या "बायाँ इंग्लिश" कहते हैं। यदि गेंद पर आघात के लिए क्यू क्षैतिजतया आगे बढ़ाया जाय तो प्रक्षेप-पथ आदि के संघात की दिशा में ऋजु-रेखीय रहेगा।

आवेगी ऐंठ का समतल अब ऊर्ध्वाधर माध्यिकायी समतल से झुका हुआ होता है; ऊँचे निशानों में या तो दायें इंग्लिश के लिए दायीं ओर या बायें इंग्लिश में बायीं ओर। यह झुकाव ऐसा होता है कि आवेगी ऐंठ के समतल का अभिलंब (यह अभिलंब अक्षीय

1. Sliding 2. Abscissa 3. Ordinate

नीचे निशानों में स्पर्श-बिंदु पर परिमायी वेग संहति-केंद्र के वेग की दिशा के प्रति-

में काम करता है। शुद्ध लुठन में अंतिम वेग आदि के वेग से कम होता है।

आवेग, Z, के बारे में (इसकी विमितियाँ हैं डाइन-सेकंड) निस्सदेह, उसे क्यू की दिशा में आरोपित बहुत बड़े बल F का समाकल बहुत थोड़े काल τ के लिए, जिसमें वह काम करता है, समझना चाहिए। इस प्रकार

$$Z=\int_0^{\tau} Fdt,$$

तदनुसार गेंद के केन्द्र की आवेगी ऐंठ[1] होगी

$$Zl=\int_0^{\tau} Fldt,$$

जहाँ l केंद्र की क्यू के अक्ष से दूरी है। आवेगी ऐंठ-सदिश केंद्र और क्यू-अक्ष से जाते हुए समतल के लंबवत् निर्देशित होगा। इंग्लिश-हीन निशानों के लिए, जिन पर हीं अब तक विचार किया गया है, वह क्षैतिजतया निर्देशित होता है और उपर्युक्त माध्यिकायी समतल का अभिलंब है।

(ख) पिच्छू निशाने और खींच निशाने

ऊँचाई पर मारे जाने के बाद यदि गेंद अन्य दो गेंदों में से एक को केंद्रीय संघात मिले तो गेंदों की संहतियाँ सम होने के कारण उसकी आगे की ओर की सारी गति दूसरे गेंद को मिल जाती है [मिलाइए समी० (3.27a)]। परंतु यदि सम्पर्क के अल्प काल में होनेवाले दोनों गेंदों के बीच के घर्षण की उपेक्षा कर दें तो प्रथम गेंद अपनी घूर्णनीय गति अपने पास ही रखता है। अतएव संघात के बाद के क्षण मारनेवाले गेंद का केंद्र क्षणिकतया विराम दशा में होता है और उसका सबसे निचला बिंदु बिलियर्ड कपड़े पर सरकता हुआ जाता है। इस प्रकार से प्रादुर्भूत घर्षण समय के विचार से नियत रहता है और प्रारंभिक आगे बढ़ने की दिशा में गेंद पर आरोपित होता है तथा उसी समयकेन्द्र के प्रति का उसका घूर्ण विद्यमान घूर्णन को

1. Impulsive torque

धीमा कर देता है। इस प्रकार गेंद विराम दशा में त्वरित हो जाता है और तदनुसार उसका घूर्णन कम होता रहता है। जैसे ही कि कपड़े पर का परिमायी वेग केन्द्र के आगे बढ़ने के वेग के बराबर होता है, वैसे ही त्वरण बंद हो जाता है और अब शुद्ध लुंठन होने लगता है। एक बार ऐसी दशा में पहुंचने पर गेंद एक नियत अंतिम वेग से लुंठन करता रहता है (लुण्ठन घर्षण के बहुत हल्के प्रभाव की हम उपेक्षा कर देंगे)। यही पिच्छू निशाने का सिद्धांत है।

इसी भांति नीचे मारा हुआ गेंद अपना महति-केंद्रवेग दूसरे मारे हुए गेंद को दे देता है और स्वयं क्षण भर के लिए विराम दशा प्राप्त करता है। मान लेंगे कि गेंद बहुत ही नीचे, कम से कम केंद्र से नीचे मारा गया था, जिस कारण टक्कर के बाद स्पर्श-बिंदु पर जो परिमायी वेग रह जायगा वह आगे की ओर को होगा। अब घर्षण पीछे की ओर आरोपित होगा। गेंद पीछे की ओर नियत त्वरण से चलने लगता है। साथ ही उसका घूर्णनीय वेग कम होता रहता है और अंत में शुद्ध लुंठन होने लगता है। यह खींच निशाने का सिद्धांत है।

सर्पक[1] घर्षण के वेग से स्वतंत्र होने के कारण, सहति-केन्द्रवेग v, एवं परिमायी वेग $u = a\omega$, का समय के विचार से परिवर्त्तन ऋजुरेखीय होगा। अतएव अब तक विचार की हुई समस्याओं का उपचार गणितीय विधियों के बदले लेखाचित्रीय विधियों से अधिक सुविधापूर्वक किया जा सकता है। लेखाचित्रीय विधि से करने के लिए हम एक रेखाचित्र बनाते हैं जिसमें v और u के क्षणिक मानों को भुजाकों[2] की भांति और समय को कोटचकों[3] की भाँति आलेखित करते हैं (प्रश्न संख्या ४.३)।

(ग) क्षैतिज संघात में "इंग्लिश" कारित प्रक्षेप-पथ

यदि गेंद ऊर्ध्वाधर माध्यिकायी समतल में न मारा जाय, वरन् उसके एक ओर तो उसे "दायाँ इंग्लिश" या "बायाँ इंग्लिश" कहते हैं। यदि गेंद पर आघात के लिए क्यू क्षैतिजतया आगे बढ़ाया जाय तो प्रक्षेप-पथ आदि के संघात की दिशा में ऋजु-रेखीय रहेगा।

आवेगी ऐंठ का समतल अब ऊर्ध्वाधर माध्यिकायी समतल से झुका हुआ होता है; ऊँचे निशानों में या तो दायें इंग्लिश के लिए दायीं ओर या बायें इंग्लिश में बायीं ओर। यह झुकाव ऐसा होता है कि आवेगी ऐंठ के समतल का अभिलंब (यह अभिलंब अक्षीय

1. Sliding 2. Abscissa 3. Ordinate

सदिश ऐंठ से समांतर होता है) गेंद के केन्द्र से होकर जाते हुए माध्यिकायी समतल से लंबवत् ऊर्ध्वाधर समतल में होता है। ऐंठ को संघात की दिशा से लंबवत् एक ऊर्ध्वाधर घटक में और एक क्षैतिज घटक में विघटित कर सकते हैं। पहला घटक गेंद के ऊर्ध्वाधर व्यास के चारों ओर नाचा करता है और कपड़े पर एक अल्प "छिद्रक घर्षण"[1] उत्पादित करता है, परंतु गेंद के पथ पर इसका कोई प्रभाव नहीं होता। दूसरी ओर पार्श्वीय घटक उसी भाँति काम करता है, जैसा कि (क) और (ख) में विचारित निशानों में। इसलिए जो बातें वहाँ हुई थीं वे ही इंग्लिश के साथ निशानों में भी होंगी। विशेषतः, प्रक्षेप-पथ ऋजुरेखीय ही रहता है।

ऊर्ध्वाधर व्यास के चारों ओर के नाच[2] का प्रभाव गेंद के किसी गद्दे या दूसरे गेंद के साथ टक्कर में अपने तईं दिखलाता है। प्रथम स्थिति में गद्दे पर घर्षण होता है जो खिलाड़ी के दृष्टिकोण से गेंद को दायें इंग्लिश वाले निशाने में बायीं ओर और बायें इंग्लिश में दायीं ओर विचलित कर देता है। इस बात से परावर्त्तन कोण, जो बिना इंग्लिश के निशानों में आपतन कोण के बराबर होता है, बदल जाता है। वास्तव में, वास्तविक परावर्त्तित पथ समान कोणिक पथ से पश्चोक्त को गेंद को दिये हुए ऊर्ध्वाधर नाच की दिशा में घुमा देने से उत्पन्न होता है। इस बात से प्रत्येक बिलियर्ड - खिलाड़ी परिचित है। गद्दे पर घर्षणीय बल के उत्पादन के साथ ही ऊर्ध्वाधर के प्रति एक घर्षणीय ऐंठ प्रकट होती है जो ऊर्ध्वाधर व्यास के चारों ओर के नाच को क्षीण कर देती है। अतएव प्रारंभ का इंग्लिश, कई संघातों के बाद, शनैः-शनैः लुप्त हो जाता है। यह बात भी प्रत्येक खिलाड़ी को ज्ञात है। गेंद की गेंद से टक्कर में इंग्लिश का प्रभाव वैसा ही होता है और उसी भाव में काम करता है जैसे कि गेंद-गद्दे की टक्कर में।

(घ) ऊर्ध्वाधर घटक युक्त निशाने के कारण पारवलयिक पथ

आवेगी ऐंठ का समतल अब न केवल (ग) की भाँति झुका होता है, वरन् खिलाड़ी के दृष्टिकोण से आगे की ओर भी झुका होता है। अतएव सदिश ऐंठ के न केवल ऊर्ध्वाधर और पार्श्वीय दिशाओं में घटक होंगे, वरन् गति की दिशा में भी एक घटक होगा। इसलिए स्पर्श-बिंदु पर प्रारंभ की गति के लंबवत् सम्पर्क वेग का एक घटक भी आरोपित होगा। अतएव यह घर्षण, जो स्पर्श-बिंदु के परिणामी वेग के विरुद्ध होगा, प्रारंभिक गति से शून्य से भिन्न कोण पर होगा। यदि हम अपने को इस बात का निश्चय करा ले (मिलाइए, प्रश्न संख्या ४.४) कि प्रारंभिक गति से जो यह कोण बनता है वह गति भर

1. Boring friction 2. Spin

पञ्चम अध्याय

सापेक्ष गति

इस अध्याय के विषय की बातों में हमारा कुतूहल मुख्यतया इसलिए होता है कि हम अपने सारे प्रेक्षण घूर्णनयुक्त पृथिवी पर करते हैं जो, क्या चिर-सम्मत यान्त्रिकी की दृष्टि में और क्या आपेक्षिकता के विशिष्ट वाद के दृष्टिकोण से, अनुज्ञेय अभिदेश ढाँचा नही है। दूसरी ओर, व्यापक आपेक्षिकता में सभी अभिदेश प्रणालियाँ अनुज्ञेय हैं (देखिए पृ० २०); और इसलिए उसके दृष्टिकोण से सापेक्ष गति का कोई अलग वाद (थ्योरी) अर्थहीन हो जाता है।

इस अध्याय में हमारा दृष्टिकोण यह होगा कि प्रत्येक सैद्धांतिकतया अनुज्ञात अभिदेश प्रणाली में न्यूटन की यान्त्रिकी बिलकुल ठीक-ठीक बैठती है। तत्पश्चात् हम न्यूटन की यान्त्रिकी से ऐसे विचलनों[1] का अन्वेषण करेंगे जो उस अभिदेश प्रणाली की गति के कारण होते हैं जिसमे, व्यावहारिक कारणवश, हम बँधे हुए हैं।

§ २८. विशेष स्थिति में कोरिओलिस बल का व्युत्पादन

समझिए कि त्रिज्या a वाले पृथ्वी के मण्डल के किसी ध्रुववृत्त पर एक संहति बिंदु, निश्चर कोणीय वेग μ से, चल रहा है और उसी समय स्वय पृथिवी अपने अक्ष के चारों ओर निश्चर कोणीय वेग ω से घूम रही है। साधारण की भांति अक्षांश-कोटि को θ तथा (खगोलीय) रेखांश को ϕ कहिए। आदि के स्वेच्छ मानों को छोड़कर हमारे संहति बिंदु की गति निम्नलिखित प्रकार दी जायेगी—

$$\theta = \mu t, \qquad \phi = \omega t \tag{1}$$

बिंदु के कार्त्तीय निर्देशांकों,

$$\begin{aligned} x &= a \sin\theta \cos\phi, \\ y &= a \sin\theta \sin\phi, \\ z &= a \cos\theta \end{aligned} \tag{2}$$

से, t के लिए उनका अवकलन करने से, प्राप्त होते हैं—

1. Deviations

(3)
$$\dot{x}=a\,\mu\cos\theta\cos\phi-a\omega\sin\theta\sin\phi,$$
$$\dot{y}=a\,\mu\cos\theta\sin\phi+a\omega\sin\theta\cos\phi,$$
$$\dot{z}=-a\,\mu\sin\theta.$$

और,

(4)
$$\ddot{x}=-a\,\mu^2\sin\theta\cos\phi-a\omega^2\sin\theta\cos\phi-2a\,\mu\omega\cos\theta\sin\phi,$$
$$\ddot{y}=-a\mu^2\sin\theta\sin\phi-a\omega^2\sin\theta\sin\phi+2a\,\mu\omega\cos\theta\cos\phi,$$
$$\ddot{z}=-a\,\mu^2\cos\theta.$$

समीकरणों (4) के त्रिक[1] में, दक्षिण ओर के प्रथम पद उस प्रथायी (यूजुअल) अभिकेन्द्र त्वरण को निरूपित करते हैं जो ध्रुववृत्त पर होने वाली गति के साथ होते हैं, यदि यह ध्रुववृत्त आकाश मे स्थिर हो। द्वितीय पदवृन्द वह अभिकेन्द्रत्वरण देते हैं जो ध्रुववृत्त के किसी स्थिर विंदु के (अपने अक्ष के चारों ओर पृथिवी के घूर्णन के कारण) अक्षाश वृत्त मे होने वाली गति के कारण होता है। परतु तृतीय पदवृन्द एक नयी बात वताते हैं क्योंकि वे इन दोनों गतियों की चलात्मक मिथःक्रिया निरूपित करते है। यदि (4) को $-m$ से गुणा करे तो अपने सहृति विंदु का मिश्र घूर्णन में अवस्थितित्व वल $\mathbf{F}^*$ प्राप्त करते हैं। सदिश रूप मे यह निम्नलिखित है —

(5)
$$\mathbf{F}^*=\mathbf{C}_1+\mathbf{C}_2+\mathbf{F}_c$$

सकेत $\mathbf{C}_1$ और $\mathbf{C}_2$ जैसे कि (10.3) मे, "साधारण अपकेन्द्र बलवृन्द" जतलाते हैं। $\mathbf{C}_1$ पृथिवी-केन्द्र से वाहर की ओर त्रिज्यात निर्देशित है और उसका परिमाण निम्नलिखित है—

$$|\mathbf{C}_1|=ma\mu^2=m\frac{v_1^2}{a},\ v_1=a\,\mu.$$

$\mathbf{C}_2$ पृथिवी के अक्ष के लववत् निर्देशित है; उसका परिमाण है —

$$|\mathbf{C}_2|=ma\omega^2\sin\theta=m\frac{v_2^2}{a\sin\theta},$$

$$v_2=a\omega\sin\theta.$$

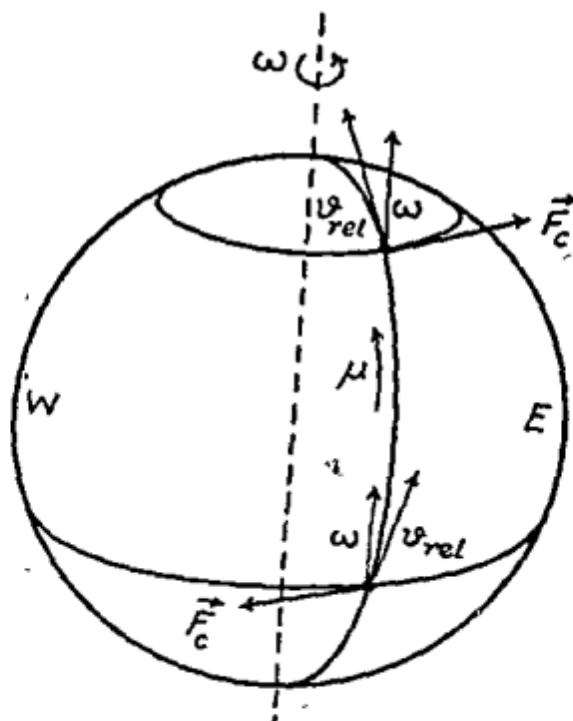
तृतीय अवयव $\mathbf{F}_c$ को "सयुक्त अपकेंद्र वल" कह सकते हैं। यही कोरिओलिस बल है। उसका पूरा सदिश व्यजन (देखिए समी० 29.4a) यह है —

1. Triplet

(6) $$F_c = 2m\, v_{rel} \times \omega$$
यहाँ पर v_1 के संगत सदिश $\mathbf{v}_1$ के स्थान पर $\mathbf{v}_{rel}$ लिखा है। इससे हम यह बतलाना चाहते हैं कि बहुधा व्यापकतया वह वेग जो $\mathbf{F}_c$ को उत्पन्न करता है घूर्णनयुक्त अभिदेश निकाय के प्रति आपेक्षिक (रिलेटिव) होता है।

(6) के अनुसार $\mathbf{F}_c$ का परिमाण है—

(6a) $$|\mathbf{F}_c| = 2m\, v_{rel}\, \omega \sin(\mathbf{v}_{rel}, \omega),$$
जिस कारण प्रस्तुत स्थिति में,

(6b) $$|\mathbf{F}_c| = 2m\, v_{rel}\, \omega \cos\theta.$$
निस्सदेह, θ की कोज्या भौगोलिक अक्षांश की ज्या है। दिशा के बारे में, $\mathbf{F}_c$ दोनों $\mathbf{v}_{rel}$ और ω के या, तुल्यात्मकतया, $\mathbf{C}_1$ और $\mathbf{C}_2$ के, लंबवत् है। $\mathbf{F}_c$ की दिशा का

आकृति ४८—कोरिओलिस बल का विशिष्ट व्युत्पादन। घूर्णनयुक्त पृथिवी के किसी ध्रुववृत्त पर एक सहति विंदु पृथिवी-केंद्र के दृष्टिकोण से, निश्चर कोणीय वेग μ से संगत, निश्चर वेग $\mathbf{v}_{rel}$ से, चलता है।

भाग वही है जिस ओर कि v_{rel} से ω को जाता हुआ दक्षिणावर्त्त पेंच आगे बढ़ता है। आकृति ४८ में यह बात दक्षिण से उत्तर को जाते हुए एक बिंदु के लिए चित्रीकृत की गयी है। दो स्थितियाँ दिखायी गयी हैं, एक दक्षिणी और एक उत्तरी गोलार्द्ध में। पूर्वोक्त में, दक्षिणावर्त्त पेंच के $v_{rel} \rightarrow \omega$ के भाव में, $\mathbf{F}_c$ पूर्व से पश्चिम की ओर काम करता है, पश्चोक्त में पश्चिम से पूर्व को।

हम एक एकाकी गतिशील बिंदु के स्थान पर ऐसे बिंदुओं की अनवरत परम्परा को, अतएव किसी ध्रुववृत्त पर बहती हुई नदी को, समझ सकते हैं तो आकृति ४८ हमें बताती है कि दक्षिण से उत्तर को बहते हुए पानी का अवस्थितित्व बल **उत्तरी गोलार्द्ध में दायें किनारे पर, दक्षिणी गोलार्द्ध में बायें किनारे पर,** दाब डालता है। दाब के चिह्न में यह परिवर्त्तन, प्रकटतया, (6) में आये हुए भौगोलिक अक्षांश की ज्या से संबंधित है। यह कायदा न केवल दक्षिण-उत्तर वहाव के लिए, वरन् जैसा कि अगले प्रकरण में दिखायेंगे, v_{rel} की किसी भी दिशा के लिए और, विशेषतया कह देना चाहिए, उत्तर-दक्षिण दिशा के वहाव के लिए भी, वैध है।

हमारे दृष्टांत में यह अतर्ज्ञानतः स्पष्ट है। पृथिवी के घूर्णन से व्युत्पन्न, जल का पश्चिम-पूर्व वेग, घूर्णन-अक्ष से अपनी दूरी पर, और इसलिए भौगोलिक अक्षांश पर, निर्भर करता है। यदि धारा दक्षिण से उत्तर को जाती है तो उत्तरी गोलार्द्ध में जल में पश्चिम-पूर्व संवेग का आधिक्य होगा, जो संवेग कि वह अधिकतर दक्षिणी अक्षांशों से प्राप्त कर रहा है। यह आधिक्य पूर्व की ओर के अर्थात् दायें किनारे पर के, दाब में अपने तई प्रकट करता है। परन्तु ऐसा ही युक्ति-तर्क उत्तर-दक्षिण गति को भी लागू होगा। उस स्थिति में जल उत्तरी अक्षांशों से पश्चिम-पूर्व संवेग की न्यूनता का आयात करेगा।

आइए, मन ही मन इस न्यून परिमाण का आ० ४१ के भाव में, एकबार + चिह्न के साथ, दूसरी बार — चिह्न के साथ, योग करें। जो भाग कि — चिह्न के साथ जोड़ा गया है, उसमें पूर्व-पश्चिम दिशा है और इसलिए वह पश्चिम की ओर, अर्थात् फिर दायें किनारे पर, दाब डालेगा। युक्ति-तर्क का यही प्रक्रम दिखलाता है कि दक्षिणी गोलार्द्ध में नदी अपने बायें किनारे पर अधिक दाबाव डालती है, चाहे वहाव दक्षिण-उत्तर हो या उत्तर-दक्षिण।

भूगोलज्ञों ने बहुत-से उदाहरणों द्वारा सिद्ध कर लिया है कि उत्तरी गोलार्द्ध में नदियों के दायें किनारे पर का दाब अपने तई दायें किनारों के बाँधों को अधिकतर

काट में दिखलाता है (नदी-विस्थापनों संबंधी बेयर[1] नियम)। इसके अतिरिक्त नदी के दायें तट पर जलतल की ऊँचाई थोड़ी-सी अधिक होती है, इतनी कि भेद नापा जा सके।

कोरिओलिस बल के कहीं अधिकतर महत्त्वपूर्ण आशयपूर्ण प्रभाव वे हैं जो महासागरों की धाराओं पर पड़ते हैं (गल्फ स्ट्रीम[2] तथा उत्तरी गोलार्द्ध में ज्वार-भाटा की धाराओं के विचलनों का दायीं ओर होना।)

परतु यह वायुमडल में पाया जाता है कि ये प्रभाव अधिकतम सुनिश्चित होते हैं। बाइज़-बालट[3] का सुज्ञात नियम कहता है कि वायु दाब-प्रवणता की दिशा में नहीं चलती, किंतु उत्तरी गोलार्द्ध में दायीं ओर, दक्षिणी में बायीं ओर, खूब ही विचलित हो जाती है; केवल भूमध्यरेखा पर ही यह दाब-प्रवणता का ठीक-ठीक अनुसरण करती है।

ये सब घटनाएँ न्यूटन के प्रथम नियम के तात्क्षणिक (निरंतरित) परिणाम हैं और अंतिम विश्लेषण में इस बात से निकलती है कि यांत्रिकी में घूर्णनवती पृथिवी ऐसा अभिदेश-ढाँचा नहीं है जो मान्य हो।

इस प्रकरण में कोरिओलिस बल का हिसाब गोलीय ध्रुवी निर्देशाकों की सहायता से लगाया गया है। प्रश्नसख्या ५.१ में उसे सिलिंडरीय निर्देशाकों में व्युत्पन्न करेंगे।

§ २९. सापेक्ष गति के व्यापक अवकल समीकरणवृन्द

पृथिवी के स्थान पर कोई भी दृढ पिंड B लेते हैं जो एक स्थिर बिंदु O के चारों ओर तात्क्षणिक कोणीय वेग ω से घूर्णन करता है। समझिए कि P एक ऐसा बिंदु है जो B की अपेक्षा में एक स्वेच्छया परिवर्तनशील वेग से चलता है। तो आकाश के लिए उसका वेग दो वेगों का संघटन होगा, एक तो यह सापेक्ष वेग और दूसरा P से तात्क्षणिक संपात में पिंड के एक बिंदु का आकाश में वेग। (22.4) के अनुसार पश्चोक्त होगा—

$$\omega \times \mathbf{r}$$

जैसे कि (22.4) में, आकाश के लिए P के वेग को $\mathbf{w}$ कहेंगे। और भी, B की अपेक्षा में P के सापेक्ष वेग को ($\mathbf{v}_{rel}$ के स्थान) $\mathbf{v}$ कहेंगे। तो निम्नलिखित संबंध होगा—

$$\mathbf{w} = \mathbf{v} + \omega \times \mathbf{r} \tag{1}$$

1. Baer 2. Gulf Stream 3. Buys-Ballot

अब हम यह बात मान लें कि सामयिक परिवर्त्तन यदि आकाश से प्रेक्षित होंगे तो उन्हे ऊपर दी हुई बिंदी द्वारा और यदि पिंड B से प्रेक्षित होंगे तो $\frac{d}{dt}$ द्वारा जतलायेंगे। तो अब हम लिख सकते हैं कि—

(2*a*) $$\mathbf{w}=\dot{\mathbf{r}}$$

तथा

(2*b*) $$\mathbf{v}=\frac{d\mathbf{r}}{dt},$$

और

(2*c*) $$\dot{\mathbf{r}}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}+\omega\times\mathbf{r}$$

आकाश मे हमारे बिंदु P का त्वरण होगा—

(3) $$\dot{\mathbf{w}}=\dot{\mathbf{v}}+\omega\times\dot{\mathbf{r}}+\dot{\omega}\times\mathbf{r}$$

दक्षिणी अंग के मध्य पद मे $\dot{\mathbf{r}}$ का (2*a*) और (1) मे दिये हुए मान के प्रतिस्थापन से प्राप्त करते हैं—

(3*a*) $$\omega\times\dot{\mathbf{r}}=\omega\times\mathbf{v}+\omega\times(\omega\times\mathbf{r}).$$

(3) के दायी ओर के प्रथम पद का रूपातरण, (2*c*) के स्वेच्छ सदिश $\mathbf{r}$ के स्थान में $\mathbf{v}$ लिखकर करिए। इससे मिलता है—

(3*b*) $$\dot{\mathbf{v}}=\frac{d\mathbf{v}}{dt}+\omega\times\mathbf{v}$$

(3) में (3*a*) और (3*b*) का प्रतिस्थापन करने से प्राप्त होता है—

(4) $$\dot{\mathbf{w}}=\frac{d\mathbf{v}}{dt}+2\omega\times\mathbf{v}+\omega\times(\omega\times\mathbf{r})+\dot{\omega}\times\mathbf{r}$$

देखिए कि (26.8*a*) के अनुसार, $\dot{\omega}$ या $\frac{d\omega}{dt}$ को समी० (4) के अंतिम पद मे लिख सकते हैं।

यदि दोनों पार्श्वों को $-m$ से गुणा करें, तो (4) से अपने कण पर आरोपित अवस्थितित्व बल को प्राप्त करते हैं। बायी ओर आकाश में अवस्थितित्व बल $\mathbf{F}^*$ मिलता है, दायी ओर का पहला पद अवस्थितित्वहीन अभिदेश निकाय B मे प्रेक्षित अवस्थितित्व बल है जिसे $\mathbf{F}^*_{rel}$ कहेंगे। दायी ओर का दूसरा पद कोरिओलिस बल के लिए व्यंजन प्रदान करता है जो हमें (28 6) मे मिला था, अर्थात्—

(4a) $$-2m\ \omega\times\mathbf{v}=+2m\mathbf{v}\times\omega=\mathbf{F}_c$$

अतएव हमारा प्रस्तुत उपचार, कोरिओलिस-बल का व्यापक उत्पादन प्रस्तुत कर, पिछले प्रकरण के उपचार की शेष पूर्ति करता है। समी० (4) के अंतिम से पहले वाले पद में, ($-m$ से गुणा करने के बाद) साधारण अपकेन्द्र बल $\mathbf{C}$ को सरलतया पहचान सकते हैं जो हमारे कण पर, अभिदेश निकाय B के घूर्णन के प्रभाव से, आरोपित जान पड़ता है और जिसे समी० (28.5) में $\mathbf{C}_2$ कहा था।

अतएव, सब पदों को एकत्र कर, (4) से प्राप्त करते हैं—

(5) $$\mathbf{F}^*=\mathbf{F}^*_{rel}+\mathbf{C}+\mathbf{F}_c+m\ \mathbf{r}\times\dot{\omega}$$

यहां $\mathbf{F}^*_{rel}$ को निम्नलिखित परिभाषा में दिये हुए मान से प्रतिस्थापित कर लेते हैं

$$\mathbf{F}^*_{rel}=-m\frac{d\mathbf{v}}{dt},$$

और यह स्मरण कीजिए कि आकाश में स्थित निकाय में बाह्य और अवस्थितत्वीय बलों के संतुलन के कारण

$$\mathbf{F}+\mathbf{F}^*=0$$

इस प्रकार हम सापेक्ष गति का व्यापक अवकल समीकरण प्राप्त करते हैं कि—

(6) $$m\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\mathbf{F}+\mathbf{C}+\mathbf{F}_c+m\mathbf{r}\times\dot{\omega}$$

देखिए कि निकाय B में, वर्तमान बाह्य बल $\mathbf{F}$ के अतिरिक्त, **बनावटी बल** $\mathbf{C}$ और $\mathbf{F}_c$ प्रकट होते हैं। B के साथ चलते हुए प्रेक्षक के दृष्टिकोण से वे उसी प्रकार आरोपित होते हैं जैसे कि बाह्य बल F; वास्तव में वे केवलमात्र एक अ-न्यूटनीय अभिदेश ढांचे में स्थित, या उसकी अपेक्षा में गतिशील, कण m के अवस्थितित्व के परिणाम हैं। (6) के दायें के अंतिम पद का मूल भी उसी में है। वह एक संभाव्य त्वरण या घूर्णन दिशा के परिवर्त्तन से निकलता है। पृथिवी के संबंध में वह ध्रुवी उच्चावचन के संगत है और शून्यप्राय रूप से छोटा होने के कारण उसकी उपेक्षा की जा सकती है। अवकल समीकरण (6) का उपयोग आगामी तीन प्रकरणों में और प्रश्न संख्या ५.१ तथा ५.२ में किया जायगा।

§ ३०. घूर्णनयुक्त पृथिवी पर स्वतंत्र पतन; घूर्णसंस्थापीय पदों की प्रकृति

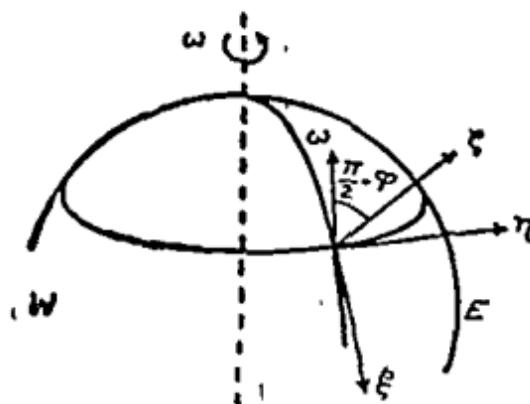
जब कभी हम गुरुत्व का प्रभाव मापने का यत्न करते हैं तब केवल गुरुत्वीय आकर्षण ही नहीं, वरन् पृथिवी के आकर्षण $\mathbf{F}$ और अपकेन्द्र बल $\mathbf{C}$ का परिणामी प्रेक्षित

किया जाता है। म्वाभ का अर्थात् माध्य पार्थिव तल का चपटापन स्वयं इसी परिणामी से निर्धारित होता है और, वास्तव में, इस प्रकार कि (म्वाभ) सर्वत्र इसी परिणामी के लववत् है। यदि हम रख ले कि—

$$\mathbf{F}+\mathbf{C}=-m\mathbf{g} \tag{1}$$

तो गुरुत्वीय त्वरण एक सदिश $\mathbf{g}$ हो जाता है जिसका परिमाण g है, परन्तु जिसकी दिशा पृथिवी की बढ़ायी हुई त्रिज्या की ओर होने के स्थान पर म्वाभ के अभिलंब की ओर होती है।

समी० (29.6) से, (1) तथा (28.6) को विचार में रख, और $\dot{\omega}$ वाले पद की अपेक्षा कर, हम निम्नलिखित प्राप्त करते हैं—

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt}=-\mathbf{g}+2\,\mathbf{v}\times\omega. \tag{2}$$

आकृति ४९—पूर्णनयुक्त पृथिवी पर स्वतंत्र पतन। निर्देशांक प्रणाली : ξ ध्रुववृत्त पर, η अक्षांश वृत्त पर, ζ म्वाभ के अभिलंब पर।

अब आइए इस सदिश समीकरण को, पृथिवी में स्थित, निम्नलिखित (3) प्रकार परिभाषित (देखिए आ० ४९), एक लवकोणीय प्रणाली ξ, η, ζ, का प्रवेश करा कर, निर्देशांक समीकरणों में विघटित करें :—

(3)
ξ=पृथिवी तल पर उत्तर-दक्षिण दिशा,
η=पृथिवी तल पर पश्चिम-पूर्व दिशा,
ζ=प्रेक्षण स्थान→ऊर्ध्वबिन्दु=म्वाभ का अभिलंब।

तो घटक रूप में निम्नलिखित प्राप्त होते हैं—

$$(4)\quad \mathbf{v}=\left(\frac{d\xi}{dt}, \quad \frac{d\eta}{dt}, \quad \frac{d\zeta}{dt}\right); \quad \mathbf{g}=(0, \quad 0, \quad g); \quad \omega=(-\omega\cos\phi \quad 0, \quad \omega\sin\phi);$$

ϕ भौगोलिक अक्षांश है, जैसे कि आ० ४९ में। तो (2) में निकलता है कि—

$$(5)\quad \begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} &= \qquad\qquad 2\omega\sin\phi\frac{d\eta}{dt} \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} &= -2\omega\sin\phi\frac{d\xi}{dt} \qquad -2\omega\cos\phi\frac{d\zeta}{dt} \\ \frac{d^2\zeta}{dt^2}+g &= \qquad\qquad 2\omega\cos\phi\frac{d\eta}{dt} \end{aligned}$$

समीकरणों (5) का समाकल करने के पहले उनका व्यापक लक्षण देखना चाहिए। उनकी विशेष बात यह है कि दाहिनी ओर के गुणाकों की सजधज प्रति-समित[1] है। प्रति-संमिति को स्पष्टतया देखने के लिए निम्नलिखित संक्षिप्तिकाओं का उपयोग कीजिए तो

$$(6)\quad \alpha=2\omega\sin\phi, \quad \beta=0, \quad \gamma=-2\omega\cos\phi.$$

तो विकर्ण के लिए विन्यास की प्रति-संमिति स्पष्टतया दिख जाती है, जैसा कि नीचे दी हुई अनुसूची से प्रकट है—

(7)

	$\frac{d\xi}{dt}$	$\frac{d\eta}{dt}$	$\frac{d\zeta}{dt}$
$\frac{d^2\xi}{dt^2}$	0	α	β
$\frac{d^2\eta}{dt^2}$	$-\alpha$	0	γ
$g+\frac{d^2\zeta}{dt^2}$	$-\beta$	$-\gamma$	0

1. Anti-symmetric

यह प्रति-समिति लक्षण ऊर्जा का अविनाशित्व इंगित करता है। यदि विकर्णी पद[1] उपस्थित होते या यदि, अधिकतर व्यापकतया वात कहे, गुणाकों की सजवज मे कोई समिति अश भारी होता, तो ऊर्जा का क्षय होता।

क्योंकि, यदि समीकरणों (5) को पक्ति प्रति पक्ति $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$, से गुणा कर जोड दें तो दायी ओर α, β, γ के सभी गुणाक शून्य हो जाते है और शेष रह जाता है—

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2\right]+g\frac{d\xi}{dt}=0.$$

अर्थात्

(8) $$T+V=\text{नियत}।$$

यहाँ T और V सापेक्ष गति की गतिज तथा स्थितिज ऊर्जा हैं (जहाँ सहति=1 रख दिया है)। हमारे गुणांकों के विन्यास का यह अविनाशी लक्षण विना हिसाब लगाये ही प्रत्यक्ष किया जा सकता है। क्योंकि गुणन खड $\mathbf{v}\times\omega$ के प्रभाव से, $\mathbf{F}_c$ गति के लंबवत् है और इसलिए, वैद्युतगतिकी में चुंबकीय वलों की भाँति, कोई कर्म नहीं करता।

दूसरी ओर, यदि गुणाकों की सजधन में कोई समित अंश होता तो

(9) $$\frac{d}{dt}(T+V)<0$$

होता। यहाँ छोटेपन का चिह्न ($<$) इस अनुमान का परिणाम है कि गुणाकों के चिह्न गति के अवमदन के लिए आवश्यक भौतिक प्रतिवधों को सतुष्ट करें। परंतु देखते हैं कि (9) का परिणाम ऊर्जा का सरक्षण अविनाशित्व नही, किंतु जैसा कि ऊपर दृढ-कथन किया है, उसका क्षय निकलता है। गुणाकों के विन्यास के भयशील लक्षण वाला होने का एक दृष्टात (हाँ, केवल एक स्वतत्रता-सख्या वाला ही दृष्टात) तृतीय अध्याय, प्रकरण १९ के अवमदित दोलनों की विवृति मे समीकरण (9) और (10) प्रस्तुत करते हैं।

1. Diagonal terms

लार्ड केल्विन[1] की भाँति हम भी गुणाकों के प्रति-समित विन्यास के पदों[2] को घूर्णाक्षस्थापकीय पदवृन्द कहेंगे। यह नाम सूचित करता है कि वे निकाय (प्रस्तुत स्थिति में पृथिवी) का आतरिक घूर्णन इगित करते हैं, और जो समस्या की अभ्युक्ति में प्रत्यक्षतया नही दिये गये, परंतु निर्देशाकों के निर्वाचन (प्रस्तुत स्थिति में ξ, η, ζ) में अंतर्भावित हैं। ऐसे घूर्णाक्षस्थापकीय पद साम्यावस्थाओ तथा गतियों के स्थायित्व संबधी व्यापक नियमों में महत्त्वपूर्ण भाग लेते हैं।

अब हम समीकरणों (5) का समानुकलन करेंगे। इसके लिए h की ऊँचाई से, आदि मे किसी वेग के बिना ही, स्वतत्र पतन को स्वीकृत समझ लेंगे। तो $t=0$ पर निम्नलिखित होना चाहिए—

$$\xi=\eta=0,\ \ \zeta=h$$

$$\frac{d\xi}{dt}=\frac{d\eta}{dt}=\frac{d\zeta}{dt}=0. \tag{10}$$

अब प्रथम और तृतीय समी० (5) से प्राप्त करते हैं

$$\frac{d\xi}{dt}=2\omega\,\eta\sin\phi,\ \ \frac{d\zeta}{dt}+gt=2\omega\,\eta\cos\phi. \tag{11}$$

द्वितीय समी० (5) में इनको प्रतिस्थापित कर हम प्राप्त करते हैं—

$$\frac{d^2\eta}{dt^2}+4\omega^2\eta=Ct,\quad C=2\omega g\cos\phi. \tag{12}$$

इस समीकरण का समाकल समी० (19.4) के संबध में स्थापित किये हुए इस व्यापक नियम से प्राप्त होता है कि "वह है, *असमघात (असमाग) समीकरण का विशिष्ट* साधन + समघात (समाग) समीकरण का व्यापक साधन।" प्रस्तुत स्थिति में इससे निकलता है—

$$\eta=\frac{C}{4\omega^2}t+A\sin 2\omega t+B\cos 2\omega t.$$

प्रतिबंधों (10) की अभियाचना है कि निम्नलिखित रख लिया जाय—

$$B=0,\ \ 2\omega A=-\frac{C}{4\omega^2},$$

1. Lord Kelvin 2. Gyroscopic terms

अर्थात्

(13)
$$\eta=\frac{C}{4\omega^2}\left(t-\frac{\sin 2\omega t}{2\omega}\right)=\frac{g\cos\phi}{2\omega}\left(t-\frac{\sin 2\,\omega t}{2\,\omega}\right).$$

η के तात्पर्य के अनुसार, [मिलाइए, (3)], यह पूर्व की ओर का विक्षेप है ।

ξ दक्षिण की ओर का विक्षेप है। (11) तथा (13) से यह

$$\frac{d\xi}{dt}=g\sin\phi\cos\phi\left(t-\frac{\sin 2\omega t}{2\omega}\right)$$

को संतुष्ट करता है, जिसका साधन,(10) उचित ध्यान रखते हुए, निम्नलिखित है—

(14)
$$\xi=g\sin\phi\,\cos\phi\left(\frac{t^2}{2}-\frac{1-\cos 2\omega t}{4\omega^2}\right)$$

(13) तथा (10) की सहायता से, द्वितीय समी० (11)से, हम अत मे ऊर्ध्वाधर दिशा मे निम्नलिखित गति की प्राप्ति करते हैं—

(15)
$$\zeta=h-\frac{gt^2}{2}+g\cos^2\phi\left(\frac{t^2}{2}-\frac{1-\cos 2\omega t}{4\omega^2}\right)$$

यह ωt एक बहुत ही छोटी सख्या है जिसका परिणाम कोई (पतन समय) ÷ (एक दिवस) होगा । अतएव इस साधन का हम ωt के घातों मे विस्तार कर सकते हैं । तो (13), (14), और (15) के स्थान मे हम प्राप्त करते हैं—

$$\eta=\frac{gt^2}{3}\cos\phi\,\omega t,\ \xi=\frac{gt^2}{6}\sin\phi\cos\phi\,(\omega t)^2,$$
$$\zeta=h-\frac{gt^2}{2}\left(1-\frac{\cos^2\phi}{3}\,(\omega t)^2\right).$$

एतदनुसार पूर्व दिशावाला विक्षेप ωt मे प्रथम कोटि का, दक्षिण दिशावाला विक्षेप ωt में द्वितीय कोटि का, होगा । इसी प्रकार ऊर्ध्वाधर दिशा मे पिंडों के स्वतन्त्रतापूर्वक पतन के नियम से जो विकलन पृथिवी के घूर्णन के कारण होता है वह भी ωt मे द्वितीय कोटि का है । पूर्वदिशाकीय विक्षेप के कई उदाहरण प्राप्त किये गये हैं और वह वाद के अनुसार ही पाया गया है । अनुकूल परिस्थितियों (गहरी खानों में उतरने के "कूपो") मे उसका परिमाण कई सेंटीमीटरो का होता है ।

प्रकटतया इन '(प्रेक्षणीय किंवा अप्रेक्षणीय) विक्षेपों का कारण इस बात मे है कि आदि के प्रतिबंध (10), जो वाद एवं प्रयोग दोनों ही के नितात आधार हैं, पृथिवी

के प्रति विराम का प्रदेशन करते हैं। अतएव आकाश में वे कुछ वेग इंगित करते हैं जिसका परिमाण है—

(पृथिवी का कोणीय वेग) × (पृथिवी के अक्ष से दूरी)।

जिस वेग से पृथ्वी तल गिरते पिंड के नीचे से खिसकता है उससे यह ऊपर दिया हुआ वेग कुछ भिन्न ही है। इससे स्पष्ट होगा कि पिंड पृथिवी पर ठीक अपने आदि के स्थान के प्रक्षेप पर नहीं गिरेगा।

§ ३१. फूको का लोलक[1]

यहाँ भी समीकरण (30.5) लागू है केवल एक और प्रतिबंध के साथ कि लोलक के अवलंबन बिंदु से संहति बिंदु की दूरी निश्चर रहे। इस प्रतिबंध को उस रूप के सदृश लिख देते हैं जिसका व्यवहार (18.1) में गोलीय लोलक के लिए किया गया था, अर्थात्,

$$F = \frac{m}{2}\left(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - l^2\right) = 0, \tag{1}$$

और इससे संगत लाग्रांज-गुणक का प्रवेश करा देते हैं। तो समीकरण (30.5) यों हो जाते हैं—

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\xi}{dt^2} &= \qquad 2\,\omega \sin\phi \frac{d\eta}{dt} && +\lambda\xi \\
\frac{d^2\eta}{dt^2} &= -2\omega \sin\phi \frac{d\xi}{dt} \qquad -2\,\omega\cos\phi\frac{d\zeta}{dt} && +\lambda\eta \\
\frac{d^2\zeta}{dt^2} + g &= \qquad 2\,\omega\cos\phi\frac{d\eta}{dt} && +\lambda\zeta.
\end{aligned} \tag{2}$$

अवश्य ये अपने तईं छोटे-छोटे दोलनों तक ही सीमावद्ध रखेंगे। अतएव $\frac{\xi}{l}$ तथा $\frac{\eta}{l}$ को प्रथम कोटि की लघुराशियाँ समझेंगे। तो (1) से परिणाम निकलता है कि द्वितीय कोटि की (लघु) राशियों तक $\frac{\xi^2}{l^2} = 1$. अधिक ठीक तरह से, विराम स्थल के आस-पास के स्थानों के लिए हम कह सकते हैं कि-

1. Foucault's Pendulum

$$\zeta = -l\,(1 + \text{द्वितीय कोटि की राशियाँ}),$$

क्योंकि ζ, स्वभावतः ऊर्ध्वाधरतः ऊपर की ओर निर्देशित है। तो तृतीय समी० (12) दिखलाता है कि प्रथम कोटि की राशियों तक

$$(3) \qquad g = -\lambda l, \quad \text{अतएव} \quad \lambda = -\frac{g}{l}.$$

एक बार फिर प्रथम दो समीकरणों (2) के $\frac{d\zeta}{dt}$ वाले पद की उपेक्षा कर, क्योंकि वह द्वितीय कोटि का है, और संक्षिप्तिका

$$(4) \qquad u = \omega \sin \phi$$

का उपयोग कर, निम्नलिखित प्राप्त करने के लिए, उनका पुनर्लेखन करते है—

$$(5) \qquad \frac{d^2\xi}{dt^2} - 2u\frac{d\eta}{dt} + \frac{g}{l}\xi = 0,$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} + 2u\frac{d\zeta}{dt} + \frac{g}{l}\eta = 0.$$

यह सुविधाजनक होगा कि द्वितीय समीकरण (5) को i से गुणा कर, उसे प्रथम से जोड़कर, और पृ० १९० के समी० (26.10) की भांति, नयी चर राशि

$$(6) \qquad s = \xi + i\,\eta$$

का उपयोग कर उनका सम्मिश्र रूप में समुच्चयन कर ले। तो हम प्राप्त करते हैं—

$$(7) \qquad \frac{d^2s}{dt^2} + 2iu\frac{ds}{dt} + \frac{g}{l}s = 0,$$

जो स्थिर (नियत) गुणाकों के साथ समाग-रेखीय द्वितीय घात का अवकल समीकरण है। देखिए कि वह समीकरणों (5) के मध्यपदों का घूर्णाक्ष-स्थापकीयलक्षण है, जिसने (5)→(7) वाला क्रम (स्टेप) सभव किया।

समी० (7) को हल करने के लिए,

$$s = Ae^{i\alpha t}$$

रखते हैं। इसका (7) में प्रतिस्थापन करने से आता है

$$\alpha^2 + 2u\alpha - \frac{g}{l} = 0,$$

जो α मे एक वर्गात्मक समीकरण है जिसके मूल हैं—

$$(8) \qquad \alpha_1 = -u + \left(u^2 + \frac{g}{l}\right)^{\frac{1}{2}} \text{ और } \alpha_2 = -u - \left(u^2 + \frac{g}{l}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

अतएव (7) का व्यापक साधन (साल्यूशन) हुआ

$$(9) \qquad s = A_1 e^{i\alpha_1 t} + A_2 e^{i\alpha_2 t}$$

नियताक A_1 तथा A_2 आदि की दशाओं से निर्धारित किये जाते हैं। हम मान लेंगे कि प्रयोगात्मक व्यवस्था से सगत ये हैं—

$$(10) \qquad t=0 \text{ पर } \xi = a, \ \eta = 0, \frac{d\xi}{dt} = \frac{d\eta}{dt} = 0.$$

अतएव हमें यह समझना चाहिए कि गोलक को अपनी साहुल सूत्र स्थिति से, घनात्मक ξ-अक्ष पर, अर्थात् (दे० आ०५०) ध्रुव-वृत्त पर दक्षिण दिशा की ओर, एक कोण द्वारा खीचकर, बिना कोई आवेग दिये, छोड़ देते हैं। समी० (10) से, हमारी सम्मिश्र चर राशियों के मान होंगे—

$$(10a) \qquad s = a, \ \frac{ds}{dt} = 0, \ \ t = 0 \text{ पर।}$$

तो समी० (9) प्रदान करता है

$$(11) \qquad A_1 + A_2 = a, \text{ तथा}$$

$$(11a) \qquad A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2 = 0, \text{ और}$$

$$(11b) \quad A_1 = \frac{a}{2}\left[1 + \frac{u}{\left(u^2 + \frac{g}{l}\right)^{\frac{1}{2}}}\right], \ A_2 = \frac{a}{2}\left[1 - \frac{u}{\left(u^2 + \frac{g}{l}\right)^{\frac{1}{2}}}\right].$$

तत्पश्चात्, $\frac{ds}{dt}$ देनेवाला पदपुंज निकालते हैं। वह स्वयं s की अपेक्षा कुछ कम पेचीला है। (11a) का स्मरण करते हुए हम प्राप्त करते हैं—

$$\frac{ds}{dt} = i\alpha_1 A_2 e^{-iut}\left[e^{i\left(u^2 + \frac{g}{l}\right)^{\frac{1}{2}} t} - e^{-i\left(u^2 + \frac{g}{l}\right)^{\frac{1}{2}} t}\right],$$

जिससे समी० (8) और (11b) के अनुसार प्राप्त करते हैं—

$$(12) \qquad \frac{ds}{dt} = -a\frac{g}{l}\frac{1}{\left(u^2 + \frac{g}{l}\right)^{\frac{1}{2}}} e^{-iut} \sin\left(u^2 + \frac{g}{l}\right)^{\frac{1}{2}} t.$$

इससे हम निम्नलिखित परिणामों पर पहुँचते हैं—जब कभी भी ज्या वाला

गुणन-खंड शून्य होता है, तब $\frac{ds}{dt}=0$ और इसलिए $\frac{d\xi}{dt}=\frac{d\eta}{dt}=0$.

यह गोलक[1] के प्रक्षेप पथ मे एक आवर्त्तन स्थान या निशिताग्र[2] अनुरूपित करता है। आदि के प्रतिबंधों (10) के अनुसार, इनमे का पहला $t=0$ पर होता है। यदि हम

$$(13) \qquad T=\frac{2\pi}{\left(u^2+\frac{g}{l}\right)^{\frac{1}{2}}},$$

रख लें, तो अनुक्रमिक निशिताग्र

$$t=\frac{T}{2},\ t=T,\ t=\frac{3T}{2},$$

पर होंगे। $t=T$, एक पूर्ण, इधर-से-उधर उधर-से-इधर, गति का काट है। $u=0$ (अर्थात् $\omega=0$) कर देने से समी० (13) पार्थिव घूर्णन के बिना एक सरल लोलक के दोलन (अर्थात् आवर्त) काल से सहमत हो जाता है—जैसा कि अपेक्षित है।

यह जानने के लिए कि फूको-लोलक का गोलक $t=T$ पर किस स्थान पर होगा, (13) और (11) के उपयोग से हम (9) से प्राप्त करते हैं—

$$s_{t=T}=A_1e^{-iuT+2\pi i}+A_2e^{-iuT-2\pi i}$$
$$=(A_1+A_2)e^{-iuT}=ae^{-iuT}$$

अतएव गोलक की अपनी विराम स्थिति से वही दूरी a है जो कि गति के प्रारंभ में थी, परंतु उसका दिगंश दक्षिण की ओर के ध्रुववृत्त से अब संपाती नही रहता, जैसा कि वह आदि में था, वरन् इस दिशा की अपेक्षा में, उसमे एक पश्चवर्तिता आ जाती है। इस पश्चता का कोण निकलता है—

$$uT=2\pi\frac{u}{\left(u^2+\frac{g}{l}\right)^{\frac{1}{2}}}\cong 2\pi\left(\frac{l}{g}\right)^{\frac{1}{2}}\omega\ \sin\phi.$$

इस प्रकार गोलक पश्चिम की ओर विक्षिप्त हो जाता है (देखिए आकृति ५०)। इसको यह कहकर समझा सकते ह कि पृथिवी का घूर्णन यदि शून्य होता तो गोलक का पथ बिलकुल ऋजुरेखीय, दक्षिण-उत्तर-दक्षिण, होता। परन्तु परिस्थिति के जैसी

1. Bob 2. Cusp

है वैसी होने के कारण, कॉरिऑलिस बल,अपने "दायें तट पर दाब" द्वारा, जब गोलक बाहर को जाता है तब प्रक्षेप-पथ को पूर्व की ओर कोण ½uT द्वारा, जब भीतर की ओर आता है तब उसी कोण ½uT द्वारा पश्चिम की ओर प्रक्षेप-पथ[1] को विस्थापित कर देता है।

आ० ५०—फूको का लोलक।

गोलक के प्रक्षेप-पथ का विहगमावलोकन;आदि का विस्थापन दक्षिण की ओर। एक पूरे दोलन में विक्षेप पश्चिम की ओर।

फूको के १८५१ के तथा पीछे से उनके अनुयायियों के प्रयोगों ने केवल गुणात्मक परिणाम ही दिया। सारी त्रुटियों के कारणों का मात्रात्मक अनुसंधान कामरलिंग ओनेस[2] ने अपने १८७९ के ग्रॉनिजन[3] गवेषणा-प्रबंध मे किया; वे ही कामरलिंग ओनेस, जो पीछे से न्यून तापों के क्षेत्र में अग्रसर अधिकारी (प्रमाण-पुरुष) और अतीव चालकता के आविष्कर्ता हुए।

§३२. त्रिपिंड समस्या की लाग्रांजीय स्थिति

आपेक्षिक गति के इस विश्लेषण को समाप्त करने से पहले एक प्रसिद्ध सिद्धांत का प्रमाण दिये विना नहीं रहा जाता, जिसे लाग्रांजने (पेरिस अकादमी, १७७२ में) प्रकाशित किया था—**त्रिपिंड समस्या का साधन बंद और प्रारंभिक (सादे) रूप में किया जा सकता है, यदि यह मान लें कि खगोलीय पिंड जो त्रिकोण बनाते हैं वे सदैव अपने आप के समरूप ही रहते हैं।** तीनों पिंडों की संहतियां कुछ भी हो सकती हैं।

इस सिद्धांत का प्रमाण दिखलायेगा कि—

१. तीनों संहति विंदुओं से होकर जाता हुआ समतल आकाश में स्थिर रहता है।

२. तीनों विंदुओं के प्रत्येक पर आरोपित न्यूटनीय बलों का परिणामी उनके सार्वसंहति-केंद्र से होकर जाता है।

३. उनसे बना हुआ त्रिकोण समबाहु है।

1. Trajectory 2. H. Kamerlingh Onnes 3. Groningen

४. तीनों बिंदु परस्पर समरूप शांकवों की रचना करते हैं, जिनकी एक नाभि पर बिंदुओं का सार्वसंहति-केंद्र[1] होता है।

लाग्रांज ने जो प्रमाण दिया था वह जरा पेचीला है। यदि लापलास की भांति, ऊपर दी हुई बातों की पहली निष्पत्ति आरंभ से ही मान लें तो प्रमाण सहल किया जा सकता है। परन्तु काराथिआदारी[2] ने दिखलाया है कि इस अनुमान के बिना भी एक सहल प्रमाण संभव है। उनका प्रारंभ-स्थल लंबकोणीय निर्देशांकों में विघटित हमारा समीकरण (29.4) है। कुछ थोड़े-से रूप-भेद के साथ इसी प्रमाण का अनुसरण हम यहां करेंगे।

हम समतल S का विचार करते हैं जो तीनों बिंदुओं P_1, P_2, P_3 (संहतियाँ m_1, m_2, m_3), और इसलिए उनके संहति-केंद्र O से भी होकर जाता है। समस्या की व्यापकता को बिगाड़े बिना ही हम संहति-केंद्र को विराम दशा में समझ सकते हैं। अतएव S स्थिर बिंदु O के चारों ओर घूर्णन करता है। इस घूर्णन में एक घटक सम्मिलित है जो S को O से जाते हुए अपने अभिलंब के चारों ओर अपने आप में ही घुमा सकता है। सारे कोणीय वेग को ω कहिए। हम अपने आपको S में स्थित एक ढांचे में ठहरे हुए होने की कल्पना करते हैं, जहाँ से बिंदुओं P_k की गति का हम उसी प्रकार प्रेक्षण करते हैं जैसे कि पृथिवी से फूको-लोलक का प्रेक्षण किया गया था। 0 से बिंदुओं P_k की सदिश त्रिज्याओं $\mathbf{r}_k$ की माप कर लेते हैं। S से प्रेक्षित उनके वेग और त्वरण $\mathbf{v}_k$ तथा $\frac{d\mathbf{v}_k}{dt}$ हैं। सदिश नियम (24.7) का उपयोग कर, इस गति के अवकल समीकरणों (29.4) को यों लिखते हैं—

$$(1) \qquad \frac{d\mathbf{v}_k}{dt}+2\,\omega\times\mathbf{v}_k+\omega\,(\mathbf{r}_k.\omega)-\mathbf{r}_k\,\omega^2+\dot{\omega}\times\mathbf{r}_k=\frac{\mathbf{F}_k}{m_k}$$

$\mathbf{F}_k$ है m_k पर आरोपित न्यूटनीय गुरुत्वीय बलों का सदिश योग। इस प्रकार, उदाहरणतया,

$$(2) \qquad \frac{\mathbf{F}_1}{m_1}=\frac{G\,m_2}{(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)^2}\;\frac{\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1}{(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)}+\frac{G\,m_3}{(\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1)^2}\;\frac{\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1}{(\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1)}.$$

1. Common mass center

2. Caratheodory: *Sitz, Bayr. Akad, Wiss*, 257 (1933).

S मे एक कार्त्तीय निर्देशांक प्रणाली स्थापित करते हैं जिसका मूल विंदु O पर है और x, y किसी-भी ओर लक्ष्यीकृत S के समतल में हैं। z-अक्ष S के लबवत् O से जाते हुए खड़ा करते हैं। यूलरीय रीति-अनुसार ω को हम इन अक्षों की दिशा में विघटित करते हैं,

$$(3) \qquad \omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3).$$

समझिए कि घटक ω_3(S का अपने आप में घूर्णन) S मे स्थित सदिशों मे से एक $\overrightarrow{OP_k}$ की दिशा के विचार से निर्धारित किया जाता है। परतु हमने मान लिया था कि त्रिभुज $P_1P_2\,P_3$ को अपने आप के ही समरूप रहना होगा। इससे परिणाम यह निकलता है कि अन्य दोनों सदिशों $\overrightarrow{OP_k}$ के प्रत्येक की दिशा भी S मे स्थिर होगी। तो हम लिख सकते हैं—

$$(4) \qquad \mathbf{r}_k = \lambda(t)\ (a_k, b_k, 0),$$

जहाँ a_k, b_k किसी दिये हुए आदि समय पर P_k के कार्त्तीय घटक हैं। फलन λ (t) सदिशों $\overrightarrow{OP_k}$ के, और इसलिए त्रिभुज $P_1\,P_2\,P_3$ के भी, मापक्रम का सार्व-परिवर्तन निर्धारित करता है। λ के अवकलजों को $\dot\lambda$ और $\ddot\lambda$ लिखकर, हम (4) से प्राप्त करते हैं—

$$(4a) \qquad \mathbf{v}_k = \dot\lambda(t)\ (a_k, b_k, 0),$$

$$\frac{d\mathbf{v}_k}{dt} = \ddot\lambda\ (t)\ a_k, b_k, 0).$$

और भी परिणाम निकलता है कि समी० (1) के परिणामी बल ($\mathbf{F}_k$) का z-घटक शून्यप्राय और x-तथा y-घटक λ^2 के प्रतिलोमतया समानुपाती होंगे। इस बल को संक्षिप्त रूप में यों लिखेंगे—

$$(5) \qquad \frac{\mathbf{F}_k}{m_k} = \frac{1}{\lambda^2(t)}(L_k,\ M_k,\ 0).$$

तत्पश्चात् समीकरण (1) का S से लबवत् z-घटक लिखते हैं, इस प्रकार

$$2\dot\lambda(\omega_1\, b_k - \omega_2\, a_k) + \lambda\omega_3(a_k\omega_1 + b_k\omega_2) + \lambda(\dot\omega_1\ b_k - \dot\omega_2\ a_k) = 0,$$

या, a_k और b_k वाले गुणनखडों को अलग-अलग कर,

(6)
$$\{-2\dot{\lambda}\omega_2+\lambda(\omega_3\omega_1-\dot{\omega}_2)\}a_k$$
$$+\{2\dot{\lambda}\omega_1+\lambda(\omega_3\omega_2+\dot{\omega}_1)\}b_k=0$$

दोनों कोष्ठक { } k से स्वतन t के फलन हैं। उनको $f(t)$ और $g(t)$ कहकर हम प्राप्त करते हैं—

(6a)
$$\frac{f(t)}{g(t)}=-\frac{b_k}{a_k}$$

परंतु हमने माना था कि विंदु P_k त्रिभुज बनाते हैं, अर्थात् वे समरेख[1] नही हैं। अतएव तीनों अनुपातों b/a को असम होना चाहिए। वैसी स्थिति में (6) को केवल $f=g=o$ रखकर संतुष्ट ही कर सकते हैं। अर्थात्, सुव्यक्ततया,

(7)
$$2\dot{\lambda}\omega_1=-\lambda(\omega_3\omega_2+\dot{\omega}_1),$$
$$2\dot{\lambda}\omega_2=\lambda(\omega_3\omega_1-\dot{\omega}_2).$$

इनका क्रमात् ω_1 और ω_2 के गुणन-तत्पश्चात् यह योग देता है

$$\frac{2\dot{\lambda}}{\lambda}=-\frac{\omega_1\dot{\omega}_1+\omega_2\dot{\omega}_2}{\omega_1^2+\omega_2^2}$$

और, क्षेत्रकलन से,

(8)
$$\omega_1^2+\omega_2^2=\frac{C}{\lambda^4},\ C=\text{अवकलन का नियतांक।}$$

अब हम अवकल समी॰ (1) के x- और y-घटकों को लिखने की ओर बढ़ते हैं। वे हैं—

$$\ddot{\lambda}a_k-2\omega_3\dot{\lambda}b_k+\omega_1\lambda(a_k\omega_1+b_k\omega_2)$$
$$-\lambda a_k(\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2)-\dot{\omega}_3\lambda b_k=\frac{L_k}{\lambda^2},$$
$$\ddot{\lambda}b_k+2\omega_3\dot{\lambda}a_k+\omega_2\lambda(a_k\omega_1+b_k\omega_2)$$
$$-\lambda b_k(\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2)+\dot{\omega}_3\lambda a_k=\frac{M_k}{\lambda^2}$$

या, गुणनखडीय रूप मे सजाये हुए,

$$\{\ddot{\lambda}-\lambda(\omega_2^2+\omega_3^2)\}a_k$$

1. Collinear.

$$(9) \qquad -\{2\omega_3\dot{\lambda}+\lambda(-\omega_1\omega_2+\dot{\omega}_3)\}\, b_k=\frac{L_k}{\lambda^2},$$

$$\{2\omega_3\dot{\lambda}+\lambda(\omega_1\omega_2+\dot{\omega}_3)\}a_k + \{\ddot{\lambda}-\lambda(\omega_1^2+\omega_3^2)\}b_k=\frac{M_k}{\lambda^2}$$

प्रथम समीकरण के { } कोष्ठक, एवं द्वितीय समीकरण के भी, यदि λ^2 से गुणित किये जायें तो प्रत्येक को, (t से स्वतन्त्र) नियत गुणांकों वाले, तीन रैखिक समीकरण संतुष्ट करना चाहिए। यह तभी सभव होगा यदि वे स्वयं निश्चर हों। परिणाम निकलता है कि प्रथम तथा चतुर्थ कोष्ठकों के एवं द्वितीय और तृतीय कोष्ठकों के अंतर का, प्रत्येक λ^2 वैसे विभाजित एक नियताक के बराबर होगा। तो हम प्राप्त करते हैं

$$(10) \qquad \omega_1^2-\omega_2^2=\frac{A}{\lambda^3},\ 2\omega_1\omega_2=\frac{B}{\lambda^3}$$

समुचित समुच्चयन[1] देता है

$$(\omega_1\pm i\omega_2)^2=\frac{A\pm iB}{\lambda^2}.$$

जिससे निरपेक्ष परिमाण

$$(11) \qquad \omega_1^2+\omega_2^2=\frac{D}{\lambda^3},\ D=(A^2+B^2)^{\frac{1}{2}}$$

प्राप्त होता है। इसकी (8) के साथ तुलना करने से हम निम्नलिखित परिणाम पर पहुँचते हैं

$$(11a) \qquad \lambda=\frac{C}{D}=\text{नियत}।$$

यदि C और D स्वयं शून्य न हो तो। अब (10) के अनुसार, λ= नियत, करने से ω_1 तथा ω_2 दोनों ही निश्चर हो जाते हैं और इसलिए (7) से ω_3 को शून्य होता होगा। निर्देशांकों x, y के उपयुक्त निर्वाचन से ω_2 को भी o कर सकते हैं। तो (9) का प्रथम समीकरण प्रदान करेगा $L_k=O$, उस स्थिति में तीनों बिंदुओं P_k को समरेख होना पड़ेगा जो हमारी परिकल्पना के विरुद्ध है।

1. Consolidation

अतएव हमें $C=D=O$ रखना पड़ेगा और तब हम या तो (8) से या (11) से प्राप्त करते हैं

$$(12) \qquad \omega_1=\omega_2=0.$$

यह पृ० २३४ की अनुमिति 1 को सिद्ध करता है कि समतल S, कोणीय वेग ω_3 से, अपने आप में घूर्णन करता है, उसका अभिलंब आकाश में स्थिर होता रहता है।

यदि कोणीय वेग के समीकरण को अपने निकाय पर अनुप्रयुक्त करें तो देखते हैं कि m_k बिंदुओं की समतल S में गति क्षेत्रकलीय वेग नियतांक को कुछ भी अवदान नहीं कर सकती। अतएव यह नियतांक सीधे ही S के कोणीय वेग ω_3 से निर्धारित होता है; और निम्नलिखित होना चाहिए कि यह

$$\text{नियतांक}=\omega_3\sum m_k\,|\mathbf{r}_k|^2=\omega_3\lambda^2\sum m_k(a_k^2+b_k^2)$$

इसके लिए हम

$$(12a) \qquad \lambda^2\omega_3=\gamma, \quad (\gamma=\text{नियत}),$$

लिख सकते हैं। अतएव परिणाम निकलता है कि

$$(12b) \qquad 2\dot{\lambda}\omega_3+\lambda^2\dot{\omega}_3=0.$$

समीकरणों (12) तथा (12a,b) के प्रभाव से समीकरण (9) निम्नलिखित प्रकार से सरल हो जाते हैं—

$$(13) \qquad \lambda^2\ddot{\lambda}-\frac{\gamma^2}{\lambda}=\frac{L_k}{a_k}=\frac{M_k}{b_k}.$$

इनमें समायी हुई अभियाचना $\frac{L_1}{a_1}=\frac{M_1}{b_1}$ कहती है कि F_1 का O के प्रति का घूर्ण शून्य हो जाता है, क्योंकि

$$(14) \qquad \left|\,\mathbf{r}_1\times\mathbf{F}_1\,\right|=\frac{1}{\lambda^2}\,(a_1M_1-b_1L_1)=0,$$

अतएव $\mathbf{F}_1$ संहति-केंद्र O से होकर जाता है। यही $\mathbf{F}_2$ और $\mathbf{F}_3$ पर लागू है। यह हमारा दृढ़ कथन 2 है जो कहता है कि P_k पर अनुप्रयुक्त बलों का परिणामी कणों m_k के संहति-केन्द्र से होकर जाता है।

हम (14) को और अधिक सुव्यक्ततया लिखने के लिए (2) का उपयोग कर सकते हैं। तो तुरंत ही प्राप्त करते हैं—

$$(15) \qquad \frac{\mathbf{r}_1\times\mathbf{F}_1}{m_1G}=\frac{m_2\;\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2}{(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)^3}+\frac{m_3\;\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_3}{(\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1)^3}=0.$$

परन्तु संहति-केंद्र की परिभाषा से,

$$m_1\mathbf{r}_1+m_2\mathbf{r}_2+m_3\mathbf{r}_3=0, \quad (16)$$

और इसलिए

$$m_3\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2+m_3\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_3=0,$$

इसका प्रतिस्थापन देता (15) में है

$$m_2\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2\left[\frac{1}{(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)^3}-\frac{1}{(\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1)^3}\right]=0.$$

अर्थात्,

$$|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|=|\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1|. \quad (17)$$

इसी प्रकार ज्ञात होता है कि—

$$|\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_2|=|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2| \text{ इत्यादि।} \quad (17a)$$

इस प्रकार हम अभ्युक्ति 3 पर पहुँचते हैं—त्रिकोण समबाहु है।

(13) में आये हुए दोनों भागफलों $\frac{L_k}{a_k}$ तथा $\frac{M_k}{b_k}$ में से प्रत्येक निर्धारित किया जा सकता है। इसके लिए त्रिकोण की भुजा को λs कहिए, जहाँ

$$s^2=(a_2-a_1)^2+(b_2-b_1)^2=(a_3-a_2)^2+(b_3-b_2)^2=\ldots\ldots$$

तो (2) और (5) के अनुसार हम प्राप्त करते हैं

$$\frac{L_1}{a_1}=\frac{G}{s^3a_1}\{m_2(a_2-a_1)+m_3(a_3-a_1)\}$$

और, (16) के विचार से,

$$\frac{L_1}{a_1}=\frac{G}{s^3}\{-m_1-m_2-m_3\}. \quad (18)$$

इस समीकरण का दायाँ अंग m_k ओं और निर्देशाकों a_k, b_k में स-समिति है। अतएव वह न केवल $\frac{L_1}{a_1}$ का वरन् $\frac{L_k}{a_k}$ का, और $\frac{M_k}{b_k}$ का भी, मान निरूपित करता है।

इस मान का (13) में प्रतिस्थापन हमें देता है

$$\lambda^2\ddot{\lambda}-\frac{\gamma^2}{\lambda}=-\frac{G}{s^3}\left(m_1+m_2+m_3\right). \quad (19)$$

λ में यह अवकल समीकरण समय में हुई गति का वर्णन करता है, अर्थात् उस ताल का जिससे हमारे समबाहु त्रिकोण का बारी-बारी से प्रसरण और आकुंचन होता है।

परंतु इन दीर्घकालिक गति में, तथा उसी समय प्रक्षेप-पथों के रूप में अंतर्दृष्टि प्राप्त करने के लिए एक सहजतर रीति है। हम समतल S का त्याग कर देते हैं और गति का समतल S' में प्रेक्षण करते हैं जो S के तो समानांतर, परन्तु आकाश में स्थिर रहता है। S' में संहति-बिंदु m_k पर आरोपित केवल मात्र बल परिणामी $\mathbf{F}_k$ है जो संहति केंद्र की ओर निर्देशित है; यह केंद्र विराम में है। बनावटी बल न्द (कोरिऑलिस, अपकेंद्र; आदि) जो (1) में आते हैं अब निकल जाते हैं। (5) और (18) से $\mathbf{F}_k$ का परिमाण है—

$$(20) \qquad \left|\mathbf{F}_k\right| = \frac{m_k}{\lambda^2}\left(L_k^2+M_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{m_k G}{\lambda^2 s^2}\left(m_1+m_2+m_3\right)\frac{\left(a_k^2+b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}}{s}$$

दायें अंग में केवल एक ही राशि, λ^2 का समय में परिवर्तन होता है। (4) की सहायता से वह $|\mathbf{r}_k|$ के पदों में व्यक्त की जा सकती है—

$$\lambda^2 = \frac{|\mathbf{r}_k|^2}{a_k^2+b_k^2}.$$

(20) में λ को इस मान से प्रतिस्थापित कर दीजिए; एक नयी संहति m' परिभाषित करिए, यों—

$$(20a) \qquad m'_k = m_k \frac{\left(a_k^2+b_k^2\right)^{\frac{3}{2}}}{s^3};$$

और सारी संहति को कहिए

$$M = m_1+m_2+m_3$$

तो (20) के स्थान पर निम्नलिखित प्राप्त करते हैं—

$$\left|\mathbf{F}_k\right| = \frac{m'_k M G}{|\mathbf{r}_k|^2}$$

अतएव हमारे तीनों बिंदुओं का प्रत्येक, औरों से स्वतंत्रतया, आकाश में इस भाँति चलता है कि मानों उसकी संहति m_k नहीं m'_k है और जो न्यूटनीय प्रकार से O में विरामित संहति M की ओर आकर्षित है। अतएव वह एक शांकव[1] की रचना करता है जिसकी एक नाभि O पर है।

1. Conic section

तीनों शाकवों के परिमाणों और पारस्परिक स्थानों के बारे में कुछ कह सकने के लिए, गति की स्वीकृत दशा में अन्तर्निहित आदि के प्रतिबंधों को विचार में लेना होगा। उदाहरणतः, समझिए कि विचार उस क्षण कर रहे हैं जब $\lambda = \lambda_{extr}$ जहाँ प्रत्येक m_k की O से दूरी

$$(21) \qquad \lambda_{extr}\,(a_k^2 + b_k^2)^{\frac{1}{2}}$$

बाह्यतम[1] है। (4) के अनुसार, तब S में त्रिज्यावेग शून्य होगा। S' अर्थात् आकाश में जो वेग होगा वह कोणीय वेग के घटक ω_3 को दूरी (21) से गुणा करने से प्राप्त होगा। इसलिए इस दूरी में आने वाला गुणनखंड $(a_k^2+b_k^2)^{\frac{1}{2}}$ न केवल आदि के वेगों तथा सार्व सहति-केन्द्र से आदि की दूरियों के, वरन् इन आदि के मानों से निकले हुए तीनों शाकवों के आकारों के भी सादृश्य की माप है। इससे अभ्युक्ति (4) स्थापित हो जाती है। तीनों शाकवों के स्थान उन कोणों द्वारा जाने जाते हैं जो तीनों सदिश त्रिज्याओं $\overrightarrow{OP_k}$ में एक-दूसरे के बीच होते हैं।

उस विशेष स्थिति में जब $m_1+m_2=m_3$ और जब (इसलिए) सहति केंद्र समबाहु त्रिभुज की माध्यिकाओं के प्रतिच्छेद से सपाती होता है, तब ये शाकव सर्वांगसम और परस्पर १२०° से पृथक् होते हैं।

शाकवों की इस गति के अतिरिक्त, लाग्रांज के अनुसार, गतियोंका एक और प्रकार है जो सरल रूप में व्यक्त किया जा सकता है, जिसमें तीनों पिंड एक घूर्णनयुक्त ऋजुरेखा पर स्थित होते हैं। परंतु हम उस बात में यहाँ नहीं जाना चाहते।

अंत में कह देना चाहिए कि लाग्रांज की विशिष्ट त्रिपिंड समस्या से उसके संगत विशिष्ट n–पिंड समस्या को जा सकते हैं। बराबर की n–सहतियों और उपयुक्त आदि-वेगों की स्थिति में, तब n सर्वांगसम केप्लर दीर्घवृत्त प्राप्त होते हैं जिनके बीच परस्पर $\frac{2\pi}{n}$ का कोण होता है और जो एक ही ताल में पार किये जाते हैं। एक समय, अल्प काल के लिए, गति का यह ढंग X–किरणों के L–वर्णक्रमों के निकलने के संबंध में इलेक्ट्रनों के लिए, प्रतिपादित किया गया था[2]।

1. Extremum 2. Physikal Zeits, 19, 297, (1918).

षष्ठ अध्याय

यांत्रिकी के समाकल परिणमन संबन्धी सिद्धांत तथा व्यापकीकृत निर्देशांकों के लिए लाग्रांज के समीकरण

§ ३३. हैमिल्टन के सिद्धांत

यांत्रिकी के एक परिणमन संबंधी सिद्धांत से पहले ही परिचय हो चुका है अर्थात् दालांबेर का सिद्धांत। यह सिद्धांत किसी दिये हुए स्वेच्छ क्षण पर एक निकाय की दशा के आभासी विस्थापन द्वारा प्राप्त उसी निकाय की पास की दशा से तुलना करता है। अब जिन सिद्धांतों पर हम विचार करने वाले हैं वे समाकल सिद्धांत[1] हैं। इनमें और पूर्वोक्त में भेद यह है कि यहाँ हम परिमित कालांतर में, या, जो कि वही बात है, प्रक्षेप-पथ के परिमित खंड के अंतर पर, निकाय की आनुक्रमिक दशाओं की बात करेंगे। तत्पश्चात् इन दशाओं की किन्हीं संगत आभासी दशाओं से तुलना की जाती है।

अपने विविध नामों वाले विभिन्न समाकल सिद्धांतों में भेद इस बात में है कि प्रारंभिक और उनके पास की या परिणमित दशाओं की संगति किस प्रकार स्थापित की गयी है। उनमें सर्व-सामान्य बात यह है— जो राशि परिणमित की जायगी उसकी विमितियाँ वही होंगी जो क्रिया की होती हैं। अतएव वे सब "लघुतम क्रिया* के सिद्धांतों" वाले नाम के अंतर्गत की जा सकती हैं।

जैसा कि पहले से ही ज्ञात है शक्ति एक ऐसी राशि है जिसकी विमितियाँ हैं— ऊर्जा $\times$ काल$^{-1}$ (अर्थात् ऊर्जा $\div$ काल); परंतु क्रिया की विमितियाँ हैं—ऊर्जा $\times$

1. Integral principles

* अंग्रेजी बोलने वाले देशों में प्रस्तुत बात के लिए इस नाम का व्यवहार नहीं किया जाता। अतएव यह बता देना आवश्यक है कि मूल-ग्रंथ में कहा हुआ यह लघुतम क्रिया का हैमिल्टन का सिद्धांत अंग्रेजी में व्यवहृत लघुतम क्रिया के सिद्धांत से भिन्न है जिसे कभी-कभी मोपर्त्वी (Maupertuis) का सिद्धांत कह देते हैं। —अंग्रेजी अनुवादक।

काल। इसका एक उदाहरण है—क्रिया का मौलिक क्वाटम* या प्लांक[1] नियतांक (प्लाक) जिसपर § ४५ में विचार होगा, अर्थात् निम्नलिखित राशि

$$h=6.624\times 10^{-27} \text{ अर्ग सेकंड।}$$

पहले हैमिल्टन का सिद्धांत लेंगे। वह मोपर्त्वी के सिद्धांत से भिन्न है, जो § ३७ में लिया जावेगा (यद्यपि ऐतिहासिकतया मोपर्त्वी हैमिल्टन से कोई सौ साल पहले हुए थे)। उस (मोपर्त्वी सिद्धात) और इस (हैमिल्टन सिद्धांत) में भेद यह है कि यहाँ समय (काल) में कोई परिणमन नहीं होता। इसका यह मतलब हुआ कि वास्तविक प्रक्षेपपथ के किसी x_k निर्देशाको वाले, स्थान पर निकाय उसी समय पहुँचता है जब कि परिणमित प्रक्षेपपथ के संगत $x_k+\delta x_k$ निर्देशांको वाले स्थान पर। हैमिल्टन के सिद्धांत का यह गुणधर्म निम्नलिखित अभ्युक्ति में संगृहीत है—

(1) $$\delta t=0.$$

इस स्थान पर यह कह देना चाहिए कि जब निकाय के प्रक्षेप-पथ या पथ की बात करते हैं तब उसके किसी बिंदु के तीन विमितियों वाले आकाश में प्रक्षेपपथ से मतलब नही होता, वरन् अनेक विमितियों वाले आकाश में एक ऐसे वक्र का मतलब होता है जो समूचे के समूचे निकाय की गति का लाक्षणिक हो। इस प्रकार, f स्वतंत्रता-संख्याओं की स्थिति में यह वक्र f विमितियों वाले आकाश में होगा, जिसके निर्देशाक होगे, $q_1 \ldots\ldots q_f$ (मिलाइए पृष्ठ ६४)।

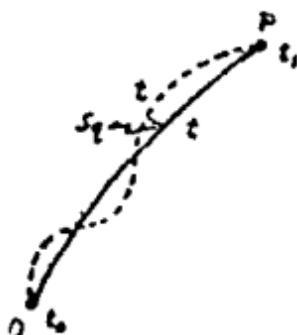
हैमिल्टन सिद्धात संबंधी परिणमनों के बारे में हमारी अभियाचना है कि प्रतिबंध (1) के अतिरिक्त एक और निरोध उन पर लगाया जाय कि विचाराधीन प्रक्षेपपथ के खड के सिरे, O और P, तथा परिणमित, पास के, प्रक्षेप-पथ के सिरे आकाश में संपाती हों। अतएव प्राप्त होता है कि किसी निर्देशांक x के लिए

(2) $$\delta x=0, \text{ समय } t=t_0 \text{ पर और } t=t_1 \text{ पर भी।}$$

पृ. २४५ की आकृति (आ० ५१) इस उद्देश्य से खीची गयी है कि वास्तविक (पूरी रेखा) और आभासी या परिणमित (टूटी रेखा) पथों के संबंध की तीन विमितियो में, सकेतन रूप से रूप-कल्पना[2] करने मे सहायता मिले। निर्देशाको के परिणमनों δx के कारण से हुआ विस्थापन δq, दोनों अत-बिंदुओं के अतिरिक्त, इस निरोध के

* क्वांटम एक निश्चित, वांछित या अनुनात परिमाण मानिका।

1. Planck 2. In visualizing

साथ बिलकुल ही कुछ नहीं हो सकता है कि δq निरतर और t मे अवकलनीय[1] हो। वास्तविक पथ के प्रत्येक बिंदु का परिणमित पथ के एक बिंदु के साथ सागत्य

आकृति ५१—हैमिल्टन के सिद्धान्त में "प्रक्षेपपथ" का परिणमन।
समय परिणमित नहीं होता।

होता है जो पूर्वोक्त से δq के विस्थापन द्वारा प्राप्त होता है, और इस प्रकार के दो बिंदु एक ही समय के होते हैं।

अब हम हेमिल्टन का सिद्धात व्युत्पन्न करेंगे। हम दालांबेर के सिद्धात के (10.6) वाले रूप से प्रारंभ करते हैं—

$$(3)\quad \sum_{k=1}^{n}\left\{\left(m_k\ddot{x}_k-X_k\right)\delta x_k+\left(m_k\ddot{y}_k-Y_k\right)\delta y_k+\left(m_k\ddot{z}_k-Z_k\right)\delta z_k\right\}=0.$$

तो अब n पृथक्-पृथक् सहति-बिंदुओं के एक निकाय पर विचार करते हैं, परंतु जो किसी विशेष प्रकार से न दी हुई प्रकृति के पूर्णपदीय[2] या अपूर्णपदीय नियंत्रण बलों द्वारा युग्मित हो सकते हैं। परिणामवश, ये δx_k, δy_k, δz_k जो स्वभावतः इन नियत्रणों का पालन करेंगे, परस्पर स्वतंत्र न होंगे। स्वतत्रता सख्याओ वाली पूर्णपदीय स्थिति में केवल f स्वेच्छया निर्वाचित हो सकते हैं। अपूर्णपदीय स्थिति में उन्हें अवकल प्रतिबंधों द्वारा संबधित होना होगा।

हम पहले निम्नलिखित द्वारा संबध (3) का केवलमात्र औपचारिक रूपातरण करेंगे—

1. Differentiable 2. Holonomic

(4) $$\ddot{x}_k \delta x_k = \frac{d}{dt}(\dot{x}_k \delta x_k) - \dot{x}_k \frac{d}{dt}(\delta x_k),$$

जहां हम तुरन्त ही पूछेंगे कि $\frac{d}{dt}(\delta x_k)$ जैसे व्यंजन का क्या मतलब है। इसके लिए न केवल हम x_k के वास्तविक पथ की $x_k + \delta x_k$ के आभासी पथ से तुलना करते हैं वरन् वास्तविक पथ पर के वेग $\dot{x}_k$ की भी आभासी पथ पर के उसी समय के वेग $\dot{x}_k + \delta \dot{x}_k$ से तुलना करते हैं। यह पश्चोक्त वेग निम्नलिखित सर्वसमिका[1] द्वारा परिभाषित किया जाता है—

$$\frac{d}{dt}(x_k + \delta x_k) = \dot{x}_k + \frac{d}{dt}(\delta x_k).$$

परिणमित वेग लिखने के इन दो प्रकारों का हम समीकरण कर प्राप्त करते हैं—

(5) $$\frac{d}{dt}(\delta x_k) = \delta \dot{x}_k$$

इस परिणाम का (4) में उपयोग करें, तो

(6) $$\ddot{x}_k \delta x_k = \frac{d}{dt}(\dot{x}_k \delta x_k) - \dot{x}_k \delta \dot{x}_k = \frac{d}{dt}(\dot{x}_k \delta x_k) - \tfrac{1}{2}\delta(\dot{x}_k^2).$$

स्वभावतः ऐसे ही समीकरण y_k और z_k के लिए भी होंगे। अतएव (3) को अब इस रूप में लिख सकते हैं—

(7) $$\frac{d}{dt}\sum m_k \left(\dot{x}_k \delta x_k + \dot{y}_k \delta y_k + \dot{z}_k \delta z_k\right) =$$

$$\sum \frac{m_k}{2} \delta \left(\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2 + \dot{z}_k^2\right) + \sum \left(X_k \delta x_k + Y_k \delta y_k + Z_k \delta z_k\right)$$

दायी ओर का द्वितीय पद आभासी[2] कर्म δW के सिवाय और कुछ नहीं है, अर्थात् हमारे आभासी विस्थापन में वाह्य बलों द्वारा किया हुआ कर्म। तथा दायें पार्श्व का प्रथम पद गतिज ऊर्जा T का वह परिणमन है जो वास्तविक से काल्पनिक प्रक्षेप पथ को जाने में होता है, अर्थात्

$$T = \sum \frac{m_k}{2}\left(\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2 + \dot{z}_k^2\right)$$

अतएव समी० (7) निम्नलिखित प्रकार से सरल किया जा सकता है—

1. Identity 2. Vertued

(8) $$\frac{d}{dt}\sum m_k\left(\dot{x}_k\delta x_k + \dot{y}_k\delta y_k + \dot{z}_k\delta z_k\right) = \delta T + \delta W.$$

इससे अन्य कोई परिणाम निकालने से पहले एक क्षण के लिए अप्रस्तुत विषय सम्बंध (5) के बारे में कुछ कहेंगे। उसे एक बार फिर हम निम्नलिखित रूप में लिख डालें—

(9) $$\frac{d}{dt}\delta x = \delta\frac{dx}{dt}.$$

यदि यह स्मरण करें कि t परिवर्तित नहीं होता और यह कि $\delta t = 0$ में अन्तर्भावित है कि $\delta dt = 0$, तो (9) के स्थान में हम

(9a) $$\frac{d\delta x}{dt} = \frac{\delta dx}{dt} \text{ या } d\delta x = \delta dx \text{ भी}$$

लिख सकते हैं।

सम्बंध (9a), विशेषतया अपने दूसरे रूप $d\delta = \delta d$ में, पुराने प्रकार के पुराने परिणमन कलन में फलदायी यद्यपि रहस्यमय भाग लेता है। देखिए कि आभासी विस्थापन के समय-प्रवकलज[1] को वेग के आभासी परिणमन के साथ सबंधित करने में समी० (9a) वास्तव में वही कहता है जो नगण्य-सा समी० (5), सिवाय इसके कि (9a) में ये दो अनुमान समाये हुए हैं कि समय परिणमन के वश में नहीं है और आभासी विस्थापन निरंतर है।

अब हम समी० (8) को लौटते हैं और उसका t के लिए t_0 से t_1 तक समाकलन करते हैं। बायां पार्श्व (2) के कारण शून्य हो जाता है और केवल निम्नलिखित रह जाता है—

(10) $$\int_{t_0}^{t_1}(\delta T + \delta W)\,dt = 0.$$

जिस प्रकार का परिणमन हैमिल्टन के सिद्धांत में समाविष्ट है उसके लिए इसे नीचे दी हुई भांति भी लिख सकते हैं—

(11) $$\delta\int_{t_0}^{t_1} T\,dt + \int_{t_0}^{t_1}\delta W\,dt = 0.$$

पिछले समाकल को $\delta\int W dt$ द्वारा प्रतिस्थापित करना भूल होगी, क्योंकि यद्यपि यह

1. Time-derivative

ठीक है कि आभासी कर्म δW और समय dt में किया कर्म, अर्थात् dW, इन दोनों के सुनिश्चित अर्थ हैं। स्वयं W कार्य के लिए वैसी बात नहीं है। W, व्यापकतया, एक "दशा परिवर्त्य" नहीं है। यह दशा परिवर्त्य[1] तभी होगा यदि dW यथार्थ अवकल हो, अर्थात् यदि बाह्य बल उन प्रतिबंधों का पालन करें जो स्थितिज ऊर्जा V के होने की गारंटी करें। [देखिए §६ (३)]। उस स्थिति में

$$\int \delta W dt \text{ को } -\int \delta V.dt = -\delta \int V dt$$

से समी० (11) में प्रतिस्थापित कर सकते हैं जो तब चिर-सम्मततया सरल यह रूप लेता है—

$$(12) \qquad \delta \int_{t_0}^{t_1} (T-V) dt = 0.$$

यही वह समीकरण है जो, जिस समय हैमिल्टन के सिद्धांत का नाम लेते हैं उस समय, साधारणतया, ध्यान में आता है। पृष्ठ ४६ के कथनों के अनुसार, यह संरक्षित अर्थात् अविनाशी निकायों के लिए वैध है। समीकरण (11) को हम असंरक्षित निकायों को भी सम्मिलित करने वाला व्यापकीकृत हैमिल्टन का सिद्धांत कह सकते हैं।

हम अब यह दावा करते हैं कि संरक्षित या असंरक्षित समुदायों के लिए क्रमात् समी० (12) या (11) में यांत्रिकी का पूरा सार समाया हुआ है, ठीक वैसे ही जैसे कि दालांबेर के सिद्धांत में। यह ऊर्जा-वत् व्यंजन $T-V$ के विशेष महत्त्व पर ज़ोर देता है। यांत्रिकी में वह लाग्रांजीय फलन (या, संक्षेप में केवल लाग्रांजीय) कहलाता है, और समीकरण (12) को निम्नलिखित में ले जाता है—

$$(13) \qquad \delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = 0, \text{ जहाँ } L = T - V.$$

शब्दों में, लाग्रांजीय का समय समाकल एक चाह्यतमी[2] है। अपने अंतिम कार्यों में हेल्महोल्ज़ ने हैमिल्टनीय प्रकार के परिणमन-सिद्धांत पर भारी भरोसा किया था। उन्होंने उसे वैद्युत-गतिकी में भी पैठाया और L को गत्यात्मक विभव कहा। उष्मा-गतिकी में उसके विस्तृत व्यवहार के कारण, उसके लिए "स्वतंत्र ऊर्जा" का नाम उतना ही ठीक होगा, क्योंकि $T+V$ को "पूर्ण ऊर्जा" कहते हैं।

हैमिल्टन के सिद्धांत का इस बात से विशेष मान है कि वह निर्देशांकों के निर्वाचन से पूर्णतया स्वतंत्र है। वास्तव में T और V (तथा δW भी) ऐसी राशियाँ हैं

1. State variable 2. Extremum

जिनकी प्रत्यक्ष भौतिक गरिमा है और जो किसी भी वांछित निर्देशाकों के जुट (कुलक, सेट) में व्यक्त की जा सकती है। हम इस गुणधर्म का उपयोग अगले प्रकरण में करेंगे।

हर्ज़[1] की यह सम्मति थी कि हैमिल्टन का सिद्धांत केवल पूर्णपदीय निकायों के लिए ही वैध था। इस भूल का शोधन ओ० होल्डर[2] ने किया था।

हैमिल्टन का सिद्धात हमारे कार्य-कारण के सबधो की आवश्यकता के विरुद्ध है। अन्य जितने परिणमन सबधी सिद्धात हैं जिनमे क्रिया-समाकलवृंद[3] आते हैं, वे भी ऐसा ही विरोध करते हैं। क्योंकि यहाँ घटनाओ का क्रम निकाय की वर्त्तमान दशा से नही निर्धारित होता, वरन् उसके व्युत्पादन मे भूत और भविष्य दशाओ पर भी उतना ही विचार करना पड़ता है। तो इससे यह जान पड़ता है कि परिणमन सबधी सिद्धात **कारणात्मक** नही, वरन् **मीमांसक*** है। इस बात की चर्चा § ३७ मे फिर हम करेंगे, जहाँ इस सिद्धात की ऐतिहासिक उत्पत्ति का भी वर्णन करेंगे। वहाँ हम हैमिल्टन सिद्धात के उन रूपातरों का संक्षेप मे उल्लेख करेंगे जो यात्रिकी के अतिरिक्त भौतिकी के अन्य क्षेत्रों में उपयोगी सिद्ध होते हैं।

§ ३४. व्यापकीकृत निर्देशांकों के लिए लाग्रांज समीकरण

किसी स्वेच्छ अर्थात् किसी भी यान्त्रिक निकाय पर विचार कीजिए। संप्रति हम समझ लेंगे कि उसके विभिन्न अश परस्पर पूर्णपदीय प्रतिबंधो से ही युग्मित हैं। निकाय की स्वतंत्रता-सख्याएँ f हैं। इसलिए किसी दिये हुए क्षण पर उसका स्थान निर्धारित करने के लिए f स्वतत्र निर्देशांकों का उपयोग करा सकते हैं। इनको हम, जैसे कि पृ० ४९ पर,

(1) $$q_1,\ q_2, \cdots\cdots q_f$$

कहेंगे। ये हुए हमारे स्थान निर्देशाक[4]। इनके साथ हम "वेग निर्देशाकवृंद"

(1a) $$\dot{q}_1,\ \dot{q}_2,\ \cdots\ \cdots\ \dot{q}_f$$

जोड़ देते हैं। ये q_k और $\dot{q}_k$ किसी क्षण निकाय की दशा को पूर्णतया विनिर्दिष्ट कर देते हैं।

1. Hertz 2. O. Holder (Gottinger Nachr. 1896).
3. Action integrals
*देखिए पृ० 204 की पाद-टिप्पणी।
4. Position coordinates

आइए, हम अपना कथन और भी अधिक स्पष्ट कर दें। क्षण भर के लिए निकाय को निम्नलिखित $n \geq f$ निर्देशांकों को $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ द्वारा वर्णित होने दीजिए, जिनका विशिष्ट रूप से कार्तीय होना आवश्यक नहीं है। मान लीजिए कि उनमें $n-f$ प्रतिबंध निम्नलिखित रूप के हैं—

$$(2) \qquad F_k(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n) = 0, \quad k = f+1, f+2, \ldots n.$$

तो q_k को $x_1, x_2 \ldots\ldots x_n$ के किसी फलन F_k की भांति परिभाषित कर सकते हैं, अर्थात्

$$(2a) \qquad F_k(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n) = q_k, \quad k = 1, 2, \ldots f.$$

अब x_i के लिए F_k के आंशिक अवकलजों को F_{ik} द्वारा सूचित कीजिए। तो t के लिए (2) और (2a) का अवकलन प्रदान करता है—

$$(2b) \qquad \sum_{i=1}^{n} F_{ik}(x_1 \ldots x_n)\, \dot{x}_i = \begin{cases} \dot{q}_k, & k = 1, 2, \ldots f; \\ 0, & k = f+1, \ldots n. \end{cases}$$

इनसे $\dot{x}_i$ को $\dot{q}_k$ के संगे रैखिक फलनों की भांति निकाल सकते हैं, जिनके गुणांक $x_1 \ldots x_n$ पर, या (2) तथा (2a) के प्रभाव से, $q_1 \cdots q_f$ पर निर्भर करें। तो गतिज ऊर्जा, T जो $\dot{x}_i$ का समघात वर्गात्मक फलन है, ठीक वैसे ही जैसे कि वह होती, यदि प्रारंभ में कार्तीय निर्देशांकों में व्यक्त की जाती, अब $\dot{q}_k$ का फिर समघात वर्गात्मक ऐसा फलन हो जायगी जिसके गुणांक q_k पर निर्भर करेंगे। इस समय हम स्वीकृत कर लेंगे कि स्थितिज ऊर्जा V केवल q_k ओं का ही फलन है, बिना सिद्धांततः में इस संभाव्यता का वर्जन किये ही कि आगे चलकर V को $\dot{q}_k$ का भी फलन कर सकते हैं। इस संबंध में अब आइए (33.1.3) के L की परिभाषा यह कहकर पूरी ही कर दें कि

L को q_k तथा $\dot{q}_k$ का फलन समझा जायगा।

फिलहाल हम L के t पर सुव्यक्ततया निर्भर करने की बात छोड़ देंगे।

इसी अर्थ में अब हम L के परिणमन को लिख देंगे, अर्थात् L की काल्पनिक परिणमित दशा $q_k + \delta q_k$, $\dot{q}_k + \delta\dot{q}_k$ और प्रारंभिक दशा q_k, $\dot{q}_k$ का अंतर, जो होगा—

$$(3) \qquad \delta L = \sum_k \frac{\partial L}{\partial q_k}\, \delta q_k + \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\, \delta \dot{q}_k$$

यह परिणमन अब हैमिल्टन सिद्धांत में प्रयुक्त कराया जाता है, क्योंकि

$$(3a) \qquad \int_{t_0}^{t_1} \delta L \; dt = o$$

इस रूप का (33.13) के रूप से भेद इस बात मे है कि अब हमने परिणमन को समाकलन के चिह्न के भीतर लिख दिया है, जब कि पहले वह उसके बाहर रखा गया था। दोनों रूप, निस्सदेह, तुल्यात्मक हैं, उस कायदे (33.1) के प्रभाव से जो कहना है कि t तथा dt परिणमित नहीं किये जाते। कुछ भी हो, समी० (3) सूत्रीकरण (33.10) से, जिसमें यह सिद्धात पहले पहल आया था, सगत है।

अब हम (3) के द्वितीय योग के व्यापक पद पर (3a) द्वारा इगित समय के लिए समाकलन किया करते हैं। वैसा करने के लिए एक आंशिक समाकलन द्वारा इस पद का रूप निम्नलिखित (4) मे वदल देते हैं। यह एक ऐसा प्रक्रम है जो सारे परिणमन कलन के लिए यूलर के काल से लाक्षणिक है।*

$$(4) \qquad \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k \, dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{d}{dt} \delta q_k \, dt$$

$$= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k \, dt.$$

इस युगल समानता के अंतिम अंग का प्रथम पद, (33 2) में दिये हुए प्रतिबंधों के कारण, शून्य हो जाता है। अतएव δL का पूर्ण व्यंजन (3) यह प्रदान करता है—

$$(4a) \qquad \int_{t_0}^{t_1} \delta L \, dt = - \int_{t_0}^{t_1} \sum_k \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} \right) \delta q_k \, dt = 0.$$

अब δq_k परस्पर स्वतत्र हैं। अतएव एक को छोड वे सबके सब शून्य किये जा सकते

*व्यापकतया, (6) के प्रकार के समीकरण को विशेष रूप से वर्णन करने के लिए किसी दी हुई परिणमन संबंधी समस्या के "यूलर समीकरण" वाक्य का व्यवहार करते हैं और ऐसी किसी समस्या में (4) तथा (5) से (6) का व्युत्पादन यूलर के समीकरण के व्युत्पादन के प्रतिरूपक है। अतएव कह सकते हैं कि लाग्रांज समीकरण फलन L द्वारा प्रभेदित परिणमनीय समस्या के यूलर समीकरण हैं।

हैं। इसको भी आ० ५१ (पृ० १८२) के "प्रक्षेप-पथ" पर एक स्थान के पड़ोस को छोड़कर अन्य सर्वत्र, या, जो कि वही बात हुई, किसी-भी समय t पर कालातर Δt भर के लिए, शून्य कर सकते हैं। तो ($4a$) को पूरा करने के लिए अब आवश्यक हुआ कि

$$(5) \qquad \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial L}{\partial q_k}\right)\int_{\Delta t}\delta q_k dt=0$$

परन्तु Δt परिमित है, और इस कालातर में δq_k शून्य नहीं होता। अतएव किसी समय t और किसी सकेतांक k के लिए हम प्राप्त करते है

$$(6) \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial L}{\partial q_k}=0.$$

ये हैं व्यापकीकृत निर्देशांकों के लिए लाग्रांज के समीकरणवृद। इनको, अब तक जिस स्थिति पर विचार किया है उसके लिए विशिष्टीकृत, **लाग्रांज के द्वितीय प्रकार के समीकरणवृद** भी कहते हैं। इस स्थिति में निकाय पर आरोपित बलों का विभव होता है तथा निकाय के आतरिक प्रतिबधगण पूर्णपदीय होते हैं।

यदि इन अनुमानों में से एक या दूसरा न रहे तो हम इन समीकरणों के विस्तृत रूप पर पहुँचते हैं। अतः आगे हम दो स्थितियों पर विचार करेंगे।

प्रथम स्थिति वह है जिसमें बलवृंद विभव से व्युत्पन्न होने योग्य नहीं होते। उस स्थिति मे हैमिल्टन के सिद्धांत का (33.11) वाला रूप हमारा आरंभस्थल होगा। आभासी विस्थापनों δq_k ओं के पदों मे व्यक्त वाह्य बलों के आभासी कर्म δW पर विचार कीजिए, तो हम निम्नलिखित पर आते हैं :—

$$(7) \qquad \delta W=\sum Q_k\,\delta q_k.$$

जिन गुणांकों Q_k का यहाँ उपयोग कराया गया है उन्हें निर्देशांकों q_k के संगी बल के व्यापकीकृत घटक कहेंगे। बल की धारणा का यह एक औपचारिक विस्तरण है, जिसे निस्सदेह उसकी गणितीय परिभाषा मान लेना अनुज्ञेय है। इसके अतिरिक्त वह बड़ा उपयोगी भी है। इस प्रकार अब (9.7) में दिये हुए किसी अक्ष के प्रतिबल के घूर्ण की परिभाषा का पुन.कथन यों कर सकते हैं—किसी बल का घूर्ण वह व्यापकीकृत बल है, जो सगत घूर्णन कोण का संगी है। स्पष्ट होगा कि (7) में परिभाषित राशियों Q_k का अब कोई सदिश लक्षण नहीं रहता, और न व्यापकतमा उनको अब डाइनो[1] की विमितियां वाले होने की आवश्यकता ही रह जाती है। इसका स्थान (7) से दीख जाता है कि उनकी विमितियाँ संगी q_k की विमिति

1. Dynes

पर निर्भर करती है। अतएव, जैसा हम जानते ही हैं, बल के घटकों की विमितियाँ कर्म की विमितियाँ होंगी, अर्थात् वे अर्ग[1] होंगे, क्योंकि सभी δq_k कोण हैं और कोण विमितिहीन होते हैं।

तो यदि अब (33.11) में (7) का उपयोग करें और समीकरण (4) तथा (5) में इंगित रूपान्तरणों को कर लें तो समीकरण (6) के स्थान में हम प्राप्त करेंगे

$$(8) \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k$$

इसको कुछ अधिक व्यापक रूप में यों लिख सकते हैं—

$$(8a) \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_k$$

यह अधिकतर व्यापक इसलिए है कि अब हम उस स्थिति पर भी विचार कर सकते हैं जिसमें आरोपित बलों के कोई तो विभवों से व्युत्पन्न होने योग्य हैं, कोई नहीं। केवल इस बात की आवश्यकता होगी कि पश्चोक्त प्रकार के बलों के संगत Q_k ओं को भी (8a) के दक्षिण पार्श्व में लिख लें। तथा च (8a) के लाग्रांजीय L को बनाने के लिए, पूर्वोक्त की स्थितिज ऊर्जा को गतिज ऊर्जा T में संयुक्त कर सकते हैं।

तब (8a) ऐसे बलों के लाग्रांज समीकरण हो जाते हैं जिनमें के कोई-कोई विभवों से व्युत्पाद्य नहीं होते।

तो अब यदि पहले कहे हुए अनुमानों में से द्वितीय अनुमान का त्याग कर दें, अर्थात् यह स्वीकार कर लें कि निकाय के नियंत्रण कुछ अंश में अ-पूर्णपदीय हैं, तो q_k निर्देशांकों का प्रवेश अवैध हो जाता है। क्योंकि परिभाषा से ही अपूर्णपदीय प्रतिबंध (2) के रूप में नहीं रखे जा सकते और इसलिए q ओं के उपयुक्त निर्वाचन से लुप्त नहीं किये जा सकते। तब हमें qओं को अत्यधिक संख्या में प्रवेश कराना पड़ेगा, अर्थात् अत्यणु गति[2] के लिए जितनी स्वतत्रता - सख्याएँ चाहिए उनसे अधिक सख्या में। अत्यणु गति की स्वतंत्रता-सख्याएँ $f-r$ होती है, जहाँ f तो परिमित गति की स्वतत्रता संख्याएँ है और r अपूर्णपदीय प्रतिवधो की संख्या है। इन्हें अब समी० (7.4) जैसे रूप मे, आभासी प्रतिवधों की भाँति निम्नलिखित प्रकार लिख सकते हैं—

$$(9) \qquad \sum_{k=i}^{f} F_{k\mu}(q_1 \ldots q_f)\delta q_k = o, \quad \mu = 1, 2, \ldots r.$$

1. Ergs 2. Infinitesimal motion,

वे अनुज्ञेय परिणमनों δq_k ओं पर निरोध का होना सूचित करते हैं। इस निरोध को विचार में इस भाँति लेते हैं कि समीकरणों (4_a) के प्रत्येक को एक लाग्राँजीय गुणक λ_μ से गुणा कर उन्हें (33 13) के समाकल के भीतर जोड़ देते हैं। तो F के जरा संक्षिप्तीकृत संकेतन के साथ प्राप्त करते हैं —

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(\delta L+\sum_{\mu=1}^{r}\lambda\mu F_{k}\mu\delta q_k\right)dt=0.$$

इसका यूलरीय रूपांतरण (4) की भाँति चलता है, जिससे (49) के स्थान में प्राप्त होता है

$$(10)\qquad \int_{t_0}^{t_1}\sum_k\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q_k}-\frac{\partial L}{\partial q_k}-\sum_{\mu=1}^{r}\lambda\mu F_k\mu\right)\delta q_k\,dt.$$

यहाँ ये δq_k परस्पर स्वतंत्र नहीं रहते वरन् संबंधों (9) द्वारा संबंधित होते हैं। परंतु पृ० ६७ की भाँति तर्क कर सकते हैं कि (10) के कोष्ठकावृत dq_k के गुणांकों का r, λ_μ के समुचित निर्वाचन द्वारा शून्य किया जा सकता है। शेष वाले k पर किये गये योग में q_k ओं के केवल $f-r$ रह जाते हैं, जो सब परस्पर स्वतंत्र हैं। (5) के बाद की भाँति का युक्तितर्क अब हमें इस परिणाम पर विवश करता है कि शेष के कोष्ठकों को भी शून्य हो जाना चाहिए। तब हमें f समीकरणों का निम्नलिखित पूरा समुदाय प्राप्त हो जाता है—

$$(11)\qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q_k}-\frac{\partial L}{\partial q_k}=\sum_{\mu=1}^{r}\lambda\mu F_k\mu.$$

इनका नामकरण हम 'लाग्राँज के मिश्रित प्रकार के समीकरण' कर सकते हैं, क्योंकि वे लाग्राँज के प्रथम और द्वितीय प्रकार के समीकरणों के आधों-आध बीच में पड़ते हैं।

कह देना चाहिए कि यह मिश्रित प्रकार न केवल तभी आता है जब कि कुछ प्रतिबंधों का निरसन करने में हम असमर्थ होते हैं (अपूर्णपदीय नियंत्रणों वाली स्थिति), वरन् तब भी जब निरसन करना चाहते ही नहीं। क्योंकि ऐसा हो सकता है कि हमारा उस नियंत्रण बल में स्वार्थ हो, जो कि एक पूर्णपदीय प्रतिबंध द्वारा निकाय पर पड़ता हो। बात यह निकलती है कि यह बल प्रस्तुत प्रतिबंध के सगी $\lambda\mu$ द्वारा निरूपित

होता है [ठीक वैसे ही जैसे कि गोलीय लोलक वाली समी० (18.7) में], और समी० (11) के समाकलन से प्राप्त हो जाता है।

प्रकटतया उस स्थिति के लिए जिसमें (6) के बाद किए हुए दोनों अनुमानों का त्याग एक साथ ही कर दिया जाय, हम अलग (11) और (15a) प्रकारों को व्यक्त कर सकते हैं।

ऐसा करने के बजाय हम अब सबके बाद निम्नलिखित प्रश्न पर विचार करेंगे— कैसे और कौन से अनुमान करके ऊर्जा के अविनाशित्व का सिद्धान्त लाग्रांज समीकरण (6) से व्युत्पन्न किया जा सकता है?

जैसा कि पहले ही, समी० (3) के ऊपर, जोर देकर कहा जा चुका है, L, q_k ओं तथा $\dot{q}_k$ ओं का फलन है। पहले की भाँति हमारी यह भी अभियाचना है कि L में t मुख्यवततया न समाया हो। उस स्थिति में समी० (3) वैध है न केवल आभासी परिवर्तनों δq, $\delta \dot{q}$ के लिए, वरन् दीर्घकालिक परिवर्तनों dq, $d\dot{q}$ के लिए भी; और इसलिए

$$\frac{dL}{dt}=\sum_k \dot{q}_k \frac{\partial L}{\partial q_k}+\sum_k \ddot{q}_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \tag{12}$$

दूसरी ओर वहीं पर हमने यह भी जोर देकर कहा था कि T उसी $\dot{q}_k$ का समाग वर्गात्मक फलन * है। अतएव समाग फलनों के लिए निम्नलिखित यूलर नियम का अनुप्रयोग किया जा सकता है—

$$2T=\sum_k \dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \tag{13}$$

(*) यदि ऐसा न भी हो, और उसके स्थान पर L को उन्हीं q_k तथा $\dot{q}_k$ का कोई वांछित फलन मान लिया जाय, तो भी निम्नलिखित रूप का एक व्यापकीकृत अविनाशित्व नियम दिया जा सकता है। रूप है —$H=\sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k-L=$ नियत। इस प्रकार परिभाषित फलन H को हम अध्याय आठ में "हैमिल्टनीय" कहेंगे। समीकरण (15c) में समाया हुआ अविनाशित्व नियम इसी समीकरण की एक विशेष स्थिति है।

समय के लिए इसका अवकलन प्रदान करता है :

$$2\frac{dT}{dt}=\sum_k \dot{q}_k \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}+\sum_k \ddot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}. \tag{14}$$

अब (12) को (14) से घटा देते हैं। $L=T-V$ होने के कारण, वायाँ अंग निम्नलिखित हो जाता है —

$$\frac{dT}{dt}+\frac{dV}{dt}$$

दाहिनी ओर द्वितीय पद कट जाते हैं, बशर्ते कि V स्वतंत्र है $\dot{q}_k$ से। उस स्थिति में, समी० (6) के द्वारा दायी ओर के पहले पद भी कट जाते हैं, जिस कारण हम प्राप्त करते हैं

$$\frac{dT}{dt}+\frac{dV}{dt}=0. \tag{14a}$$

इससे हम परिणाम निकालते हैं —

$$T+V=E, \tag{15}$$

अतएव ऊर्जा के अविनाशित्व वाला नियम लाग्रांज के समीकरणों का परिणाम है।

तो अब उन अनुमानों की जाँच करनी चाहिए जिनसे हम इस महत्वपूर्ण परिणाम पर पहुँचते हैं।

(क) T के अर्थ से कह सकते हैं कि गतिज ऊर्जा निकाय के स्थान और वेग से, अतएव q और $\dot{q}$ से, निर्धारित होती है। T का t पर सुव्यक्ततया निर्भर करना, नियत्रणों के समीकरणों के निरसन के परिणामवश ही हो सकता है, यदि ये नियंत्रण t पर निर्भर करें*। अब पृ० ९२ पर पहले ही देख चुके हैं कि इस प्रकार के नियंत्रण निकाय पर अवश्य काम करते हैं और इसलिए ऊर्जा के अविनाशित्व में गड़बड़ी डाल देते हैं। तो अविनाशित्व की वैधता के लिए अत्यावश्यक है कि T में t सुव्यक्ततया न समाया हुआ हो।

(*) ऐसे समय-निर्भर प्रतिबंधों को कभी-कभी धारात्मक (तरल) कहते हैं। इसके प्रतिकूल, समय-स्वतंत्र प्रतिबन्ध भी होते हैं जिन्हें क[illegible] स्थिर या स्थित, दृढ़) कहते हैं।

(ख) अतएव यह अनुमान कि L सुव्यक्ततया t पर न निर्भर करे, इस अनुमान पर पहुँचाता है कि V स्वतंत्र हो t से। यह प्रतिबंध भी आवश्यक है। अन्यथा, समी० (12) के दक्षिण पार्श्व से निम्नलिखित पद का योग करना होगा।

$$-\frac{\partial V}{\partial t}$$

तब यह पद विपरीत चिह्न के साथ समी० (14a) के दायें अंग में फिर प्रकट होगा। और तब $T+V=$नियत के स्थान पर हम

$$(15a) \qquad \frac{d}{dt}\,(T+V)=\frac{\partial V}{\partial t}$$

प्राप्त करेंगे। अर्थात् ऊर्जा की अविनाशिता का नियम अवैध हो जायगा।

(ग) मान लीजिए कि V न केवल q_k पर किंतु $\dot{q}_k$ पर भी निर्भर करता है। (6) की सहायता से (14) और (12) के दक्षिणांगों का अंतर निम्नलिखित प्राप्त करते हैं —

$$(15b) \qquad \sum q_k \frac{d}{dt}\,\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k}+\sum \dot{q}_k\frac{\partial V}{\partial q_k}=\frac{d}{dt}\sum \dot{q}_k\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k}.$$

यह स्थिति अविनाशित्व नियम को पहुँचाती तो अवश्य है परंतु उसका निम्नलिखित अपरिचित रूप है

$$(15c) \qquad T+V-\sum \dot{q}_k\,\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k}=\text{नियत।}$$

ऊपर दी हुई बातों से एक और परिणाम निकाला जा सकता है जो आगे चलकर उपयोगी होगा। $2T$ के लिए पदपुंज (13) के उपयोग से तथा इस अनुमान पर पलट-कर कि V, केवल q_k ओं का ही फलन है, यदि

$$L-2T=-(T+V)$$

का परिकलन करें तो हम निम्नलिखित पर पहुँचते हैं

$$-(T+V)=L-\sum \dot{q}_k\,\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}=L-\sum \dot{q}_k\,\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k},$$

या

$$(16) \qquad T+V=\sum \dot{q}_k\,\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}-L$$

अर्थात्, पूर्ण ऊर्जा $T+V$ लाग्रांजीय के पदपुंज से परिकलित की जा सकती है।

इस प्रकरण के किंचित् अमूर्त विकासनों में आगामी प्रकरण के उदाहरणों द्वारा जीवन का संचार हो जायगा। उनकी तैयारी में (6) में आये हुए

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \text{ तथा } \frac{\partial L}{\partial q_k},$$

इन दो व्यंजनों का, सरलतम स्थिति अर्थात् एक पृथक्कृत संहति-बिंदु को कार्तीय निर्देशाकों x, y, z में व्यक्त गति के लिए विशिष्टीकरण कर लेंगे। हमें प्राप्त है—

$$T=\frac{m}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right) \;;$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}=m\dot{x}, \text{ इत्यादि};$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}=\frac{\partial V}{\partial x}=X, \text{ इत्यादि}$$

कारण कि इस समीकरण के अनुसार, $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$ घूर्ण के x–निर्देशाकों को निरूपित करता है, हम, बिलकुल व्यापकतया $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$ को q_k से संबंधित व्यापकीकृत घूर्ण का घटक कहेंगे। और कारण कि दूसरी ओर, $\frac{\partial L}{\partial x}$ बल का x–घटक प्रस्तुत करता है, $\frac{\partial L}{\partial q}$ से निकले हुए दो पदो को व्यापकीकृत बल के q–घटकद्वय का नाम देंगे,

$$(17) \qquad \frac{\partial T}{\partial q}-\frac{\partial V}{\partial q}=\frac{\partial T}{\partial q}-Q.$$

Q एक बाह्य बल है, जैसे कि समी० (7) में, और $\frac{\partial T}{\partial q}$ एक बनावटी लाग्रांज बल है जो इस पर निर्भर करता है कि q–घटक किस प्रकार स्थान के साथ परिणमन करता है। कार्तीय निर्देशाकों x, y, z के लिए, जहाँ नियत q के वक्र परस्पर समातर है, कोई दिया हुआ q_i स्वतंत्र होगा q_k से $(k \neq i)$ और बनावटी बल शून्य हो जायगा।

§ ३५. लाग्रांज समीकरणों के उपयोग-प्रदर्शक उदाहरण

लाग्रांज अनुष्ठान की श्रेष्ठता दिखलाने के लिए ऐसे उदाहरण चुने गये हैं जो पहले भी प्रारंभिक विधियों में लिये गये थे।

(१) वृत्तजात लोलक[1]

यहाँ प्रत्यक्ष निर्देशांक q वह कोण है जो आ० २६ (पृ० ९४) में वृत्तजातों के जनयिता पहिये का घूर्णन-कोण है। इस कोण के पदों में व्यक्त कार्त्तीय निर्देशांक, समी० (172) के अनुसार ये हैं—

$$x=a(\phi-\sin\phi), \qquad \dot{x}=a(1-\cos\phi)\,\dot{\phi}\ ;$$
$$y=a(1+\cos\phi), \qquad \dot{y}=-a\sin\phi\,\dot{\phi}\ .$$

इनसे हम परिकलन करते हैं कि

$$T=\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)=ma^2(1-\cos\phi)\dot{\phi}^2,$$
$$V=mgy=mga\,(1+\cos\phi),$$

$$L=ma^2(1-\cos\phi)\,\dot{\phi}^2-mga\,(1+\cos\phi) \tag{1}$$

बस इतना ही प्रस्तुत निकाय की ज्यामिति और यान्त्रिकी के बारे में जानने की आवश्यकता है; शेष को लाग्रांज अनुष्ठान अपने आप सँभाल लेता है—

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}}=2ma^2(1-\cos\phi)\dot{\phi}\ ,$$
$$\frac{\partial L}{\partial\phi}=ma^2\sin\phi\,\dot{\phi}^2+mga\sin\phi\ ,$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}}=2ma^2(1-\cos\phi)\,\ddot{\phi}+2ma^2\sin\phi\,\dot{\phi}^2.$$

या, अवकल समीकरण (346) में प्रतिस्थापित करने पर,

$$(1-\cos\phi)\,\ddot{\phi}+\tfrac{1}{2}\sin\phi\,\dot{\phi}^2=\frac{g}{2a}\sin\phi\ .$$

अर्धकोण का प्रवेश और $2\sin\frac{1}{2}\phi$ से भाग, इसको निम्नलिखित रूप में सरल बना देता है

1. Cycloidal pendulum,

(2) $$\sin\frac{\phi}{2}\;\ddot{\phi}+\tfrac{1}{2}\cos\frac{\phi}{2}\dot{\phi}^2=\frac{g}{2a}\;\cos\frac{\phi}{2}.$$

सहज ही में सत्यापित कर सकते है कि बायाँ अग

$$-2\frac{d^2}{dt^2}\cos\tfrac{1}{2}\phi$$

के बराबर है। अतएव प्रस्तुत अवकल समीकरण (2) पहले वाले समी० (17.6) से सर्वसम है, जिसके द्वारा वृत्तजातीय लोलक का निर्दोषतया तुल्यकालिक व्यवहार हम सिद्ध कर सके थे।

(२) गोलीय लोलक

यहाँ कोणद्वय, θ और ϕ क्रमशः l त्रिज्या वाले गोले पर ध्रुवीय कोण और भौगोलिक रेखांश, संहति-बिंदु के दिये हुए निर्देशाक हैं। रेखा अल्पाश है—

$$ds^2=l^2\,(d\,\theta^2+\sin^2\theta,\,d\,\phi^2)\;;$$

अतएव गतिज ऊर्जा निम्नलिखित होगी

$$T=\frac{m}{2}\,l^2\,(\dot{\theta}^2+\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2)\;\;;$$

जैसे (18.5a) मे, स्थितिज ऊर्जा होगी

$$V=mgl\cos\theta\;;$$

और इसलिए

(3) $$L=\frac{m}{2}\,l^2\,(\dot{\theta}^2+\sin^2\,\theta\,\dot{\phi}^2)-mgl\cos\theta\,.$$

और अब लाग्रांज नमूने का यंत्रवत् परिकलन चल पड़ता है। अचर गुणनखंडो से भाग देने के उपरात, θ तथा ϕ के अवकल समीकरण निम्नलिखित होंगे

(4) $$\ddot{\theta}\;-\sin\theta\,\cos\theta\,\dot{\phi}^2-\frac{g}{l}\sin\theta=0\,,$$

$$\frac{d}{dt}\,(l^2\sin^2\theta\,\dot{\phi})=0\,.$$

इनमे का द्वितीय समीकरण (18.8) से सहमत, क्षेत्रफलीय वेग के अविनाशित्व वाला नियम है। देखिए कि यहाँ हम उस परिकलन को बचा गये हैं जो पहले दी हुई विवृति में इस समीकरण के पहले आवश्यक रूप से दिया गया था। समी० (18.8) के

क्षेत्रफलीय वेगांक C की सहायता से समीकरणों (4) का प्रथम यों लिखा जा सकता है—

$$\ddot{\theta} = \frac{C^2}{l^4} \frac{\cos\theta}{\sin^3\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta .$$

दक्षिण पार्श्व का द्वितीय पद गुरुत्वाकर्षी ऐंठ

$$|\mathbf{L}| = mgl\sin\theta ,$$

के तुल्य है, जो (34.7) के भाव में कोण $q=\theta$ के सगी बल का व्यापकीकृत घटक है। प्रथम पद (34.17) के भाव मे एक बनावटी लाग्रांज बल है। इस बल का उद्गम यह तथ्य है कि गोले पर जिन रेखाओं पर कोण θ मापा जाता है, वे समातर नही जातीं वरन् ध्रुव से अपसरित होती है।

यह शिक्षाप्रद होगा कि इस उदाहरण मे लाग्रांज समीकरणों के उस विस्तरण का अनुप्रयोग किया जाय, जिसके लिए समी० (34.11) में, θ तथा ϕ के साथ आधिक्य-निर्देशाक r का प्रवेश करा, तैयारी की गयी थी। अब, अवश्यमेव, r संबंध $r=l$ द्वारा निश्चित है। फिर भी इस निर्देशाक में हमारी अभिरुचि इसलिए है कि गुणक λ द्वारा वह हमें गोले के तल पर सहृति-विंदु का दाव, या, जो कि वही बात है, लोलक की अवलंबन रज्जु मे का तनाव, प्रदान करेगा। प्रसंगानुकूल अवकल समीकरण प्राप्त करने के लिए केवल (3) के स्थान पर

$$(5) \qquad L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta.\dot{\phi}^2) - mgr\cos\theta$$

रखकर निम्नलिखित एक तीसरा लाग्रांज समीकरण बनाने की आवश्यकता है जो (4) के दो समीकरणो के साथ जोड़ दिया जाय

$$(6) \qquad \frac{d}{dt}m\dot{r} - mr\dot{\theta}^2 - mr\sin^2\theta\dot{\phi}^2 + mg\cos\theta = \lambda r.$$

समी० (34.11) में आयी हुई राशि F_k μ को हमने r के बराबर रख दिया है, क्योंकि समी० (18.1) से सहमत होने के लिए हमने प्रतिबंध $r=l$ को निम्नलिखित रूप में लिख दिया है

$$F = \tfrac{1}{2}(r^2 - l^2) = 0$$

(2) $$\sin\frac{\phi}{2}\ \ddot{\phi}+\frac{1}{2}\cos\frac{\phi}{2}\dot{\phi}^2=\frac{g}{2a}\ \cos\frac{\phi}{2}.$$

सहज ही में सत्यापित कर सकते हैं कि वायाँ अंग

$$-2\frac{d^2}{dt^2}\cos\tfrac{1}{2}\phi$$

के बराबर है। अतएव प्रस्तुत अवकल समीकरण (2) पहले वाले समी० (17.6) से सर्वसम है, जिसके द्वारा वृत्तजातीय लोलक का निर्दोषतया तुल्यकालिक व्यवहार हम सिद्ध कर सके थे।

(२) गोलीय लोलक

यहाँ कोणद्वय, θ और ϕ क्रमशः l त्रिज्या वाले गोले पर ध्रुवीय कोण और भौगोलिक रेखांश, संहति-बिंदु के दिये हुए निर्देशांक हैं। रेखा अल्पांश है—

$$ds^2=l^2\ (d\,\theta^2+sin^2\,\theta,\ d\,\phi^2)\ ;$$

अतएव गतिज ऊर्जा निम्नलिखित होगी

$$T=\frac{m}{2}\ l^2\,(\dot{\theta}^2+\dot{s}in^2\theta\ \dot{\phi}^2)\ \ ;$$

जैसे (18.5a) में, स्थितिज ऊर्जा होगी

$$V=mgl\cos\theta\ ;$$

और इसलिए

(3) $$L=\frac{m}{2}\ l^2\,(\dot{\theta}^2+\sin^2\ \theta\,\dot{\phi}^2)-mgl\cos\theta\ .$$

और अब लाग्रांज नमूने का यंत्रवत् परिकलन चल पड़ता है। अचर गुणनखडों से भाग देने के उपरांत, θ तथा ϕ के अवकल समीकरण निम्नलिखित होंगे

(4) $$\ddot{\theta}\ -\sin\theta\,\cos\theta\,\dot{\phi}^2-\frac{g}{l}\sin\theta=0\ ,$$

$$\frac{d}{dt}\,(l^2\sin^2\theta\,\dot{\phi})=0\ .$$

इनमें का द्वितीय समीकरण (18.8) से सहमत, क्षेत्रफलीय वेग के अविनाशित्व वाला नियम है। देखिए कि यहाँ हम उस परिकलन को बचा गये हैं जो पहले दी हुई विवृति में इस समीकरण के पहले आवश्यक रूप से दिया गया था। समी० (18.8) के

क्षेत्रफलीय वेगाक C की सहायता से समीकरणों (4) का प्रथम यों लिखा जा सकता है—

$$\ddot{\theta} = \frac{C^2}{l^4}\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta\,.$$

दक्षिण पार्श्व का द्वितीय पद गुरुत्वाकर्षी ऐंठ

$$|\mathbf{L}| = mgl\sin\theta\,,$$

के तुल्य है, जो (34.7) के भाव में कोण $q=\theta$ के सगी वल का व्यापकीकृत घटक है। प्रथम पद (34.17) के भाव मे एक वनावटी लाग्रांज वल है। इस वल का उद्गम यह तथ्य है कि गोले पर जिन रेखाओं पर कोण θ मापा जाता है, वे समातर नही जाती वरन् ध्रुव से अपसरित होती हैं।

यह शिक्षाप्रद होगा कि इस उदाहरण मे लाग्रांज समीकरणों के उस विस्तरण का अनुप्रयोग किया जाय, जिसके लिए समी० (34.11) में, θ तथा ϕ के साथ आधिक्य-निर्देशाक r का प्रवेश करा, तैयारी की गयी थी। अव, अवश्यमेव, r सवध $r=l$ द्वारा निश्चित है। फिर भी इस निर्देशाक में हमारी अभिरुचि इसलिए है कि गुणक λ द्वारा वह हमे गोले के तल पर सहति-बिदु का दाव, या, जो कि वही वात है, लोलक की अवलवन रज्जु मे का तनाव, प्रदान करेगा। प्रसगानुकूल अवकल समीकरण प्राप्त करने के लिए केवल (3) के स्थान पर

$$(5)\qquad L=\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta.\dot{\phi}^2)-mgr\cos\theta$$

रखकर निम्नलिखित एक तीसरा लाग्रांज समीकरण वनाने की आवश्यकता है जो (4) के दो समीकरणो के साथ जोड़ दिया जाय

$$(6)\qquad \frac{d}{dt}m\dot{r}-mr\dot{\theta}^2-mr\sin^2\theta\dot{\phi}^2+mg\cos\theta=\lambda r.$$

समी० (34.11) मे आयी हुई राशि F_k μ को हमने r के वरावर रख दिया है, क्योंकि समी० (18.1) से सहमत होने के लिए हमने प्रतिवंध $r=l$ को निम्नलिखित रूप में लिख दिया है

$$F=\tfrac{1}{2}(r^2-l^2)=0$$

यदि $r=l$ और $\dot{r}=\ddot{r}=0$ कर ले तो (6) से परिणाम निकलता है

(7) $$\lambda l = mg\cos\theta - ml(\dot{\theta}^2+\sin^2\theta.\dot{\phi}^2).$$

यह (18.6) से सहमत है यदि वहाँ समकोणीय निर्देशांकों को θ, ϕ में रूपान्तरित कर लें। लाग्रांज की व्यवस्था से ऐसे परिकलन से हम एक बार फिर बच जाते हैं।

(३) युगल लोलक

यहाँ आकृति ३८ (पृ० १५०) कोणद्वय ϕ तथा ψ उपयुक्त निर्देशाक गण q_k हैं। § 21 के सकेतन मे लिखते है

(8) $$X=L\sin\phi,\quad x=L\sin\phi+l\sin\psi,$$
$$Y=L\cos\phi,\quad y=L\cos\phi+l\cos\psi.$$

इनसे निम्नलिखित विलकुल ठीक सबंध प्राप्त करते है

$$T=\frac{M}{2}(\dot{X}^2+\dot{Y}^2)+\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)$$

$$=\frac{M+m}{2}L^2\dot{\phi}^2+\frac{m}{2}l^2\dot{\psi}^2+mLl\cos(\phi-\psi)\dot{\phi}\dot{\psi},$$

$$V=-MgY-mgy=-(M+m)gL\cos\phi-mgl\cos\psi.$$

अंतिम पदपुंज का चिह्न ऋणात्मक है, क्योंकि Y तथा y गुरुत्व बल की दिशा में धनात्मक लिये गये हैं। यहाँ $T-V$ द्वारा बने हुए लाग्रांजीय को Λ लवदा ग्रीक अक्षर कहेंगे, क्योंकि L लोलक अवलबन की लबाई के लिए लिया गया है। तो निम्न लिखित प्राप्त करते है —

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial\dot{\phi}}=(M+m)L^2\dot{\phi}+mLl\cos(\phi-\psi)\dot{\psi},$$

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial\dot{\psi}}=ml^2\dot{\psi}+mLl\cos(\phi-\psi)\dot{\phi},$$

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial\phi}=-(M+m)gL\sin\phi-mLl\sin(\phi-\psi)\dot{\phi}\dot{\psi},$$

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial\psi}=-mgl\sin\psi+mLl\sin(\phi-\psi)\dot{\phi}\dot{\psi},$$

इन संबंधो से लाग्रांज समीकरणो को लिख डालने के लिए हम तुरंत ही ϕ तथा ψ को अल्पराशियाँ मान लेगे। तो $\dot{\phi}$ और $\dot{\psi}$ भी उसी प्रकार के परिमाण की राशियाँ होंगी जैसे कि ϕ और ψ, अतएव उनके वर्गफलों की उपेक्षा कर सकते हैं। तो प्रस्तुत समीकरण निम्नलिखित होगे

$$(9)\qquad \begin{aligned} L\,\ddot{\phi}+\frac{g}{l}\phi &= -\frac{m}{M+m}\,\frac{l}{L}\,\ddot{\psi}\,, \\ \ddot{\psi}+\frac{g}{l}\psi &= -\frac{L}{l}\,\ddot{\phi}\,. \end{aligned}$$

ये समीकरणों (21.3) के सर्वसम हैं, केवल इस बात की आवश्यकता है कि निर्देशांक-कोणों ϕ ψ से निर्देशाक-दूरियों X, x को चला जाना होगा। इसके लिए रूपातरण समीकरणो (8) का उपयोग करेगे, जो अल्प ϕ, ψ के लिए निम्नलिखित मे सरलीकृत हो जाते हैं

$$\phi=\frac{X}{L}\,,\ \psi=\frac{x-X}{l}.$$

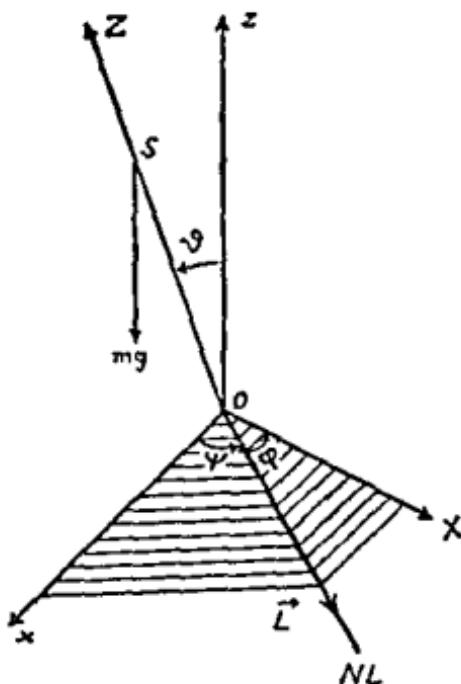
समीकरणो (9) तथा (21.3) के द्वितीय समीकरणो के लिए सर्वसमता तो प्रत्यक्ष है। प्रथम समी० (9) और प्रथम समी० (21.3) के लिए भी यह सच है, बशर्ते कि दक्षिणी अग मे $\ddot{\psi}$ के लिए उसका द्वितीय समी० (9) मे का मान प्रतिस्थापित कर लें। अतएव दोलन प्रक्रिया का (21.3) के बाद दिया हुआ विवेचन प्रस्तुत समीकरणो (9) पर तुरत ही लागू है और यहाँ दोहराने की आवश्यकता नही।

विषय समाप्त करने के पहले हम जोर देकर कह देना चाहते हैं कि प्रस्तुत औपचारिक विवृति में केवल लोलक रज्जु l मे के तनाव की कोई चर्चा नही की गयी है। जैसा कि १५० पृ० पर दी हुई पाद-टिप्पणी मे पहले ही कह आये है, लाग्रांज के गति-समीकरणो में यह तनाव निकाय की आतरिक प्रतिक्रियाओं की भांति अंतर्निहिततया समाया हुआ है।

(४) भारी संमति लट्टू[1]

इस समस्या के चिरसम्मत निर्देशाकगण q_k यूलरीय कोणत्रय θ, ϕ तथा ψ हैं (θ और ϕ पहले ही (25.4) और (26.5a) मे प्रस्तुत किये जा चुके हैं)।

1. Heavy symmetrical top.

उनको तथा उनके संगत कोणीय वेगों को हम निम्नलिखित आकृति द्वारा व्याख्याक रेंगे

आकृति ५२. यूलरीय कोणों θ, ϕ, ψ तथा उनके भाव की व्याख्या। (z=ऊर्ध्वाधर; Z=लट्टू का अक्ष; x=आकाश में स्थित क्षैतिज रेखा; X=लट्टू में स्थित, उसके निरक्षीय समतल में रेखा)। अक्षों का इस प्रकार का अकन पृ० १३९ पर प्रवेशित निर्देशाकों की प्रणाली के अनुरूप है

१. θ ऊर्ध्वाधर और लट्टू के अक्ष के बीच का कोण है; $\dot{\theta}$ पात-रेखा[1] के प्रति का कोणीय वेग है। पात-रेखा इन दोनों दिशाओं से लबवत् है।

२. ψ वह कोण है जो पात-रेखा, क्षैतिज समतल में एक निश्चित दिशा, जैसे कि x–अक्ष, के साथ बनाती है; $\dot{\psi}$ ऊर्ध्वाधर के चारों ओर का कोणीय वेग है।

1. Line of nodes

३. ϕ वह कोण है जो पात-रेखा लट्टू के निरक्षीय समतल में एक निश्चित दिशा, जैसे कि X–अक्ष, के साथ बनाती है; $\dot{\phi}$ लट्टू के सम्मिति-अक्ष के प्रति का कोणीय वेग है।

ये $\dot{\theta}$, $\dot{\phi}$, $\dot{\psi}$ कोणीय वेग सदिश ω के पूर्णपदीय परंतु वक्रीय घटक हैं, न कि ω_1, ω_2, ω_3 जो कि घूर्णनवेग के ऋजुरेखीय परतु अपूर्णपदीय घटक थे। नीचे दी हुई सारणी (१०) दोनों घटक-जुटों के बीच की दैशिक कोज्याएँ दिखलाती है। सारणी $\dot{\theta}$, $\dot{\phi}$, $\dot{\psi}$ के घूर्णन का भाव भी देती है (दक्षिणावर्त पेच वाला कायदा)—

(10)

	$\dot{\theta}$	$\dot{\phi}$	$\dot{\psi}$
ω_1	$\cos\phi$	0	$\sin\theta\sin\phi$
ω_2	$-\sin\phi$	0	$\sin\theta\cos\phi$
ω_2	0	1	$\cos\theta$

प्रथम दो स्तंभ तो १ तथा ३ में जो कुछ कहा था उससे प्रत्यक्ष प्रकार से निकल आते हैं। तीसरे स्तभ को समझने के लिए, देखिए कि ऊर्ध्वाधरतया लक्ष्य करते हुए सदिश $\dot{\psi}$ का निरक्षीय समतल मे प्रक्षेप $\dot{\psi}\sin\theta$ है। अपनी पारी में यह सदिश निरक्षीय समतल में ω_1 तथा ω_2 के सामने दिये हुए दो घटकों मे खडित होता है, अर्थात् क्रमशः $\dot{\psi}\sin\theta\sin\phi$ और $\dot{\psi}\sin\theta\cos\phi$ मे।

देखिए कि प्रस्तुत सारणी, §2 में दी हुई अनुसूचियों से असदृश, केवल बायें से दायें को ही पढ़ी जा सकती है, ऊपर से नीचे नहीं। उसकी पक्तियों से अब हम प्राप्त करते हैं :—

(11)
$$\omega_1 = \cos\phi\dot{\theta} + \sin\theta\sin\phi\dot{\psi},$$
$$\omega_2 = -\sin\phi\dot{\theta} + \sin\theta\cos\phi\dot{\psi},$$
$$\omega_2 = \dot{\phi} + \cos\theta\dot{\psi}.$$

और (11) के प्रथम दो से

(11a)
$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = \dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\psi}^2.$$

अब $I_2 = I_1$ रखकर, पदपुंज (26.17) निम्नलिखित हो जाता है

$$(12) \qquad T = \frac{I_1}{2}(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\psi}^2) + \frac{I_3}{2}(\dot{\phi} + \cos\theta\dot{\psi})^2.$$

गुरुत्वाकर्षीय स्थितिज ऊर्जा V के लिए समी० (25.6 a) के प्रभाव से प्राप्त करते हैं

$$(13) \qquad L = T - V = \frac{I_1}{2}(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\psi}^2) + \frac{I_3}{2}(\dot{\phi} + \cos\theta\dot{\psi})^2 - P\cos\theta,$$

$$P = mgs.$$

अतएव L स्थान-निर्देशाको ϕ और ψ से स्वतंत्र है और केवल उनके समय के साथ के परिवर्तन पर निर्भर करता है। कहते हैं कि ϕ और ψ चक्रीय (cyclic) निर्देशांक हैं। इस नाम की उत्पत्ति घूर्णनयुक्त पहिये के गत्यात्मक व्यवहार से हुई (संस्कृत में पहिया=चक्र, जिससे चक्रीय बना, ग्रीक κυκλοσ से निकला)। यह व्यवहार पहिये के क्षणिक स्थान से नही उसके परिक्रमण की चाल से निर्धारित होता है। अतएव

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = \frac{\partial L}{\partial \psi} = 0\ .$$

तो लाग्राँज के समीकरणों में राशियों

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \quad \text{और} \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}}$$

के समय-अवकलजों को शून्य हो जाना चाहिए। पिछले प्रकरण के अंत में हमने इन राशियों को ϕ तथा ψ के संगी व्यापकीकृत घूर्णवृंद कहा था। यहाँ से आगे उन्हें p द्वारा सूचित करेंगे। तो व्यापकतया लिखेंगे

$$(14) \qquad p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\ .$$

अब दृढ़तापूर्वक कह सकते है कि यदि निर्देशाकवृंद q_k चक्रीय हों तो चक्रीय निर्देशाकों के सयुग्म घूर्णवृंद p_k गति के समाकल (अर्थात् समाकलन वृंद) हैं। प्रस्तुत स्थिति में इन नियताकों की गरिमा पृ० १८३ के (25.6) से हम पहले ही से जानते हैं। तो

$$(15) \qquad P_\phi = M''\ ;\quad P_\psi = M'$$

पहले पृ० १८८ पर, लट्टू के स्थान-निर्देशाकों के पदो मे इन नियताकों के व्यंजनो की कमी थी। ये अब व्यापक कायदे (14) के अनुप्रयोग से व्युत्पन्न किये जा सकते है—

$$(16)\qquad p_\phi=\frac{\partial L}{\partial \dot\phi}=I_3(\dot\phi+\cos\theta\,\dot\psi)$$

$$p_\psi=\frac{\partial L}{\partial \dot\psi}=I_1\sin^2\theta\,\dot\psi+I_3\cos\theta\,(\dot\phi+\cos\theta\,\dot\psi)$$

(15) और (16) का सयोग परिणाम देता है—

$$(17)\qquad \left.\begin{aligned}\dot\phi+\cos\theta\,\dot\psi&=\frac{M''}{I_3},\\ I_1\sin^2\theta\,\dot\psi&=M'-M''\cos\theta.\end{aligned}\right\}$$

समीकरण (17) लाग्रांज समीकरणों में से दो की अतर्वस्तु खाली कर देते हैं। तीसरा लाग्रांज समीकरण p_θ की परिवर्तन-दर व्यक्त करता है—

$$(18)\qquad p_\theta \text{ की परिवर्तन दर}=\frac{\partial L}{\partial \theta}=I_1\dot\theta\,,$$

और यदि $\dot\phi$ तथा $\dot\psi$ के निरसन के लिए (17) का उपयोग करे तो निम्नलिखित हो जाता है

$$(19)\qquad I_1\,\dot\theta=\frac{(M'-M''\cos\theta)\,(M'\cos\theta-M'')}{I_1\sin^3\theta}+P\sin\theta.$$

दक्षिणाग θ, जो $\frac{\partial L}{\partial \theta}$ से आता है, न केवल वह गुरुत्वाकर्षीय प्रभाव समाया हुआ है जिससे हम (25-4) द्वारा परिचित हैं, वरन् उसके अतिरिक्त एक बनावटी बल भी समाया हुआ है, जो व्यवहृत निर्देशाक-प्रणाली की प्रकृति का परिणाम है, जैसा कि हम पृष्ठ २५८ से जानते हैं।

समी० (19) मे व्यापकीकृत लोलक समीकरण का गुण है। उसके समाकलन पर रुकने की आवश्यकता नहीं, क्योंकि हम ऊर्जा

$$(20)\qquad T+V=E$$

का समाकल ले सकते हैं, जो (19) के प्रथम समाकल के परिणाम से सर्वसम होगा।

आइए एक बार फिर (17) की सहायता से समी० (12) की $\dot{\phi}$ तथा $\dot{\psi}$ राशियों का निरसन करें। तो (20) प्रदान करता है

$$(21) \qquad \frac{I_1}{2}\left\{\dot{\theta}^2 + \left(\frac{M'-M''\cos\theta}{I_1\sin\theta}\right)^2\right. + \frac{M''^2}{2I_3} + P\cos\theta = E$$

यतः समी० (21) के तीन समाकलाक M', M'' तथा E हैं अतः लट्टू की समस्या के लिए वह प्रथम कोटिका व्यापक समाकल होगा। अंत में, जैसे कि § 18 में गोलीय लोलक के लिए θ और $\dot{\theta}$ को

$$\cos\theta = u; \quad \dot{\theta}\sin\theta = \dot{u}$$

से प्रतिस्थापित कर लेते हैं। तो हम प्राप्त करते हैं

$$(22) \qquad \left(\frac{du}{dt}\right)^2 = U(u)$$

जहाँ

$$(23) \quad U(u) = \left(\frac{2E}{I_1} - \frac{M''^2}{I_1 I_3} - \frac{2P}{I_1}u\right)(1-u^2) - \left(\frac{M'-M''u}{I_1}\right)^2,$$

यत: $U(u)$ है u में तृतीय घात का बहुपदी[1], समय t प्रथम प्रकार के दीर्घ-वृत्तीय समाकल द्वारा दिया जाना चाहिए, जैसे कि गोलीय लोलक की स्थिति में। अर्थात्

$$(24) \qquad t = \int^{u} \frac{du}{U^{\frac{1}{2}}}.$$

दिगंश कोण[2] ψ समी० (17) से तृतीय प्रकार के दीर्घवृत्तीय समाकल द्वारा दिया जाता है (देखिए पृ० १३५)। इस प्रकार

$$(25) \qquad \psi = \int^{u} \frac{M'-M''u}{I_1(1-u^2)} \, \frac{du}{U^{\frac{1}{2}}}$$

अब पृ० १३३ की आ० २९ के बाद दिये विचारों को दोहरा सकते हैं और आ० ५३ के प्रतिरूप पर पहुँचते हैं। लट्टू के अक्ष का मात्रक गोले पर अनुरेखण[3] अक्षांशों $u = u_1$

1. Polynomical 2. The azimuth angle 3. Trace

तथा $u=u_2$ वाले दो वृत्तों के बीच, उनको स्पर्श करता हुआ, आगे पीछे दोलित होता है। स्पर्शता बिंदुओं पर, जैसा कि आ० ५३ में दिखलाया है, अनुरेखण या तो केवल (स्पर्श करता हुआ) निकल जाता है या एक फंदा बना देता है; फंदा निशिताग्र[1] में भ्रष्ट हो सकता है। प्रत्येक दोलन में लट्टू का अक्ष (सदैव) उसी दिगंश कोण $\Delta\psi$ से आगे बढ़ता है जो, (18.15) के सदृश, समी० (25) से तृतीय प्रकार के एक पूर्ण दीर्घवृत्तीय समाकलन से प्राप्त होता है।

एक विशेष बात यह कि यदि लट्टू ऊर्ध्वाधर के प्रति एक सम पुरसरण करता है तो आवश्यक है कि समातर वृत्तद्वय u_1 तथा u_2 एक ही में मिल जायें। उस स्थिति में आ० २९ (पृ० १३३) के वक्र $U(u)$ को भुजाक्ष[2] का नीचे से स्पर्श करना होगा। इससे ज्ञात होता है कि भारी लट्टू का समपुरसरण गति का एक विशेष रूप है (परंतु जब कि बलों द्वारा अनियन्त्रित लट्टू के लिए वह गति का व्यापक रूप होता है)।

आकृति ५३. मात्रक त्रिज्या के गोले पर भारी समित लट्टू के अक्ष का अनुरेखण

यदि दोनो मूल u_1 और u_2 बिलकुल ठीक सपाती न हों, केवल सन्निकटतया ही हों, तो अब भी ऐसा ही जान पड़ता है कि ऊर्ध्वाधर के चारों ओर लट्टू का अक्ष समभाव से ही आगे बढ़ रहा है। परंतु ठीक-ठीक परीक्षा करने पर हम देखेंगे कि इस आगे बढ़ने पर छोटे-छोटे अक्ष-विचलन अध्यारोपित हैं, जिनके कारण वह होता है जिसे "छद्म-सम पुर सरण" कहा था। लट्टुओं के साधारण प्रयोगों में इसी प्रकार की घटना लाक्षणिकतया देखी जाती है। साधारणतया उसके किनारे पर लपेटी डोरी को शीघ्रतापूर्वक खींचकर, लट्टू के अक्ष के चारों ओर जितना बड़ा हो सकता है उतना बड़ा कोणीय संवेग प्रदान कर, उसे उसकी नोक पर एक सकोटर पात्र[1] में अति सावधानी से रख देते हैं कि उसकी गति को कोई बोधगम्य पार्श्विक आवेग न लगे।

1. Cusp 2. Axis of abscissae 1. In a socket pan

इस व्यवहार को यों समझाया जाता है कि ऐसे प्रयोग में आदि का कोणीय संवेग M, सम्मिति-अक्ष के पास होता है। यही बात प्रारंभ के घूर्णन-अक्ष के लिए प्वांसो विधि से भी निकलती है। अतएव घूर्णन-अक्ष पहले तो आकृति ४३ के मात्रक गोले पर एक छोटे से परिपथ की रचना करता है। इस परिपथ को स्पर्श करते हुए समांतर वृत्तद्वय, $u = u_1$ तथा $u = u_2$ आस-पास के पड़ोसी हैं और सारी गति भर में पास-पास ही रहते हैं, जैसा कि आ० ५३ के व्यापक चित्रण से देखा जा सकता है। कोणीय संवेग (मोमेंट) और इस लिए कोणीय वेग (वेलॉसिटी) भी पहले अत्यधिक होते हैं और, घर्षणकृत हानियों को छोड़कर, वे भी गति भर में अपरिवर्तित रहते हैं। अतएव अक्षविचलन बहुत ही द्रुत और प्रायः दृष्टि-अगोचर रहते हैं। लट्टू गुरुत्व बल से प्रभावित होने में बहुत ही अरुचि दिखलाता-सा जान पड़ता है; उसके स्थान पर सततया गुरुत्वाकर्षण के बल के समकोण "पार्श्वगमन" करता रहता है। यही वह मिथ्याभासी व्यवहार है जिसने शताब्दियों से अनुरागी (एमेच्यूर) एवं प्रवीण (प्रोफेशनल) दोनों ही प्रकार के जिज्ञासुओं का चित्त नृत्यमान लट्टू के सिद्धांत की ओर आकर्षित कर रखा है।

§ ३६. लाग्रांज समीकरणों का एक अन्य व्युत्पादन

इसमें कोई सदेह नहीं कि व्यापकीकृत निर्देशाकों के लिए लाग्रांज समीकरणों का हैमिल्टन के सिद्धांत से व्युत्पादन स्पष्टता और संक्षिप्तता में अनतिक्रांत है, परंतु फिर भी ऐसी भावना होती है कि वह कुछ अस्वाभाविक-सा ही है। विविध गत्यात्मक चरराशियों के जो रूपान्तर संबधी गुण-धर्म हैं और जो लाग्रांज समीकरणों का अंतर्भाग बनाते हैं, उन पर प्रकाश नही पड़ता। आगे दिया हुआ व्युत्पादन इस कमी को पूरा कर देगा।

हम किसी $\frac{n}{3}$ (n तीन से विभाज्य) संहति-बिंदुओं वाले ऐसे निकाय पर ध्यान केंद्रित करते हैं जो किन्ही भी (स्वेच्छ) नियंत्रणो के अधीन हो। सरलता के लिए नियंत्रण पूर्णपदीय निर्वाचित किये जाते हैं। यदि निकाय की स्वतंत्रता-संख्याएँ f हों तो नियंत्रणो की संख्या $n-f$ होगी। हमारा संकेतन समी० (34.2) का होगा। निर्देशाकों को समकोणिक मान लेंगे और उन्हे $x_1, x_2, \ldots x_n$ कहेंगे। इसी प्रकार बाह्य बलो के घटकों को $X_1, X_2, \ldots X_n$, मान लेंगे। अत मे अपने संहति-बिंदुओं के संवेगों के घटको को ξ_1, ξ_2, ξ_n कहेंगे। उन्हे $p_1, p_2 . . p_n$ कहना अच्छा

होता, जैसा कि (35.14) में किया था, परतु यह सकेतन व्यापकीकृत निर्देशाकों के लिए व्यासिद्ध रखेंगे। तो

(1) $$\xi_i = m_i \dot{x}_i\,,\quad i=1,2,\ldots n,$$

जहाँ m_i, निस्सदेह, तीन-तीन के समवायों मे बराबर हैं। हमारे निकाय की गति लाग्रांज के प्रथम प्रकार के समीकरणों (12.9) द्वारा वर्णित है। प्रस्तुत सकेतन में ये होंगे

(2) $$\frac{d\xi_i}{dt} = X_i + \sum_{\mu=f+1}^{n} \lambda_\mu \frac{\partial F_\mu}{\partial x_i}\,,\quad i=1,2,\ldots n.$$

अब व्यापकीकृत स्थान-निर्देशांकों, $q_1 \ldots q_f$, का प्रवेश कराते हैं। इनका निर्वाचन इस प्रकार किया जा सकता है और करना होगा कि, ठीक (34.2) की भांति, ये $n-f$ प्रतिबंध, $F_\mu = 0$, सर्वसमतः सतुष्ट हो जायँ तो नये और पुराने वेग-निर्देशाकों के बीच समीकरणों (34.2b) वाले सबंध होने होंगे। इन्हें हम $\dot{x}$ के लिए हल करते हैं और निम्नलिखित प्रकार से लिखते हैं

(3) $$\dot{x}_i = \sum_{k=1}^{f} a_{ik}\dot{q}_k,\quad i=1,2,\ldots n.$$

ये a_{ik} समी० (34.2b) में F_{ik} कहे गये थे तथा $x_1, \ldots x_n$ के और इसलिए, जैसा कि § ३४ मे जोर दिया गया था, $q_1 \ldots q_f$ के भी फलन हैं। देखिए कि पुराने और नये स्थान-निर्देशाक तो एक स्वेच्छ बिंदु-रूपातरण द्वारा संबधित हैं, परतु वेग-निर्देशाक रैखिकतया रूपातरित होते हैं और उनके गुणाक स्थान-निर्देशाकों पर निर्भर करते हैं।

तो बल के घटकों का रूपातरण गुण क्या है? नये बल-घटको को Q_k कहेंगे और (34.7) की भांति उनकी परिभाषा आभासी कर्म की निश्चरता द्वारा करेंगे, अर्थात्

(4) $$\delta W = \sum_{i=1}^{n} X_i\,\delta x_i = \sum_{k=1}^{f} Q_k\,\delta q_k.$$

अब हम आभासी से वास्तविक विस्थापनों और इनसे संगत वेगों तक चले जाते हैं। (3) के प्रभाव से समी० (4) यों हो जाता है

$$(4a)\qquad \sum_{k=1}^{f} Q_k \dot{q}_k = \sum_{i=1}^{n} X_i \sum_{k=1}^{f} a_{ik}\, \dot{q}_k.$$

$\dot{x}_i$ से असदृश, ये $\dot{q}_k$ परस्पर स्वतंत्र हैं। अतएव (4a) के दायीं तथा वायी ओर के गुणाक बराबर होंगे, जिस कारण

$$(5)\qquad Q_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} X_i\,, \quad k=1, 2, \ldots f.$$

यह रूपांतरण (3) का पक्षांतरण[1] हुआ। (3) में तो k पर योग होता है, (5) में i पर। स्पष्ट रूप से लिखें तो यह होगा—

$$\dot{x}_1 = a_{11}\dot{q}_1 + a_{12}\dot{q}_2 \ldots\ldots, \qquad Q_1 = a_{11}X_1 + a_{21}X_2 + \ldots\ldots,$$

$$\dot{x}_2 = a_{21}\dot{q}_1 + a_{22}\dot{q}_2, \ldots\ldots, \qquad Q_2 = a_{12}X_1 + a_{22}X_2 + \ldots\ldots,$$

अतएव पक्षातरण a_{ik} और a_{ki} के मिथ-परिवर्त्तन से वना है। हम कहते हैं कि बल के घटक वेग-निर्देशांकों के प्रतिपरिणम्यतया रूपांतरित (या उनके "प्रतिगमक"[2]) होते हैं।*

संवेग के घटकवृंद बल के घटकों के सदृश रूपांतरित होते हैं, अर्थात् उनके अनुपरिणम्यतया[3], क्योंकि सवेगों को उन आवेगी वलों की भाँति समझ सकते हैं जो

(*) व्यापक आपेक्षिकता के वाद में यह प्रथा है कि एक उपरिलेखन (Q^k, p^k) द्वारा Q तथा उस p (जिसकी परिभाषा अभी की जानेवाली है) जैसी राशियाँ सूचित की जायँ, जो उन $\dot{q}_k$ से प्रतिपरिणम्यतया रूपांतरित होती हों (अर्थात् जो उनके "प्रतिगमक" हों)। परंतु हमारे विचार में इस प्रथा का, जिसका व्यापक आपेक्षिकता में इतना महत्त्व है, यहाँ त्याग किया जा सकता है।

1. Transpose 2. Contragredient 3. Covariantly

आदि को विराम दशा वाले हमारे महाबिंदुओं को वांछित वेग प्रदान करते हैं। यदि नये संवेगों को p_k कहें तो वे पुराने ξ_i के पदों में निम्नलिखित संबंधों द्वारा व्यक्त किये जा सकते हैं—

$$(6) \qquad p_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}\, \xi_i.$$

ये p_k के परिभाषक समीकरण हैं। यह परिभाषा सुगम नहीं है परन्तु इसे सहज ही अधिक सार्थक रूप दिया जा सकता है। ऐसा करने के लिए गतिज ऊर्जा को, जैसे कि पृ० २५० पर, एक बार तो $\dot q$ का फलन और दूसरी बार $\dot x$ का फलन समझिए। दोनों व्यंजनों का भेद, जहाँ कहीं आवश्यक हो, हम

$$T_{\dot q} \text{ या } T_{\dot x}$$

लिखकर बतायेंगे। तो निम्नलिखित बनता है

$$(7) \qquad \frac{\partial T_{\dot x}}{\partial \dot q_k} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T_{\dot x}}{\partial \dot x_i}\left[\frac{\partial \dot x_i}{\partial \dot q_k}\right]$$

कोष्ठक इस बात को याद दिलाने के लिए है कि $\dot q_k$ के लिए अवकलन करने में हमें q_k ओं को तथा सभी $\dot q_i$ ओं को भी ($i \neq k$) स्थिर रखना पड़ेगा। समी० (3) के अनुसार कोष्ठकों के बीच का पद केवल मात्र a_{ik} है। दूसरी ओर, प्रारंभिक व्यंजन

$$T_{\dot x} = \tfrac{1}{2}\sum m_i \dot x_i^2$$

प्रकटतया प्रदान करता है

$$\frac{\partial T_{\dot x}}{\partial \dot x_i} = \xi_i.$$

तो (7) के स्थान पर हम प्राप्त करते हैं

$$(8) \qquad \frac{\partial T_{\dot q}}{\partial \dot q_k} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}\, \xi_i.$$

इसका दक्षिणाग (6) के दक्षिणाग से सर्वसम है । अतएव निम्नलिखित परिणाम होता है

(9)
$$p_k=\frac{\partial T\dot{q}}{\partial \dot{q}_k}$$

अब हम मान सकते हैं कि वाह्य वल $\dot{q}_k$ से स्वतंत्र एक विभव V से व्युत्पन्न होने योग्य हैं, और तब लाग्रांजीय $L=T-V$ का प्रवेश करा देते हैं, तो (9) को इस तरह भी लिख सकते हैं

(9a)
$$p_k=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}.$$

इस प्रकार (35.14) में पूर्वभावित p_k की परिभाषा को हमने पूर्ण व्यापकतया ठीक सिद्ध कर दिया ।

अब हम ऐसी स्थिति में हैं कि गति-समीकरणो (2) को व्यापकीकृत निर्देशांको में रूपातरित कर सकते हैं । इसके लिए उन्हें यथाक्रम विभिन्न a_{ik} $(k=1,2,\dots n)$ से गुणा कर i पर योग कर देते हैं ।

तो समी० (5) से दक्षिणाग का प्रथम पद

(10)
$$Q_k=-\frac{\partial V}{\partial q_k}$$

हो जाता है। दायी ओर के द्वितीय पद में λ_μ का गुणनखंड होगा

(11)
$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\frac{\partial F_\mu}{\partial x_i},\quad \mu=f+1,\dots n \text{ के लिए ।}$$

अब समी० (3) बतलाता है कि

(12)
$$a_{ik}=\frac{\partial x_i}{\partial q_k}.$$

समी० (3) को तुल्य रूप

$$dx_i=\Sigma a_{ik}\, dq_k$$

में लिखने से तथा q_k को छोड़कर अन्य सब q स्थिर रखने से यह प्रत्यक्ष हो जाता है अब (11) के स्थान में भी यह लिख सकते हैं

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_\mu}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} = \frac{\partial F_\mu}{\partial q_k}.$$

परंतु (34.2) के अनुसार ठीक $\mu = f+1, \ldots n$ के लिए ही F_μ ओं को, q_k ओं के निर्वाचन से, सर्वसमतः शून्य बना दिया है। अतएव q_k के लिए F_μ के आंशिक अवकलज भी शून्य हो जाते हैं। इसलिए हमारे समीकरण का दक्षिणाग (10) के रूप में लघुकृत हो जाता है। वामाग,

$$\sum_i a_{ik} \frac{d\xi_i}{dt},$$

निम्नलिखित मे रूपातरित हो जाता है

$$\frac{d}{dt}\sum_i a_{ik}\,\xi_i - \sum_i \xi_i \frac{da_{ik}}{dt} = \frac{dp_k}{dt} - \sum_i \xi_i \frac{d}{dt}\,\frac{\partial x_i}{\partial q_k}. \tag{13}$$

इसमें (6) और (12) का उपयोग किया गया है। अतिम योग इस रूप मे लिखा जा सकता है

$$\sum m_i \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_k} = \frac{\partial}{\partial q_k} \tfrac{1}{2} \sum m_i \dot{x}^2{}_i = \frac{\partial}{\partial q_k}\, T_{\dot{q}}.$$

यहाँ T का सकेताक[1] $\dot{q}$, यह स्मरण कराने के लिए है कि q_k के लिए अवकलन करने के पहले T को q, $\dot{q}$ के फलन मे परिवर्त्तित करना होगा। तब (13) का दक्षिण पार्श्व निम्नलिखित हो जायगा

$$\frac{dp_k}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_k}. \tag{13a}$$

इसे (10) के बराबर होना है, अतएव हम अंत मे प्राप्त करते हैं

$$\frac{dp_k}{dt} = \frac{\partial T}{\partial q_k} - \frac{\partial V}{\partial q_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k} \tag{14}$$

(9a) को विचार में लाते हुए देखते हैं कि यह लाग्रांज समीकरण के (34.6) वाले रूप से, या, यदि स्थितिज ऊर्जा के अस्तित्व को न मानें तो (34.8) वाले उस के रूप से, समर्वसम है।

1. Index

इसका दक्षिणांग (6) के दक्षिणांग से सर्वसम है। अतएव निम्नलिखित परिणाम होता है

(9) $$p_k = \frac{\partial T\dot{q}}{\partial \dot{q}_k}$$

अब हम मान सकते हैं कि वाह्य वल $\dot{q}_k$ से स्वतंत्र एक विभव V से व्युत्पन्न होने योग्य हैं, और तब लाग्रांजीय $L = T - V$ का प्रवेश करा देते हैं, तो (9) को इस तरह भी लिख सकते हैं

(9a) $$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}.$$

इस प्रकार (35.14) में पूर्वभावित p_k की परिभाषा को हमने पूर्ण व्यापकतया ठीक सिद्ध कर दिया।

अब हम ऐसी स्थिति में हैं कि गति-समीकरणों (2) को व्यापकीकृत निर्देशाकों में रूपातरित कर सकते हैं। इसके लिए उन्हे यथाक्रम विभिन्न a_{ik} $(k = 1, 2, \ldots n)$ से गुणा कर i पर योग कर देते हैं।
तो समी० (5) से दक्षिणाग का प्रथम पद

(10) $$Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k}$$

हो जाता है। दायी ओर के द्वितीय पद में λ_μ का गुणनखंड होगा

(11) $$\sum_{i=1}^{n} a_{ik} \frac{\partial F_\mu}{\partial x_i}, \quad \mu = f+1, \ldots n \text{ के लिए।}$$

अब समी० (3) बतलाता है कि

(12) $$a_{ik} = \frac{\partial x_i}{\partial q_k}.$$

समी० (3) को तुल्य रूप

$$dx_i = \Sigma a_{ik}\, dq_k$$

में लिखने से तथा q_k को छोड़कर अन्य सब q स्थिर रखने से यह प्रत्यक्ष हो जाता है अब (11) के स्थान मे भी यह लिख सकते है

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_\mu}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_k} = \frac{\partial F_\mu}{\partial q_k}.$$

परंतु (34.2) के अनुसार ठीक $\mu = f+1, \ldots, n$ के लिए ही F_μ ओं को, q_k ओं के निर्वाचन से, सर्वसमतः शून्य बना दिया है। अतएव q_k के लिए F_μ के आंशिक अवकलज भी शून्य हो जाते हैं। इसलिए हमारे समीकरण का दक्षिणांग (10) के रूप में लघुकृत हो जाता है। वामांग,

$$\sum_i a_{ik}\frac{d\xi_i}{dt},$$

निम्नलिखित में रूपान्तरित हो जाता है

(13) $$\frac{d}{dt}\sum_i a_{ik}\xi_i - \sum_i \xi_i \frac{da_{ik}}{dt} = \frac{dp_k}{dt} - \sum_i \xi_i \frac{d}{dt}\frac{\partial x_i}{\partial q_k}.$$

इसमें (6) और (12) का उपयोग किया गया है। अंतिम योग इस रूप में लिखा जा सकता है

$$\sum m_i \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_k} = \frac{\partial}{\partial q_k}\frac{1}{2}\sum m_i \dot{x}_i^2 = \frac{\partial}{\partial q_k} T_{\dot{q}}.$$

यहां T का सकेताक[1] $\dot{q}$, यह स्मरण कराने के लिए है कि q_k के लिए अवकलन करने के पहले T को q, $\dot{q}$ के फलन में परिवर्त्तित करना होगा। तब (13) का दक्षिण पार्श्व निम्नलिखित हो जायगा

(13a) $$\frac{dp_k}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_k}.$$

इसे (10) के बराबर होना है, अतएव हम अंत में प्राप्त करते हैं

(14) $$\frac{dp_k}{dt} = \frac{\partial T}{\partial q_k} - \frac{\partial V}{\partial q_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k}$$

(9a) को विचार मे लाते हुए देखते है कि यह लाग्रांज समीकरण के (34.6) वाले रूप से, या, यदि स्थितिज ऊर्जा के अस्तित्व को न मानें तो (34.8) वाले उस के रूप से, समर्वसम है।

1. Index

इस प्रकार हमने अपने विश्वास को दृढ़ कर लिया है कि लाग्रांज समीकरणों के व्युत्पादन के लिए हैमिल्टन सिद्धात को जानने की आवश्यकता नही है; केवल मात्र इस वात की आवश्यकता है कि तत्संवधित गत्यात्मक राशियों के रूपांतरणीय गुणधर्मों का सम्यक् अध्ययन किया जाय।

§ ३७. लघुतम क्रिया का सिद्धांत

प्रकरण ३३ की समाप्ति मे (पृ० २४९) हमने समाकल सिद्धातों के मीमांसकीय गुण का उल्लेख किया था। यह शब्द इस भाव मे व्यवहृत होता है कि "किसी उद्देश्य से बना"; "किसी विशेष अंत (परिणाम) की ओर निर्देशित"; "सभी संभव गतियों मे से प्रकृति उसीको निर्वाचित करती है जो अपने इष्ट-स्थान पर क्रिया के अल्पतम व्यय से पहुँचती है।" लघुतम क्रिया के सिद्धात की यह अभ्युक्ति किंचित् अस्पष्ट ज्ञात होती हो, परन्तु है वह पूर्णतया उस गठन से सहमत जो उसके आविष्कर्ता ने उसे दिया था।

इस सिद्धात के सूत्रीकरण में न केवल मीमासकीय वरन् आध्यात्मिक विश्वासों ने भी भाग लिया था।* मोपर्त्वी ने अपना सिद्धात इस दृढ़-कथन के साथ अनुशसित किया था कि वही विश्वस्रष्टा की बुद्धिमानी को सर्वोत्तमतया व्यक्त करता है।

* जिस अंग्रेजी शब्द का यह पर्याय माना गया है वह है teleological (टेलिओलाजिकल), Teleology दो यूनानी शब्दों से बना है: teleo या teleus, जिसका अर्थ है अंत, उद्देश्य, संपूर्ण; और logos, जिसका अर्थ है "शब्द" जिससे अंग्रेजी प्रत्यय logy ज्ञान की किसी शाखा के अर्थ में बना। टेलिओलाजी का शाब्दिक अर्थ हुआ उद्देश्य, अंत या संपूर्णता के लिए शब्द अर्थात् तर्क-वितर्क। प्रकृति में प्रत्येक बात के लिए उद्देश्य होता है, इस अर्थ में इस शब्द का व्यवहार किया जाता है।

मीमांसा शब्द मान् धातु पर टिका है, जिसका अर्थ है जिज्ञासा, अर्थात् ज्ञान चाहना या ज्ञान को खोज करना। हिंदी प्रामाणिक शब्दकोश के अनुसार मीमांसा का शाब्दिक अर्थ है—अनुमान या तर्क-वितर्क से यह सिद्ध करना कि कोई बात वास्तव में कैसी है।

अतएव Teleology के लिए "मीमांसा" शब्द उचित पर्याय है। (हिंदी अनुवादक)

कह देने योग्य बात जान पड़ती है कि हिंदुओं के तत्वज्ञान संबंधी विचारों में एक विचार-पद्धति मीमांसा है। इसके दो भाग हैं जिन्हें छै दर्शन शास्त्रों में से दो प्रदान करते हैं। पूर्व मीमांसा, या केवल मीमांसा के जन्मदाता जैमिनि कहे जाते हैं।

लाइबनिज के मन मे भी ऐसे ही विचार रहे होंगे, जैसा कि उनकी रचना थियोडिसे[1] के शीर्ष-नाम से (जिसका अर्थ है ईश्वर की न्याय्यता) विदित होता है।

मोपर्त्वी ने अपना सिद्धात १७४७ मे प्रकाशित किया था। उनसे कहा गया कि उन्हें लाइबनिज का सन् १७०७ का एक पत्र देखना चाहिए (मूल पत्र खो गया है)। परतु फिर भी उन्होंने अपनी प्राथमिकता का बडे जोश के साथ समर्थन किया, यहाँ तक कि विवाद में उन्होंने अपने पक्ष में बर्लिन अकादमी के प्रधान होने की हैसियत से भी जोर डाला। इस सिद्धात का गणित की दृष्टि से निश्चित रूप कुछ काल बाद ही यूलर और विशेष कर लाग्रांज के हाथो मिला।

लघुतम क्रिया के सिद्धात के ऊपर दिये हुए सूत्रीकरण में दो बातें स्पष्ट नही है।

१. "क्रिया" शब्द का क्या तात्पर्य है ? स्पष्ट है कि यह वही चीज नही जो हैमिल्टन के सिद्धान्त में थी, क्योकि अब ऐसे सूत्रीकरण की बात है जो, यद्यपि हैमिल्टन के सूत्रीकरण से सबधित है, फिर भी उससे भिन्न है।

२. "सभी संभव गतियाँ," इस पदसमूह का क्या मतलब है ? यह अत्यंत आवश्यक है कि तुलना के लिए जिन सब प्रकारो की गतियों पर विचार करना है, उनकी ठीक-ठीक व्याख्या कर ली जाय। तभी इन सब प्रकारों में से उस वास्तविक गति को निर्वाचित कर सकेंगे जो अधिकतम उद्देश्यपूर्ण या अनुकूल हो।

प्रथम के बारे में—लाइबनिज ने गुणनफल $2T\,dt$ को अपना क्रिया-अल्पांश[2] लिया था। जो कुछ आगे आयेगा उसमे हम भी निम्नलिखित राशि को क्रिया-समाकल कहेंगे

$$S = 2\int_{t_0}^{t_1} T dt\,. \tag{1}$$

मोपर्त्वी ने, देकार्ट की भांति, सवेग mv को यात्रिकी के लिए मौलिक समझा था। अतएव मोपर्त्वी ने $m\,v\,d\,s$ को क्रिया-अल्पाश लिया। परतु स्पष्ट होगा कि एकाकी सहति-बिंदु की स्थिति में लाइबनिज और मोपर्त्वी की परिभाषाएँ समतुल्य हैं, क्योंकि

$$2T dt = mv.\ v dt = m\,v\,d\,s. \tag{2}$$

इसमें धार्मिक अनुष्ठानों के अतिरिक्त नैतिक अर्थात् कानूनो और उपदेश के तर्क-वितर्क भी दिये गये हैं। उत्तर मीमांसा व्यास-कृत मानी जाती है और आध्यात्मिक बातों संबंधी है, अर्थात् वेदांत, वेदों का ज्ञानकाण्ड। (हिंदी अनुवादक)

1. Theodice'e, 2. Element of action

यह समता किन्ही-भी यांत्रिक निकायों को लागू होगी, बशर्ते कि क्रिया से निकाय के सभी सहति-बिंदुओं के गुणनफलों, $m_k v_k\, ds_k$ का योग समझें।

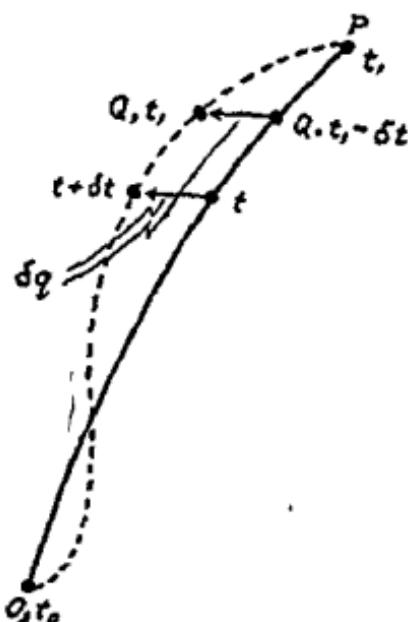
दूसरी बात के बारे में—हैमिल्टन के सिद्धान्त मे तुलना की जानेवाली सभी गतियों को हमने § ३३ के (1) और (2) प्रतिबंधों से निरोधित कर दिया था। यहाँ (2) को तो हम रहने देंगे परन्तु (1) मे तबदीली कर देंगे। अब, $\delta t=0$ के स्थान मे हम अभियाचना करेंगे कि

$$(3) \qquad \delta E=0.$$

अतएव उन्हीं प्रक्षेप-पथों की तुलना की जायगी जिनकी ऊर्जा E वही हो जो कि अनुसंधान-अधीन वास्तविक प्रक्षेप पथ की है। इस प्रतिबंध में स्वाभाविकतया यह अतर्भावित है कि प्रस्तुत सिद्धात केवल उन गतियों के लिए ही वैध है जिनमें ऊर्जा संरक्षित रहती है, अर्थात् विभवयुक्त बलों द्वारा कारित गतियाँ। यदि वास्तविक पथ की स्थितिज ऊर्जा को V कहे, तथा परिणमित पथो की स्थितिज ऊर्जा को $V+\delta V$, तो (3) के कारण हम प्राप्त करते हैं

$$(4) \quad \delta T+\delta V=0,\ \delta V=-\delta T,$$
$$\delta L=\delta T-\delta V=2\delta T$$

इन बातो मे प्रतिबंध (3) कारित परिवर्त्तन को कल्पनादृष्ट करने के लिए हम आकृति ५१ का स्मरण करते हैं। वहाँ परिणमन δq से संबधित दो बिंदु एक ही समय t के थे। यह बात अब नही रहती किंतु परिणमित बिंदु का समय अब t नही $t+\delta t$ होता है (देखिए आ० ५४)। अतएव यहाँ परिणमित पथ अंतर्बिंदु को $t=t_1$ पर नही पहुँचता, वरन् प्रस्तुत आकृति की रचना

P
t_1
Q, t_1
$Q. t_1-\delta t$
$t+\delta t$
t
δq
Q, t_0

आ० ५४—लघुतम क्रिया के सिद्धात मे "प्रक्षेप-पथ" का परिणमन। कारण कि ऊर्जा परिणमित नही होती, प्रारंभ के पथ का बिंदु q और परिणमित पथ का $q+\delta q$ भिन्न समयों t और $t+\delta t$ के होते हैं। वास्तविक पथ के अंतर्बिंदु P को परिणमित पथ का बिंदु Q अर्म्पित है।

के अनुसार, पीछे से अर्थात् t के बाद। परिणमित पथ में बिंदु Q समय $t=t_1$ पर पहुँच जाता है, परंतु प्रारंभके पथ में संगत-बिंदु द्वारा (जिसे भी Q से ही अंकित किया गया है) इससे पहले के समय $t_1-\delta t_1$ पर पहुँच जाता है।

अब § ३३ के परिकलन हम फिर से करते हैं। उस प्रकरण के समीकरण (3) और (4) वैध रहते हैं, परन्तु समी० (5) को बदलना पड़ेगा, क्योंकि जैसा वहाँ जोर दिया गया था, वह केवल $\delta t=0$ के लिए ही वैध है। (33.5) को प्रतिस्थापित करनेवाला प्रतिबंध हम निम्नलिखित का गठन करने से प्राप्त करते हैं

$$\delta \dot{x}=\frac{d(x+\delta x)}{d(t+\delta t)}-\frac{dx}{dt}. \tag{5}$$

दायीं ओर के अवकलों के भागफल को यह लिखकर रूपांतरित करिए कि

$$\frac{\dfrac{d(x+\delta x)}{dt}}{\dfrac{d(t+\delta t)}{dt}}=\frac{\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{d}{dt}\,\delta x}{1+\dfrac{d}{dt}\,\delta t} \tag{6}$$

$$=\frac{dx}{dt}+\frac{d}{dt}\,(\delta x)-\dot{x}\frac{d}{dt}(\delta t)+\dots,$$

जहाँ एक से अधिक कोटि वाली अल्पराशियों के गुणनफलों की उपेक्षा कर दी गयी है। अतएव (5) से प्राप्त करते हैं

$$\delta \dot{x}=\frac{d}{dt}(\delta x)-\dot{x}\frac{d}{dt}\,(\delta t),$$

या

$$\frac{d}{dt}\,(\delta x)=\delta \dot{x}+\dot{x}\,\frac{d}{dt}\,(\delta t). \tag{7}$$

यदि इसे (33.4) में प्रवेशित कर दे तो हम निम्नलिखित प्राप्त करते है जहाँ संकेताक स्वेच्छ है।

$$\ddot{x}_k\,\delta x_k=\frac{d}{dt}(\dot{x}_k\delta x_k)-\dot{x}_k\delta\dot{x}_k-\dot{x}_k^2\,\frac{d}{dt}\,(\delta t). \tag{8}$$

समी० (8) x ही के लिए नही y और z निर्देशांकों के लिए भी वैध है। अतएव (33.3), पहले की भाति (33.8) को पहुँचाने के बजाय, यहाँ निम्नलिखित प्रदान करता है

$$(9) \qquad \frac{d}{dt}\sum m_k\ (\dot{x}_k\delta x_k+\dot{y}_k\delta y_k+\dot{z}_k\delta z_k)$$

$$=\delta T+2T\ \frac{d}{dt}(\delta t)+\delta W.$$

यहाँ (4) का उपयोग कर

$$(9a) \qquad \delta W=-\delta V=+\delta T$$

रख देते हैं। वैसा करने से (9) का दक्षिणाग

$$(10) \qquad 2\delta T+2T\frac{d\delta t}{dt}$$

हो जाता है। अब (9) को t_0 से t_1 तक समाकलित करिए। इस प्रक्रिया में वामांग, प्रतिवंध (33.2) के कारण, शून्य हो जाता है। तो (10) के उपयोग से प्राप्त करते हैं

$$(11) \qquad 2\int_{t_0}^{t_1}\delta T dt+2\int_{t_0}^{t_1}Td\delta T=0.$$

परंतु यह निम्नलिखित के सिवा और कुछ नहीं है

$$(12) \qquad 2\delta\int_{t_0}^{t_1}Tdt=0$$

या, (1) का स्मरण करते हुए,

$$(12a) \qquad \delta S=0.$$

यह हुआ मोपर्त्वी की भावनानुसार लघुतम क्रिया के सिद्धांत का सुव्यक्त प्रमाण।

आइए (11) से (12) में सक्रमण की कुछ और संपरीक्षा करें। हैमिल्टन के सिद्धात मे दोनों सकेतनों

$$\delta\int Tdt \text{ तथा } \int\delta\, Tdt$$

का, प्रतिबंध $\delta t=0$ के कारण, परस्पर विनिमय करते हुए व्यवहार कर सकते थे। इसका उपयोग, उदाहरणतः, समी॰ (33.10) से (33.11) वाले सक्रमण में किया गया था। परंतु हमारे प्रस्तुत दृष्टिकोण से इन दोनों पदपुजों के गुणो में भेद है, जैसा कि ऊपर दिये हुए समीकरणो (11) और (12) की तुलना दिखलावेगी।

एक विशेष स्थिति लीजिए और बलो के अनधीन किसी गति पर विचार करिए। इस स्थिति मे $T=E$. अतएव (3) की सहायता से समी० (12) प्रदान करता है

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} dt=\delta (t_1-t_0)=0 \tag{13}$$

यह है **लघुतम समय का सिद्धांत** ("शीघ्रतम पहुँच" का सिद्धात) जिसे फर्माट[1] ने सूत्रीकृत किया और प्रकाश के वर्त्तन[2] पर अनुप्रयुक्त किया। प्राचीन काल मे हेरान[3] ने प्रकाश के परावर्त्तन का उसी भांति विचार किया था।

किसी एकाकी स्वतत्र संहति-विदु के लिए, $T=E$ के स्थान पर $V=$नियत रख सकते है और (12) के स्थान मे यह लिख सकते है—

$$\delta \int v dt=\delta \int ds=0. \tag{14}$$

यह है "लघुतम पथ" का सिद्धात। वह किसी स्वतंत्र संहति-विदु का प्रक्षेप पथ निर्धारित करता है, उदाहरणार्थ, किसी वक्र तल पर, या—जैसे कि व्यापक आपेक्षिकता में—कैसी भी वक्रता की बहुस्तरी मे। इस प्रकार के प्रक्षेप पथ को भूरेखा कहते हैं। इस विषय पर हम § ४० मे फिर आवेगे।

क्लेब्श[4] द्वारा अपने विख्यात क्यूनिग्जवर्ग के गतिकी सबधी विचार[5] प्रकाशित मे याकोबी[6] ने लघुतम क्रिया के सिद्धात से समय t के पूर्णतया निरसन की आवश्यकता होने को समर्थनीय और ठीक ठहराया। यह निरसन संभव है क्योकि—

$$T=E-V=\tfrac{1}{2}\sum m_k v^2_k=\tfrac{1}{2}\frac{\Sigma m_k ds^2_k}{dt^2}.$$

और इसलिए

$$dt=\left[\frac{\Sigma m_k ds^2_k}{2(E-V)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

1. Fermat 2. Refraction 3. Heron
4. Clebsch 5. Konigsburg Vorlesungen über Dynamik
6. Jacobi

तो (12) के स्थान में अब यह अभियाचना कर सकते हैं कि—

$$(15) \qquad \delta\int\left[2(E-V)\right]^{\frac{1}{2}}\left[\Sigma m_k ds^2_k\right]^{\frac{1}{2}}=0.$$

E के स्थिर होते हुए, परिणमन को यहाँ केवल निकाय के प्रक्षेप पथ के आकाशीय गुण धर्मों से मतलब है और गति भर मे समय के बीतने का कोई उल्लेख नही होता।

आइए, एक बार फिर हैमिल्टन और लघुतम क्रिया के सिद्धातों के मीमासकीय पार्श्व की ओर लौट आवें। देखिए कि "लघुतम क्रिया" किन्हीं परिस्थितियों में "दीर्घतम क्रिया" भी हो सकती है। क्योंकि δ......$=0$ वाली अभियाचना का उत्तर केवल कोई अल्पतम ही नही, वरन् व्यापकतया वास्तव मे बाह्यतमी होता है जो अल्पतम और महत्तम दोनो में से एक या दोनों ही हो सकता है। किसी गोल के तल पर भू-रेखाओं के दृष्टात से यह बात बहुत सरलता से विदित होती है। भू-रेखाएँ बृहत् वृत्तो के चाप होती हैं। कल्पना कीजिए कि आदि बिंदु O और बिंदु P दोनो एक विशिष्ट गोलार्द्ध पर स्थित हैं। तो इन दोनो को मिलाने वाला बृहत् वृत्त का चाप ही उन अन्य सब चापो से छोटा होगा जो O और P से जाते हुए, पर गोल केन्द्र से न जाते हुए, किसी भी समतल पर होंगे। परंतु वह कोटिपूरक चाप भी जो O से p को विपरीत दिशा मे, उस गोलार्द्ध को पार करते हुए जिसमें ये दो सिरे के बिंदु नही होते, जाता है, भूरेखा है और यह रेखा उन अन्य सब चापो से बड़ी है जो इस गोलार्द्ध पर होकर O और P को मिलाते हैं। इससे यह परिणाम निकला कि समाकल सिद्धातो को प्रकृति की "सोद्देश्यता" का नि-निदर्शक समझने की कोई आवश्यकता नही है; वे केवल गतिकी के नियमों मे सर्व-सामान्य एक वाह्यतमीय θ गुणधर्म के असाधारणतया प्रभावोत्पादक गणितीय सूत्रीकरण मात्र हैं।

मोपर्त्वी का दावा था कि उनका सिद्धात प्रकृति के सभी नियमों के लिए व्यापक-तया वैंध था। वर्तमान काल मे यह गुणधर्म हैमिल्टन के सिद्धात को देने की ओर हमारी प्रवृत्ति है। पृ० २४८ पर हमने उल्लेख किया था कि हेल्महोल्ज ने इस (हैमिल्टन के) सिद्धात को वैद्युतगतिकी सबधी अपने अध्ययनो के लिए आधारिक बनाया था। उस काल से हैमिल्टनीय रूप के समाकल परिणमनीय सिद्धांतो का विविधतम क्षेत्रों में उपयोग किया गया है।

इस ग्रंथमाला की द्वितीय पुस्तक में तरल दाब की धारणा को भलीभाँति समझने के लिए इस सिद्धात की सीधे ही शरण लेगे। इस प्रक्रम का एक विशेष लाभ यह होगा कि समस्या सबधी अवकल समीकरणों—इस समस्या के लिए आशिक अवकल समीकरणों—की ही नही, वरन् उन सीमा सबधी प्रतिवन्धो की भी हम प्राप्ति करेंगे जिन्हें इन समीकरणों के साधनों को सतुष्ट करना होगा। अन्यान्य समस्याओं के लिए भी, जिनमे अनवरत सहति वितरण हो, (केशिकत्त्व[1], कपायमान झिल्लियाँ, आदि) यही बात ठीक निकलती है।

बहुतेरी स्थितियों मे आवश्यक होता है कि परिणमन सबधी सिद्धात मे उपयोग करने के लिए पहले समस्या के लाग्राँजीय L की तलाश कर ली जाय। उदाहरणार्थ, ऐसी बात चुम्बकीय क्षेत्र में इलेक्ट्रान की गति के सबध मे आती है। वहाँ आरोपित बल, विभव V से नही व्युत्पन्न किया जा सकता। आपेक्षिकता सबधी बातें एक दूसरा उदाहरण प्रस्तुत करती है। यहाँ लाग्राजीय को बनाने के लिए (4.10) मे व्युत्पादित गतिज ऊर्जा के पदपुज का उपयोग नही करना होगा। उसके स्थान में पदपुंज

$$m_0 c^2 \int (1-\beta^2)^{\frac{1}{2}} dt \qquad (16)$$

के क्रिया सिद्धांत का गतिज अशदान की भाँति उपयोग करना होगा। इस पद का यूलरीय व्युत्पादन सीधे ही (3.19) के आपेक्षिकता सबधी सवेग P को, और इस लिए वेग-अधीन इलेक्ट्रान सहति के नियम को भी, पहुँचाता है।

व्यापकतया, विशेषकर यान्त्रिकी से बाहर के क्षेत्रो मे, दिये हुए अवकलन नियमों को (परिणमन सिद्धात द्वारा) पहुँचाने वाले लाग्राँजी फलन L की खोज एक दु.साध्य समस्या है जिसको हल करने के लिए कोई सार्वत्रिकतया वैध कायदे नहीं हैं। चुम्बकीय क्षेत्र मे इलेक्ट्रान वाली ऊपर कही हुई समस्या एक सरल विधि से लार्मर[2] और श्वार्शचिल्ड[3] ने हल की थी। मतलब यह कि $L=T-V$ के नमूने की भाँति का L का गतिज और स्थितिज ऊर्जा मे पृथक्करण व्यापकतया साध्य नही है।

इस पर जोर दे देना चाहिए कि (16) के समाकल मे जो राशि अंतर्गत है वह (2.17) के उचित समय के अल्पाश के सिवा और कोई नही तथा जिसे मिकोवस्की[4]

1. Capillarity 2. Larmor
3. Schwarschild 4. Minkowski

ने विशिष्ट आपेक्षिकतावाद की सरलतम निश्चर राशि की भाँति पहचान लिया था। आइन्स्टाइन[1] ने व्यापक आपेक्षिकता वाद में जगत्-रेखा के अल्पांश की भाँति उसे और भी अधिक व्यापक कर दिया। अतएव (16) के रूप में हैमिल्टन का सिद्धात स्वयमेव आपेक्षिकतावाद की निश्चरता (अपरिणम्यता) संबंधी अभियाचनाओं को संतुष्ट करता है। इस गुणधर्म में प्लांक[2]* के अनुसार "हैमिल्टन सिद्धात ने देदीप्यमानतम सफलता" प्राप्त की है।

1. Einstein 2. Planck

* देखिए Die Kultur der Gegen wart Part III, § III, 1, p.-701(B G. Teubner, Leipzig 1915), का अत्यंत शिक्षाप्रद लेख ।

सप्तम अध्याय

यांत्रिकी के अवकल परिणमन संबंधी सिद्धांत

§ ३८ गाउस कृत लघुतम नियंत्रण का सिद्धांत

गाउस केवल उत्कृष्ट गणितज्ञ ही नहीं, खगोलज्ञ तथा भूमापविद्यावेत्ता[1] भी थे और ऐसे होने के कारण संख्यात्मक परिणामों के परिकलनों से उन्हें बड़ा प्रेम था। उन्होंने ही लघुतम वर्गफलों की विधि की नींव डाली जिसका आनुक्रमिक अधिकाधिक गहराइयों के साथ विकास उन्होंने तीन विस्तृत ग्रंथों में किया। यदि, जैसा कि कभी-कभी होता था, गटिन्जन[2] विद्यापीठ में उनसे (अपनी इच्छा के विरुद्ध) व्याख्यान देने के लिए कहा जाता था तो सदैव ये लघुतम की विधि के विषय पर ही भाषण करना अधिकतम पसंद करते थे।

"यांत्रिकी का एक नवीन व्यापक मौलिक सिद्धांत" इस शीर्षक का १८२९ का उनका छोटा-सा एक गवेषण-निबंध* इस लाक्षणिक वाक्य में समाप्त होता है, "यह एक बड़ी ही उल्लेखनीय बात है कि अनिवार्य नियंत्रणों से असंगत स्वतंत्र गतियां का प्रकृति उसी प्रकार रूप-भेद कर लेती है जिस प्रकार कि अनिवार्य संबंधों से परस्पर संबंधित राशियों पर आधारित परिणामों को अनुरूपता में लाने के लिए परिकलक गणितज्ञ लघुतम वर्गफलों का उपयोग करता है।"

गाउस ने अपने नये मौलिक सिद्धांत को लघुतम नियंत्रण का सिद्धांत कहा था। नियंत्रण की माप की परिभाषा उन्होंने निम्नलिखित की थी—

निकाय का एक संहति विंदु लीजिए और उसकी संहति तथा "स्वतंत्र गति से इस विंदु के विचलन के वर्गफल" का गुणनफल निकालिए। निकाय के सब संहति-विंदुओं के लिए ऐसे गुणनफलों का योग नियंत्रण को परिभाषित करता है।

1. Geodist 2. Gottingen

* Crelle's Journal f. Math, 4, 232 (1829); werke 5, 23.

यदि संहति-विंदुओं और उनके समकोणिक निर्देशांकों का पृ० ९० की भांति अंकन करें, तो n संहति-विंदुओं वाले निकाय के नियत्रण की माप निम्नलिखित प्राप्त होती है--

$$Z = \sum_{k=1}^{3n} m_k \left(\ddot{x}_k - \frac{X_k}{m_k} \right)^2 \tag{1}$$

क्योंकि यदि आतरिक नियत्रणो की उपेक्षा कर दी जाय तो जो "स्वतंत्र गति" होगी वह निम्नलिखित देगा द्वारा मिलेगी—

$$\ddot{x}_k = \frac{X_k}{m_k}$$

अतएव (1) के कोष्टक के भीतरवाली राशि सचमुच ही "स्वतंत्रगति से होनेवाला वह विचलन" है जो k वे सहति विंदु पर नियंत्रण के कारण होता है।

उसे संहति-विभाजित "खोया हुआ बल" भी कह सकते हैं (देखिए पृ० ८३)। अतएव (1) के स्थान में हम लिख सकते हैं--

$$Z = \sum_{k=1}^{3n} \frac{1}{m_k} \left(\text{खोया बल} \right)_k^2 \tag{2}$$

देखिए कि यहाँ खोये वल और व्युत्क्रम सहतियाँ[1] उसी प्रकार आती हैं जैसे कि त्रुटियो के परिकलन मे त्रुटियाँ और भार होते हैं।

अब इस बात का निश्चय कर लेना चाहिए कि "लघुतम नियंत्रण" इस पद का क्या मतलब है। अर्थात् यह इगित कर देना चाहिए कि $\delta Z = 0$ के परिकलन मे कौन-सी राशियो को स्थिर रखेंगे और कौन-सी राशियों को परिणामित करेंगे।

निम्नलिखित को हम स्थिर रखेंगे–

क—निकाय की क्षणिक दशा, अर्थात् उसके सहतिविंदुओ में से प्रत्येक का स्थान और वेग। अतएव हमें लेना चाहिए

$$\delta x_k = 0, \quad \delta \dot{x}_k = 0. \tag{3}$$

1. Reciprocal masses

ख—वे नियत्रण जो निकाय पर लागू हों। यदि इनको पूर्णपदीय गठन $F_i(x_1, x_2 \ldots)=0$ के रूप मे ले तो परिणमन δZ मे इस गौण प्रतिवध को विचार मे लेना होगा कि—

$$(4) \qquad \sum_{k=1}^{3n} \frac{\partial F_i}{\partial x_k} \delta x_k = 0, \quad i=1,2,\ldots r,$$

जहाँ r प्रतिबधों की संख्या है, और इसलिए $3n-r=f$ निकाय की स्वतत्रता-संख्याएँ हैं। समी० (4) का t के लिए दो बार अवकलन कीजिए। यह δx, $\delta \dot{x}$ तथा $\delta \ddot{x}$ मे पदों का प्रदान करेगा। (3) के कारण इनमे से केवल $\delta \ddot{x}$ के ही रखने की आवश्यकता होगी, अर्थात्

$$(4a) \qquad \sum_{k=1}^{3n} \frac{\partial F_i}{\partial x_k} \delta \ddot{x}_k = 0$$

ग—निकाय पर आरोपित वल और, स्वभावत', संहतियाँ ; हम प्राप्त करते हैं

$$(5) \qquad \delta X_k = 0, \quad \delta m_k = 0.$$

जो राशि $\ddot{x}_k$ अब शेष रह गयी, केवल वही परिणमित की जाने वाली है।

गौण प्रतिवधों (4a) को विचार मे लेते हुए, लाग्रांज के अनिर्धारित गुणकों वाली विधि द्वारा, (1) से हम प्राप्त करते हैं—

$$(6) \qquad \delta Z = 2 \sum_{k=1}^{3n} \left\{ m_k \ddot{x}_k - X_k - \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \frac{\partial F_i}{\partial x_k} \right\} \delta \ddot{x}_k = 0.$$

इन $\delta \ddot{x}_k$ ओं के केवल $f=3n-r$ ही स्वतत्र हैं। परतु, जैसे पृ० ९१ पर, अपने λ_i ओं का इस प्रकार निर्वाचन कर सकते है कि कोष्टकों $\{\}$ के वीच के r शून्य हो जायँ, जिस कारण (6) मे केवल f पदवृ द ही रह जायँगे। इन वचे हुए f पदों के $\delta \ddot{x}_k$ अब स्वतत्र की भाँति समझे जा सकते है। परिणामवश उनके सहारा f कोष्टकों $\{\}$ के पदों को शून्य हो जाना चाहिए। अतएव हम (12.9) के रूप में प्रथम प्रकार के लाग्रांज समीकरणों को पहुँचते हैं।

स्पष्टतया यह उपपत्ति अपूर्णपदीय नियंत्रणों पर बिना किसी परिवर्तन के लागू है। इस प्रकार सचमुच ही "यान्त्रिकी के एक नवीन व्यापक मौलिक सिद्धात" की प्राप्ति हुई है, जैसा कि गाउस ने अपने निबंध के शीर्षक में दावा किया था। यह मौलिक सिद्धात दालांबेर के सिद्धात से पूर्णतया समतुल्य है। पश्चोक्त की भाँति वह एक अवकल सिद्धांत है क्योंकि उसे निकाय के भूत और भविष्य के आचार (व्यवहार) से नही, वरन् केवल उसके वर्त्तमान आचार से ही काम है। यहाँ, महत्तमों तथा अल्पतमों के निर्माण के लिए परिणमन कलन के कायदों की नही, केवल साधारण चलन कलन अर्थात् अवकलन गणित के कायदों की आवश्यकता है।

§ ३९. हर्त्ज कृत लघुतम वक्रता का सिद्धांत

ठीक-ठीक वात तो यह है कि प्रस्तुत सिद्धांत केवल गाउस के सिद्धांत की एक विशेप स्थिति है। फिर भी हर्त्ज अपने सिद्धांत को नया तो नही परंतु कम से कम पूर्णतया व्यापक अवश्य ही कह सके थे। इसका कारण यह है कि वे सभी वलो को किसी प्रस्तुत निकाय और उससे मिथ:क्रियाकारी अन्य निकायों के बीच के संबंधों द्वारा प्रतिस्थापित करने में सफल हुए थे (मिलाइए पृ० ५)। इस कारण हर्त्ज उन निकायों मे ही अपने तईं सीमावद्ध कर सके थे जो वलों के अधीन न थे। अपिच सिद्धात को वह ज्यामितीय व्याख्या देने के लिए, जिसकी तलाश थी उनको यह अनुमान करना पड़ा था कि सारी संहतियाँ एक, कहिए कि परमाणवीय उत्पत्ति की, मात्रक सहति की गुणज[1] हैं। तव गाउस के व्यंजन (38.1) का गुणनखंड m_k 1 (one) हो जाता है और X_k शून्य (अर्थात् $m_k=1$, $X_k=0$), तो परिणामवश (38.1) का निम्नलिखित हो जाता है—

$$(1) \qquad Z=\sum_{k=1}^{n} \ddot{x}_k^2$$

यहाँ योगन (सकेतन, Σ) के ऊपर के सकेताँक N से यह मतलव है कि निकाय की मात्रक सहतियो की संख्या, जिनका कि योग करना है, दिये हुए निकाय से युग्मित मिथक्रियाकारी निकायों के संगतमात्रक सहतियों की एक समुचित सख्या द्वारा अकथित प्रकार से वढ़ा दी गयी है।

1. Multiples

तो आइए

$\ddot{x}_k$ के स्थान पर $\frac{d^2x_k}{ds^2}$

लिखकर (१) का परिवर्तन कर लें। यहाँ

(2) $$ds^2 = \sum_{k=1}^{N} dx^2_k.$$

ऊर्जा के सिद्धात की विशेष गठन के कारण ऐसा करना अनुज्ञेय है। यह सिद्धांत लाग्रांज के प्रथम प्रकार के समीकरणों का, और इसलिए लघुतम नियंत्रण वाले सिद्धात का भी, परिणाम है। अपने प्रस्तुत विशिष्टीकरण के लिए ऊर्जा सिद्धात को यों लिख सकते हैं—

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{dx_k}{dt}\right)^2 = E$$

या, अधिकतर सक्षेप में,

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \text{ नियत।}$$

इस कारण, (१) का इस नियताक के वर्गफल से विभाजन प्रदान करता है यह राशि

(3) $$K = \sum_{k=1}^{N}\left(\frac{d^2x_k}{ds^2}\right)^2$$

हर्ज ds को रेखा का अल्पांश कहते हैं तथा $K^{\frac{1}{2}}$ को निकाय-रचित प्रक्षेप पथ की वक्रता और यह स्वीकार कर लेते हैं कि

(4) $$\delta K = 0$$

प्रत्येक स्वतंत्र निकाय या तो विराम दशा में रहता है या एक लघुतम वक्रता वाले पथ पर एक समान गति की अवस्था में।

व्यंजन का यह ढंग (मिलाइए, पूर्वकथित (पृ० ४) हर्त्जकृत ग्रंथ का ३०९वां प्रकरण) न्यूटन के प्रथम नियम के सूत्रीकरण का स्मरण दिलाने के लिए निर्वाचित किया गया है।

स्वीकृत (4) का गणितीय उपचार गाउस के उपचार का अनुसरण करता है और, पृ० २८६ पर (क) और (ख) में लगाये हुए परिणमन प्रतिबंधों के आधार पर बिना बलों के अधीन निकाय के लाग्रांज के प्रथम प्रकार के समीकरणों को प्रकटतया पहुँचाता है ($m_k = 1$ रखकर)।

हर्त्ज जो ds को "रेखा अल्पांश" तथा $K^{\frac{1}{2}}$ को वक्रता कहता है, उसका औचित्य क्या है? प्रकटतया इन धारणाओं की व्याख्या बहुविमितीय भाव में करनी होगी। हम तीन विमितियों में नहीं, किंतु $(x_1, x_2 \ldots x_n)$ निर्देशाकों वाले N विमितियों के युक्लिडीय आकाश में हैं। ऐसे आकाश में रेखा का अल्पांश सचमुच ही (2) द्वारा दिया जाता है। अब यह दिखलाने के लिए कि किसी प्रक्षेप पथ की वक्रता का वर्गफल बिलकुल व्यापकतया (3) द्वारा दिया जाता है, दो और तीन विमितियों की स्थितियों पर विचार-विवेचन करेंगे।

समी० (5.10) के अनुसार निर्देशाकों x_1, x_2 के आकाश[1] में, प्राप्त करते हैं

$$K = \frac{1}{\rho^2} = \left(\frac{\Delta \epsilon}{\Delta s}\right)^2 \tag{5}$$

आकृति ४ ख से, $\Delta \epsilon$ उन दो पड़ोसी स्पर्श रेखाओं के बीच का कोण है, जिनके स्पर्श बिंदुओं के बीच की पथवर्ती दूरी Δs है। इन स्पर्श-रेखाओं की दैशिक कोटिज्याएँ हैं, क्रमात्

$$\frac{dx_1}{ds}, \frac{dx_2}{ds}, \text{ और } \frac{dx_1}{ds} + \frac{d^2x_1}{ds^2}\Delta s, \ \frac{dx_2}{ds} + \frac{d^2x_2}{ds^2}\Delta s \tag{6}$$

ये दैशिक त्रिज्याएँ उन दो बिंदुओं के निर्देशांक भी हैं जो निर्देशांकों के मूल बिंदु के चारों ओर खींचे हुए मात्रक वृत्त तथा स्पर्श रेखाओं के समांतर मूल बिंदु से खींची हुई त्रिज्याओं के प्रतिच्छेद[2] से बनते हैं; इसके सिवा कोण $\Delta \epsilon$ इन दोनों प्रतिच्छेद बिंदुओं के बीच के चाप की दूरी से मापा जाता है। अतएव हम (6) के अनुसार प्राप्त करते हैं

1. Space 2. Intersection

$$\Delta\epsilon^2 \left[\left(\frac{d^2x_1}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2x_2}{ds^2}\right)^2\right]\Delta s^2;$$

और (5) से,

$$K=\left(\frac{d^2x_1}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2x_2}{ds^2}\right)^2. \tag{7}$$

तीन निदेशाकों x_1, x_2, x_3 के आकाश मे, $\Delta\epsilon$ एक बार फिर तीन विमितियों के प्रक्षेपपथों की पडोसी स्पर्श रेखाओं के बीच का कोण है। मात्रक वृत्त अब मात्रक गोले द्वारा प्रतिस्थापित होता है जिसके केन्द्र से दोनों स्पर्श रेखाओं के समांतरद्वय खीचे जाते हैं। गोले के तल से उनके प्रतिच्छेद-बिंदु $\Delta\epsilon$ को चाप के मात्रकों में निम्नलिखित मापता है—

$$\Delta\epsilon^2=\left[\left(\frac{d^2x_1}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2x_2}{ds^2}\right)+\left(\frac{d^2x_3}{ds^2}\right)\right]^2\Delta s^2.$$

इस प्रकार अब (5) से K का व्यजन प्राप्त करते हैं जिसमें तीन पद होंगे।

तो अब N विमितियों के आकाश के लिए और N पदों के समीकरण (3) के लिए व्यापकीकरण प्रकट है।

यही हमें हर्त्ज़ की यात्रिकी पर अपनी विवरणिका समाप्त करनी चाहिए। जैसा कि पृ० ५ पर कहा था, उनका विचार चित्ताकर्षक तथा प्रोत्साहक है और बडा तर्कसंगत है; परतु बलों को जटिल संबधो द्वारा प्रतिस्थापित करने के कारण, उसको सफलता नही प्राप्त हुई।

§ ४० भू-रेखाओं संबंधी विषयान्तरण

भू-रेखाओं की परिभाषा यह करते है कि वे एक स्वेच्छ अर्थात् किसी-भी वक्र तल पर बिना बलो के अधीन (अतएव घर्षण रहित) उन सहति बिंदुओं के प्रक्षेप-पथ हैं जो उस तल पर ही गतिशील होने के लिए नियंत्रित हैं। समझिए कि कण की सहति एक है और तलका समीकरण $F(x,y,z)=0$ है।

लघुतम क्रिया का सिद्धात बताता है कि ये भू-रेखाएँ सभव न्यूनतम या, अधिकतर व्यापकतया, (देखिए पृ० २८१), बाह्यतम दैर्ध्य की रेखाएँ भी हैं। ऊर्जा का अविनाशित्व लागू होने के कारण पथ पर वेग नियत रहेगा। ऊर्जा के नियताक का उपयुक्त निर्वाचन करने से वेग को एक के बराबर रख सकते हैं और इसलिए $\frac{d}{dt}$ के स्थान में $\frac{d}{ds}$ लिख सकते हैं।

यदि अपने प्रक्षेप पथों को लाग्रांज के प्रथम प्रकार के समीकरणों द्वारा वर्णित करें तो हम भू-रेखाओं की मौलिक परिभाषा प्राप्त करते हैं। सदिश तया लिखी हुई प्रस्तुत स्थिति में ये होंगे—

(1) $\dot{\mathbf{v}}=\lambda$ grad F. [grad=gradient=प्रवणता।]

यदि, जैसा कि प्रस्तुत स्थिति में होता है, v=नियत, जिस कारण $\dot{v}=0$ [मिलाइए, § ५ (३) का प्रारंभ], तो $\dot{\mathbf{v}}$ की दिशा प्रक्षेप-पथ के मुख्य अभिलंब की ओर होगी। परिणामवश (देखिए उसी स्थान पर) $\dot{\mathbf{v}}$ आश्लेषक समतल[1] में होगा। दूसरी ओर, **grad** F की दिशा F की प्रवणता (जो एक सदिश है) की तल-अभिलंब की होगी, क्योंकि तल पर होने वाले किसी स्थानांतरण (dx, dy, dz) के लिए

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz=0$$

होता है जिस कारण दिशा

$$\frac{\partial F}{\partial x}:\frac{\partial F}{\partial y}:\frac{\partial F}{\partial z}$$

सचमुच ही विस्थापन के लंबवत् है। अतएव समी० (1) में भू-रेखाओं की परिभाषा समाविष्ट है। यह समीकरण कहता है कि **किसी भू-रेखा का मुख्य अभिलंब तल-अभिलंब का संपाती है,** या तुल्यात्मकतया, **किसी भू-रेखा के आश्लेषक समतल में तल-अभिलंब होता है।**

अब हम लघुतम वक्रता सिद्धांत की शरण लेते हैं। उसके अनुसार, पड़ोसी पथों की अपेक्षा भूरेखा की वक्रता सबसे कम होती है। पड़ोसी पथों को, प्रतिबंधों (38.3) के अनुसार, उसी बिंदु से होकर जाना पड़ता है और उसकी वही स्पर्शरेखा होती है जोकि भूरेखा की है। इन सभी पड़ोसी पथों को इस भाँति प्राप्त करते हैं कि विचाराधीन स्पर्शरेखा से होते हुए सभी संभव तिरश्चीन[2] समतलों को ले जाते हैं और पृष्ठ पर उनके प्रतिच्छेद निर्धारित किये जाते हैं; जिस समतल में दिये हुए पृष्ठ का अभिलंब हो वही भूरेखा को निर्धारित करता है। हर्ट्ज़ के सिद्धांत के अनुसार इन तिरश्चीन काटों की वक्रता अभिलंब काट से अधिक या तुल्यात्मकतया, उनकी वक्रता त्रिज्या इससे कम, होती है।

1. Osculating plane 2. Skew

यह तथ्य पृष्ठों की अवकल ज्यामिति के म्यूस्नियर[1] प्रमेय से सहमत है, जो कहता है कि किसी तिर्यक् (तिरछी) काट की वक्रता-त्रिज्या उस प्रक्षेप के बराबर है जो अभिलंब काट की वक्रता-त्रिज्या तिर्यक् काट के समतल पर डालती है। इस प्रकार म्यूस्नियर-प्रमेय मे लघुतम वक्रता सिद्धात की व्यापक अतर्वस्तुके मात्रात्मक व्यजन की प्राप्ति होती है।

अव आइए अत मे अपनी भूरेखाओ पर लाग्रांज के द्वितीय प्रकार के समीकरणों का अनुप्रयोग करे। वैसा करने में हम गॉउस के १८२७ के महान् ग्रथ, "पृष्ठों के वक्रो सबधी व्यापक अनुसधान"[2] के विचारों के वातावरण मे प्रवेश करते हैं; जो चार विमितियों को बढ़ाने से, आपेक्षिकता के व्यापक वादीय विचारों का क्षेत्र बन जाता है।

लाग्रांज तो स्वेच्छ वक्रीय निर्देशांकों q का प्रवेश कराते हैं; परंतु निदेशाकों की भाँति पृष्ठ पर वक्रो के दो स्वेच्छ वर्गों का उपयोग करते हैं जो पृष्ठ पर एक "जाल" बिछा देते हैं। प्रथानुसार हम उन्हे

(2) $u=$ नियत, $v=$ नियत

कहेंगे। इन निर्देशाकों में गाउस रेखा अल्पांश ds को इस रूप में लिखते हैं—

(3) $ds^2=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2$,

"प्रथम अवकल परामितियां"[3] E,F और G को u तथा v के फलन समझना होगा। पृष्ठ पर के विंदुओं के समकोणीय निर्देशाँकों से उनका सबंध निम्न लिखित है

$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$

$$G=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$

$$F=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}$$

1. Meusnier
2. "Disquisitiones generales circa superficies curvas"
3. Differential parameters

$2dt^2$ से विभाजित रेखा अल्पांश का वर्गफल, पृष्ठ पर गतिशील हमारे (मात्रक) संहति विंदु की गतिज ऊर्जा T है। इस कारण व्यापकीकृत निर्देशाकों के लिए लाग्रांज समीकरणों को गॉसीय संकेतन में निम्नलिखित संबंध बना कर रूपातरित कर सकते हैं—

$$p_u = \frac{\partial T}{\partial \dot{u}} = E\dot{u} + F\dot{v}$$

$$2\frac{\partial T}{\partial u} = \frac{\partial E}{\partial u}\dot{u}^2 + 2\frac{\partial F}{\partial u}\dot{u}\,\dot{v} + \frac{\partial G}{\partial u}\dot{v}^2$$

यदि अंत में $\frac{d}{dt}$ के स्थान मे $\frac{d}{ds}$ रख ले तो भूरेखा का अवकल समीकरण, लाग्रांज की विधि के अनुसार, निम्नलिखित होगा—

$$(4) \qquad \frac{d}{ds}\left(E\frac{du}{ds} + F\frac{dv}{ds}\right) = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial E}{\partial u}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\frac{\partial F}{\partial u}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \frac{\partial G}{\partial u}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2\right\}$$

यह है u निर्देशाक के लिए। v निर्देशांक के लिए उसको लिखने की कोई आवश्यकता नहीं। ऊर्जा-सिद्धात के प्रभाव से (प्रस्तुत स्थिति में $\frac{ds}{dt} = 1$ वह (4) के सर्वसम होगा।

समी० (4) का व्युत्पादन, गॉस अपने ग्रंथ के प्रकरण १८ में, लघुतम पथ के सिद्धात द्वारा करते हैं। यहाँ हम केवल यही बताना चाहते थे कि गॉस की व्यापक पृष्ठ परामितियों की विधि (2), लाग्रांज की निकायों की यान्त्रिकी की विधि के समतुल्य है। दोनों विधियाँ निर्देशाकों के स्वेच्छ (मनमाने) रूपातरण के लिए अपरिणम्य हैं और केवल, क्रमात्, पृष्ठ या यान्त्रिक निकाय के आतरिक गुण-धर्मों पर निर्भर करती हैं।

अष्टम अध्याय

हैमिल्टन का सिद्धान्त

§४१ हैमिल्टन के समीकरण

लाग्रांज के समीकरणों में हमारे स्वतन्त्र परिणम्य (चर राशिवृन्द) थे q_k तथा $\dot{q}_k$ थे। हैमिल्टन के समीकरणों में, जिन्हें हम विभिन्न प्रकारों से अब व्युत्पन्न करेंगे, स्वतन्त्र परिणम्य q_k तथा p_k होंगे। पदनोस्त की परिभाषा समी० (36.9a) के अनुसार है। लाग्रांज के समीकरणों का लाक्षणिक फलन था वह "स्वतन्त्र ऊर्जा" $T-V$, जो q_k ओं और $\dot{q}_k$ ओं का फलन समझी गयी थी। हैमिल्टन के समीकरणों का लाक्षणिक फलन है संपूर्ण ऊर्जा $T+V$ जिसे q_k ओं तथा p_k ओं का फलन समझेंगे। इस फलन को "हैमिल्टनीय फलन" या केवल हैमिल्टनीय कहते हैं और उसे $H(q,p)$ द्वारा सूचित करते हैं; ठीक वैसे ही जैसे कि स्वतन्त्र ऊर्जा को लाग्रांजीय कहा था और $L(q,\dot{q})$ द्वारा सूचित किया था।

H और L में संबंध (34.16) विद्यमान है जिसे, p_k की परिभाषा का उपयोग कर, हम यों लिखेंगे—

$$H=\Sigma p_k\dot{q}_k-L. \tag{1}$$

आइए, इस सिद्धांत का आधार, §३७ के अन्तिम भाग के अनुसार तुरत ही विस्तारित कर लें। गतिज और स्थितिज अवदान L के विघटन का त्याग कर देंगे और, साथ ही, उसको t पर सुव्यक्ततया निर्भर करने देंगे। पृष्ठ २५६ के अनुसार, इस प्रकार का निर्भरत्व तभी होगा जब या तो नियन्त्रणों के समीकरणों में या निर्देशांकों के पारिभाषिक समीकरणों में समय (t) आवे। तब लाग्रांजीय को निम्नलिखित व्यापकीकृत रूप में लिखते हैं—

$$L=L(t,q,\dot{q}). \tag{1a}$$

समी० (1) को L के (सगो) H की परिभाषा रखिए,

$$H=H(t,q,p), \tag{1b}$$

यद्यपि वैसा करने से H संपूर्ण ऊर्जा का आशय खो देता है। पहले की भांति, p_k निम्नलिखित संबंध द्वारा दिये जाते हैं :

(1c) $$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$$

यदि हैमिल्टन के सिद्धात

(1d) $$\delta \int_{t_0}^{t} L dt = 0$$

को यांत्रिकी का मौलिक सिद्धांत ले लें तो लाग्रांज-समीकरणों को ठीक §३४ की भांति प्राप्त करते हैं, L का नूतन, विस्तृत आशय होते हुए भी। आगे आये हुए विवरण के लिए हम इन समीकरणों को निम्नलिखित रूप में लिखेंगे

(1e) $$\dot{p}_k = \frac{\partial L}{\partial q_k}$$

(१) हैमिल्टन समीकरणों की लाग्रांज-समीकरणों से व्युत्पत्ति

आइए हम H और L के पूर्ण अवकलों को लिख लें

(2) $$dH = \frac{\partial H}{\partial t} dt + \sum \frac{\partial H}{\partial q_k} dq_k + \sum \frac{\partial H}{\partial p_k} dp_k,$$

तथा

(2a) $$dL = \frac{\partial L}{\partial t} dt + \sum \frac{\partial L}{\partial q_k} dq_k + \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} d\dot{q}_k.$$

और, लाग्रांज समीकरणों (1e) तथा p_k की परिभाषा (1c) के द्वारा dL का रूपांतरण यों कर लें

(2b) $$dL = \frac{\partial L}{\partial t} dt + \sum \dot{p}_k dq_k + \sum p_k d\dot{q}_k$$

अब (1) का पूर्ण अवकल (2b) की सहायता से गठित कीजिए

(3) $$dH = \sum \dot{q}_k dp_k + \sum p_k d\dot{q}_k - \frac{\partial L}{\partial t} dt - \sum \dot{p}_k dq_k - \sum p_k d\dot{q}_k.$$

दायी ओर के अंतिम पद को द्वितीय पद से काट देने पर प्राप्त होता है

(3a) $$dH = -\frac{\partial L}{\partial t} dt - \sum \dot{p}_k dq_k + \sum \dot{q}_k dp_k.$$

dH का यह व्यंजन निस्सदेह समी० (2) के उसके व्यजन से सर्वसम होना चाहिए। यदि dt के गुणाकों का समीकरण करें तो मिलता है —

$$(3b) \qquad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}.$$

dq_k तथा dp_k के गुणांकों की तुलना प्रदान करती है

$$(4) \qquad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}, \; \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}.$$

देखिए कि इन संबंधों में आश्चर्यजनक सम्मिति है। ये ही "हैमिल्टन के साधारण अवकल समीकरणवृंद" या सक्षेप में, हैमिल्टन-समीकरणवृंद हैं।

प्रसंगवश, वे पहले-पहल लाग्रांज की इससे वहुत पहले प्रकाशित पुस्तक 'वैश्लेषिक यांत्रिकी'[1] में आ चुके थे (प्रकरण ५§१४)। परंतु वहाँ वे केवल अल्प दोलनों के संवंध में उपयोग के लिए व्युत्पन्न किये गये थे।

(२) हैमिल्टन-समीकरणों का हैमिल्टन-सिद्धांत से व्युत्पादन

समी० (1) के प्रकाश में हम इस सिद्धांत को इस रूप में लिखते हैं—

$$-\delta\int L dt = \delta\int\Big[\, H\,(t,q,p) - \Sigma p_k \dot{q}_k \Big]\, dt$$

$$(5) \qquad = \sum_{k=o}\int\Big(\frac{\partial H}{\partial q_k}\;\delta q_k + \frac{\partial H}{\partial p_k} dp_k - \dot{q}_k\,\delta p_k - p_k\,\delta\dot{q}_k\Big)dt = 0,$$

जहाँ कोप्ठक के बीच के अंतिम पद को आंशिक समाकलन द्वारा रूपांतरित कर सकते हैं। यों

$$(6) \qquad -\int_{t_0}^{t_1} p_k\,\delta\dot{q}_k\,dt = \int_{t_0}^{t_1} \dot{p}_k\,\delta q_k\,dt - p_k\,\delta q_k \Big|_{t_0}^{t_1}.$$

हैमिल्टन-सिद्धात में जिस प्रकार परिणमन[2] किया जाता है उसके कारण समाकलित पद शून्य हो जाता है। (5) में (6) का प्रतिस्थापन, तदुपरात δq_k तथा δp_k मे पदों का एकत्रण प्रदान करता है

1. "Mecanique Analytique" 2. Variation

$$(7) \quad \sum_k \int \left[\left(\frac{\partial H}{\partial q_k} + \dot{p}_k \right) \delta q_k + \left(\frac{\partial H}{\partial p_k} + \dot{q}_k \right) \delta p_k \right] dt = 0.$$

यदि इन δq_k ओं तथा δp_k ओं को स्वतन्त्र परिणमनों की भाँति ले सकते तो δq_k तथा δp_k के गुणनखंडों को अलग-अलग, सकेतांक k के प्रत्येक मान के लिए, शून्य रख देना ठीक होता और इस प्रकार हैमिल्टन-समीकरणवृंद (4) की प्राप्ति हो जाती। परन्तु यह अनुज्ञेय नही है, क्योंकि यद्यपि q_k और p_k का H में प्रवेश स्वतंत्र परिणम्यों की भाँति होता है, वे समी० (1c) द्वारा समय के साथ संबधित हैं। यह एक ऐसा तथ्य है जिसके कारण समी० (7) का सर्वसंमत सतुष्ट होना विचारणीय हो सकता है। परतु देखते हैं कि (q_k को नियत रखते हुए) p_k के लिए (1) का आंशिक अवकलन (7) के द्वितीय कोष्ठकों ( ) को सर्वसंमत शून्य कर देता है। तो यह परिणाम निकलते है कि प्रथम ( ) को भी शून्य हो जाना चाहिए।

हैमिल्टन-समीकरणों को द्वितीय विधि से व्युत्पन्न करने के हेतुओं में से एक यह है कि उसके बारे में अब हम एक महत्त्वपूर्ण बात कहना चाहते हैं।

हम जानते हैं कि स्वेच्छ "बिंदु रूपातरणों" के अधीन लाग्रांज समीकरणवृंद अपरिणम्य हैं, अर्थात् यदि q_k ओं को एक ऐसे नये निर्देशाकों के जुट Q_k ओं द्वारा प्रतिस्थापित कर दें, जो पूर्वोक्त से निम्नलिखित प्रकार के संबधों द्वारा सबधित हों, तो उनका रूप नही बदलता—

$$(8) \qquad Q_k = f_k(q_1, q_2 \cdots q_f)$$

तो सहागमी P_k निम्नलिखित द्वारा मिलते हैं

$$(8a) \qquad P_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_k} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{Q}_k} = \sum_i p_i \, a_{ik},$$

अर्थात् ऐसे p_i के रैखिक फलनों द्वारा जिनके गुणाक a_{ik}, ठीक वैसे ही जैसे कि (36.3) में q_k के फलन हैं।

अब हम दिखायेंगे कि निम्नलिखित और भी अधिकतर व्यापक रूपातरणों के अधीन हैमिल्टन समीकरण अपरिणम्य[1] होते हैं

1. Invariant

(9)
$$Q_k = f_k\ (q,p),$$
$$p_k = g_k\ (q,p),$$
जहाँ ये f_k और g_k चरराशियों q_k तथा p_k के जुटों के स्वेच्छ फलन हैं—परन्तु स्वेच्छ आगे दिये हुए एक निरोध के भीतर ही भीतर। एक विशेष बात यह है कि q_k ओं को p_k में रैखिक होने की आवश्यकता नहीं।

मान लीजिए कि समीकरण वृंद (9) Q,P के पदों में q,p के लिए हल किये गये हैं (निस्सदेह यह आवश्यक होगा कि समीकरणवृंद (9) ऐसे गठित किये जायें कि यह सभव हो सके) और व्यंजन $H(q,p)$ में प्रतिस्थापित कर दिये गये हैं। इस रूपांतरित हैमिल्टनीय को यदि $\bar{H}$ कहें तो प्राप्त होता है

(10)
$$H(q,p) = \bar{H}(Q,P)$$

इसके सिवा, (5) में आयी हुई राशि $\Sigma p_k \dot{q}_k$ की $\Sigma p_k \dot{Q}_k$ से तुलना कीजिए। हम सहज ही देख सकते हैं कि रूपांतरण 8, (8a) में दोनों पदपुंज बराबर होंगे। अब यह अभियाचना है कि एक योजनीय पद के अतिरिक्त, व्यापक रूपांतरण (9) में भी यह समता बनी रहे। इस योजनीय पद को q और p के एक फलन F' का, या वैकल्पिकतया q तथा Q के फलन F का पूर्ण समय अवकलज होना चाहिए।★ अतएव हम निम्नलिखित रख देते हैं

(11)
$$\sum p_k \dot{q}_k = \sum P_k \dot{Q}_k + \frac{d}{dt} F(q,Q).$$

यह F स्वेच्छ है। यही ऊपर कहा हुआ रूपांतरण (9) पर लगानेवाला निरोध है।

समीकरणों (10) और (11) के (5) में प्रतिस्थापन में अतिरिक्त पद $\frac{dF}{dt}$ समाकलन और तदनंतर परिणमन में, शून्य हो जाता है, क्योंकि सिरों (के बिंदुओं) पर δq और δQ शून्य हो जाते हैं। अतएव समी० (5) अपना पहले का रूप कायम रखता है और निम्नलिखित हो जाता है

$$\delta\int\{\bar{H}(Q,P) - \sum p_k \dot{Q}_k\}dt = 0.$$

★ यदि F' प्रारंभ में q और p के फलन की भाँति दिया हुआ हो तो निस्संदेह उसे प्रथम समी० (9) द्वारा p के लिए हल कर सकते हैं और F' में प्रतिस्थापित कर सकते हैं। इस प्रकार q तथा Q का एक नया फलन F प्राप्त करते हैं।

इसके सिवा रूपांतरणों (6) और (7) में भी कोई परिवर्तित नहीं होता। इससे परिणाम निकलता है कि नवीन परिणम्यों (चर-राशियों) में हैमिल्टन-समीकरणवृंद बंध रहते हैं। तो अब, समीकरणों (4) से पूर्ण सातत्य में हम निम्नलिखित प्राप्त करते हैं—

$$(12) \qquad \dot{P}_k = \frac{\partial \overline{H}}{\partial Q_k}, \quad \dot{Q}_k = \frac{\partial \overline{H}}{\partial p_k}.$$

निरोध (11) लगाये हुए रूपांतरण (9) को वैधिक रूपातरणवृंद या स्पर्शात्मक रूपांतरणवृंद कहते हैं।* पश्चोक्त नाम का कारण ज्यामितीय है।
$q_1, q_2, \cdots q_f$ के f विमितियों वाले आकाश में निम्नलिखित द्वारा दिये हुए एक, अतिपृष्ठ[1] का ध्यान कीजिए—

$$(13) \qquad z = z(q_1, q_2, \ldots\ldots q_f).$$

यहाँ नीचे दी हुई राशियाँ, अर्थात्

$$p_k = \frac{\partial z}{\partial q_k}$$

उक्त अतिपृष्ठ के स्पर्श-समतल का स्थान निर्धारित करती हैं और, कारण, इस समतल के निर्देशांकगण समझी जा सकती हैं। अभियाचना यह है कि बिंदु q_k के निर्देशाकों तथा समतल p_k के निर्देशाकों के बीच यह प्रतिबंध हो कि

$$(14) \qquad dz = \sum_{k=1}^{f} p_k \, dq_k.$$

★ये दो वाक्य, कैनानिकल रूपांतरण वृंद, तथा कांटैक्ट रूपांतरण वृंद पूर्णतया समानार्थक नहीं कहे जा सकते। उनमें जो भेद है वह पारिभाषिक है। इस भेद पर रुकने की आवश्यकता नहीं; केवल इतना कह देना चाहिए कि समुचित परिस्थितियों में दोनों रूपांतरण- वृंद एक–दूसरे की एक विशेष स्थिति के रूप में दिखलाये जा सकते हैं। देखिए उदाहरणार्थ Whittaker, *Analytical Dynamics* (Dover), Chapter XI; अथवा, Osgood, *Mechanics* (Macmillans), Chapter, XIV —अंग्रेजी अनुवादक

1. Hyper-surface

यह प्रतिबंध "रैखिक अल्पांशों के मिलन" का निश्चय करा देता है, अर्थात् निर्देशाकों q_k वाले किसी भी बिंदु से पड़ोसी बिंदु तक जाने मे निरतरता रहती है। अब समी० (9) द्वारा नवीन निर्देशाकों Q_k, P_k का प्रवेश कराइए और (13) का इन नये निर्देशाकों के पदो में परिकलन कीजिए। समझिए कि परिकलन का फल हुआ—

$$z=Z(Q, P).$$

अब हम यह अभियाचना करते हैं कि यह नया पदपुंज भी एक अतिपृष्ठ निरूपित करे जिसे Q द्वारा निर्धारित बिंदुओं पर निर्देशाकों P वाले निर्देशाक से स्पर्श करे। अतएव (14) से हमें प्राप्त करना होगा—

$$(15) \qquad dZ=\sum_{k=1}^{f} P_k\, dQ_k,$$

या, यदि ρ को समानुपात-गुणनखंड ले लें तो

$$(16) \qquad dZ-\sum P_k\, dQ_k=\rho(dz-\sum p_k\, dq_k).$$

अतएव, बिंदु के रूपातरण मे, किसी दिये हुए बिंदु पर पृष्ठ तथा उसके स्पर्श-समतल की स्पर्शता परिरक्षित रही है। अब प्रतिबध (16) की समी० (11) से तुलना कीजिए। (16) को dt से गुणा करने पर उसे यों लिख सकते हैं —

$$(16a) \qquad \sum p_k\, dq_k=\sum P_k\, dQ_k+dF.$$

यदि (16a) मे $dF=dz-dZ$ रख दे और (16) मे $\rho=1$, तो दोनों प्रतिबंध एक जैसे हो जाते हैं। इस प्रकार "स्पर्शात्मक रूपातरण" वाला नाम काफी ठीक ही ठहराया हुआ समझा जा सकता है।

समीकरणों (9) जैसी व्यापकता वाले रूपातरणों मे P_k ओं का संवेग के घटक-वृंद होने का तात्पर्य छिप गया है। इस कारण हम P_k, Q_k ओं को **वैधिक परिणम्य** कहना अधिक पसन्द करते है, और तब P_k, Q_k **वैधिकतया संयुग्मी**[1] कहे जाते हैं। कारण कि हैमिल्टन के समीकरण (निरोध (11) के साथ) रूपातरणों (9) मे अपरिणम्य है, उन्हे बहुधा **हैमिल्टन के वैधिक समीकरण** कहते हैं।

1. Canonically conjugate

वैधिक रूपांतरणों के अधीन इस अपरिणम्यता के कारण ही हैमिल्टन-समीकरणों के खगोलविद्या संबंधी स्थान-च्युतिसिद्धांत में विशेप गौरव है। गिब्ज़[1] की सांख्यिकीय यांत्रिकी में भी वे महत्त्वपूर्ण भाग लेते हैं। इस विषय पर विचारविवेचन इस माला की पंचम पुस्तक में होगा।

हैमिल्टन-समीकरणों की इस विवृति को हम ऊर्जा-सिद्धांत के बारे में एक बात कह कर समाप्त करेंगे।

समी० (2) से सहमत होते हुए, व्यापकतया,

$$\frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial t}+\sum_k\left(\frac{\partial H}{\partial q_k}\dot{q}_k+\frac{\partial H}{\partial p_k}\dot{p}_k\right).$$

(4) के अनुसार, कोष्ठक समी० k के लिए शून्य होता है। तो व्यापकतया हम प्राप्त करते हैं —

$$\frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial t}. \tag{17}$$

विशेप करके, यदि H सुव्यक्ततया t पर नही निर्भर करता, तो निम्नलिखित **संरक्षण (अविनाशित्व) नियम** की प्राप्ति होती है

$$\frac{dH}{dt}=0,\quad H= \text{नियत}। \tag{18}$$

यह नियम ऊर्जा के अविनाशित्व (संरक्षण) वाले नियम से अधिक व्यापक है, क्योंकि (1) तथा (1c) के अनुसार, वह कहता है कि

$$\sum\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k-L=\text{नियत}, \tag{18a}$$

जहाँ L को t पर सुव्यक्ततया निर्भर नहीं करना होगा, परतु अन्यथा वह बिलकुल कुछ-भी (अर्थात् स्वेच्छ,) हो सकता है। षष्ठ अध्याय की पादटिप्पणी, पृ० २५५ में इसी नियम का उल्लेख हुआ है। समी० (18a) से **ऊर्जा के संरक्षण (अविनाशित्व)** की प्राप्ति होती है, यदि L को दो अशदानों में विभक्त कर सके; एक तो $\dot{q}_k$ ओ के द्वितीय घात मे समाग गतिज भाग; और दूसरा इन q_k ओं से स्वतत्र स्थितिज भाग।

1. Gibbs

§ ४२. राउथ के समीकरण और चक्रीय निकाय गण

§ ३४ के समीकरणों (10) और (11) में हमने लाग्रांज के प्रथम और द्वितीय प्रकार के समीकरणों से निकले हुए एक मिश्रित प्रकार" के समीकरण पर विचार किया था। अब हम एक ऐसे मिश्रित प्रकार के समीकरण से परिचित होंगे जो लाग्रांज के द्वितीय प्रकार के और हैमिल्टन के समीकरणों के संयोग से निकलता है। इन नये प्रकार के समीकरणों का नाम राउथ* पर पड़ा, 'ट्राइपस" के लिए "गृहशिक्षक" तथा परीक्षक के रूप में जिनका सिक्का कैम्ब्रिज विद्यापीठ में यांत्रिकी की शिक्षा पर दशकों तक जमा रहा। कुछ काल उपरांत हेल्महोल्त्ज[1] ने उन्हीं समीकरणों का विकास एक-चक्रीय तथा बहुचक्रीय निकायों के अपने वाद के संबंध में किया। ऊष्मागतिकी की भौतिक समस्याओं के साधन के लिए इस वाद का उपयोग करने का उनका विचार था।

निकाय की स्वतंत्रता-संख्याओं को दो वर्गों में विभक्त कर लेते हैं। एक वर्ग, जिसमें $f-r$ स्वतंत्रता संख्याएँ होंगी, लाग्रांज के स्थान तथा वेग निर्देशांकों

$$q_1, q_2, \cdots q_{f-r}\,; \qquad \dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots \dot{q}_{f-r}$$

द्वारा निश्चित किया जाता है। दूसरा, जिसमें r स्वतंत्रता संख्याएँ होंगी, हैमिल्टन के वैधिक परिणम्यों

$$q_{f-r+1}, q_{f-r+2}, \cdots\cdots q_f\,;$$
$$p_{f-r+1}, \; p_{f-r+2}, \cdots\cdots p_f$$

के पदों में निरूपित होने को है। लाग्रांजीय L या हैमिल्टनीय H के स्थान पर अब

*इस संबंध में राउथ (Rouths) के Treatise on the Dynamics of a System of Rigid Bodies (दृढ़ पिंडों के निकाय के गोत्की संबंधी ग्रंथ) का उल्लेख कर देना चाहिए जो दो भागों में है—I. प्रारंभिक भाग, II उच्चतर भाग। Problem of unique variety of rich ness संग्रह है। राउथ ने अपने गतिकीय समीकरणों के गठन का विकास पहले पहल अपने एक पुरस्कार-निबंध, A Treatise of Stability of a Given State of Motion (किसी दी हुई गति की साम्यता संबंधी रचना) में किया था जो १८७७ में प्रकाशित हुआ था।

1. Helmholtz, Berliner Akad, (1884) तथा *Crelle's Jounal f. Math* 97

एक राउयफलन R की रचना करते हैं जिसे ऊपर गिनाये हुए $2f$ परिणम्यों का एवं, व्यापकता के लिए, समय का भी, फलन होना होगा। तो फलन होगा—

(1) $$R(t,q_1,q_2,\dots q_f;\ \dot{q}_1,\dot{q}_2,\dots \dot{q}_{f-r},\ p_{f-r+1},\dots\dots p_f)$$

R निम्नलिखित समीकरण द्वारा परिभाषित होगा—

(2) $$R=\sum_{k=f-r+1}^{f} p_k\,\dot{q}_k-L(t,q_1,\dots q_f;\ \dot{q}_1,\dots \dot{q}_f).$$

देखिए कि $r=f$ के लिए R हैमिल्टनीय (41.1) के में रूपान्तरित हो जाता है तथा, $r=0$ के लिए दक्षिण ओर का योजन[1] शून्य हो जाता है और (चिह्न को छोड़कर) R लाग्रांजीय हो जाता है। प्रकटतया, R की परिभाषा (2) को हम तुल्यात्मक प्रतिवंध

(2a) $$R=H\,(t,q_1,\dots q_f;\ p_1,\dots p_f)-\sum_{k=1}^{f-r} p_k\,\dot{q}_k$$

द्वारा प्रतिस्थापित कर सकते थे।

इसके आगे हम वैसे ही बढते हैं जैसे कि समीकरणों (41.2) से (41.4) तक। R के पूर्ण अवकल का गठन हम करते हैं, एक तो (1) से—

(3) $$dR=\frac{\partial R}{\partial t}\,dt+\sum_{k=1}^{f}\frac{\partial R}{\partial q_k}dq_k+\sum_{k=1}^{f-r}\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_k}d\dot{q}_k+\sum_{k=f-r+1}^{f}\frac{\partial R}{\partial p_k}dp_k;$$

और दूसरा (2) से,

(3a) $$dR=\sum_{k=f-r+1}^{f}\dot{q}_k\,dp_k+\sum_{k=f-r+1}^{f} p_k\,d\dot{q}_k-dL.$$

dL के लिए पदपुंज (41.2b) का उपयोग कर सकते हैं। अधिक स्पष्टता के लिए इसे हम निम्नलिखित में विघटित कर लेंगे—

1. Summation.

$$(3b)\qquad dL=\frac{\partial L}{\partial t}dt+\sum_{k=1}^{f}\dot{p}_k\,dq_k+\sum_{k=1}^{f-r}p_k\,d\dot{q}_k+\sum_{k=f-r+1}^{f}p_k\,d\dot{q}_k$$

$(3a)$ में का प्रतिस्थापन $(3b)$ के अंतिम पद को $(3a)$ के मध्यपद से कटवा देता है और निम्नलिखित रह जाता है

$$(4)\qquad dR=-\frac{\partial L}{\partial t}dt-\sum_{k=1}^{f}\dot{p}_k\,dq_k-\sum_{k=1}^{f-r}p_k\,d\dot{q}_k+\sum_{k=f-r+1}^{f}\dot{q}_k\,dp_k.$$

पद-प्रति-पद (3) से तुलना करने पर मिलता है

$$\frac{\partial R}{\partial t}=-\frac{\partial L}{\partial t}$$

तथा निम्नलिखित समीकरणों की अनुसूची—

	$k=1,2,\ldots\ldots f-r$ के लिए	$k=f-r+1,\ f-r+2,\ldots f$ के लिए
(5)	$\dot{p}_k=-\dfrac{\partial R}{\partial q_k}$	$\dot{p}_k=-\dfrac{\partial R}{\partial q_k}$
	$p_k=-\dfrac{\partial R}{\partial \dot{q}_k}$	$\dot{q}_k=-\dfrac{\partial R}{\partial p_k}$

बायी ओर के $f-r$ समीकरण लाग्रांज प्रकार के हैं, जहाँ $L=-R$; एवं दायी ओर के r समीकरण हैमिल्टनीय प्रकार के हैं, जिनमे $H=R$.

इन समीकरणों के सूत्रीकरण के समय राउथ का विचार उनका चक्रीय निकायो के सबंध में अनुप्रयोग करने का था। यह अनुप्रयोग यों चलता है—मान लेते हैं कि द्वितीय वर्ग के निर्देशाक चक्रीय हैं, जिस कारण पृ० २६६ से वे लाग्रांजीयो मे नहीं आते; इस स्थिति मे वे राउथ-फलन में भी नही होते। तब सहागमित p_k निश्चर (नियत) रहते हैं (राउथ के समीकरणों (5) के दक्षिणी वर्ग के ऊपर वाले समीकरण से, अथवा, जैसा कि पृ० २६६ पर कहा था, लाग्रांज के समीकरणों से)। तो p_k ओं के इन निश्चर मानों को तथा समी० $(41.1c)$ की सहायता से, समी० (2) के समागत (व्यापकतया स्वेच्छ) $\dot{q}_k$ के मानों को भी प्रतिस्थापित कर सकते हैं। इस प्रकार एक राउथ-फलन प्राप्त होता है, जो प्रथम वर्ग के q_k तथा $\dot{q}_k$ के केवल $f-r$ निर्दे-

शाकों पर ही निर्भर रहता है। इन निर्देशांकों के लिए ऊपर दिये हुए समी० (5) का वाम वर्ग वैध है। अतएव इस प्रकार प्रस्तुत समस्या को लाग्रांज-प्रकार के $f-r$ समीकरणों में लघूकृत कर लिया है।

राउथ ने अपनी विधि का उपयोग मुख्यतया दी हुई गति की दशाओं की स्थायित्व संबंधी कठिन समस्या में किया था। इसके स्थान में हम इस विधि को एक यथोचित सरल उदाहरण, स-समिति-लट्टू के दृष्टांत द्वारा निर्दर्शित करेंगे। इस द्विगुणित चक्रीय समस्या के चक्रीय निर्देशाकवृंद यूलरीय कोणद्वय ϕ और ψ हैं। समीकरणों (35.15) से (35.17) के अनुसार,

$$\begin{aligned} p\phi\dot\phi+p\psi\dot\psi= \\ M''\left(\frac{M''}{I_3}-\cos\theta\,\frac{M'-M''\cos\theta}{I_1\sin^2\theta}\right) \\ +M'\frac{M'-M''\cos\theta}{I_1\sin^2\theta} \\ =\frac{M''^2}{I_3}+\frac{(M'-M''\cos\theta)^2}{I_1\sin^2\theta}. \end{aligned}$$

तो, (35.13) के प्रभाव से राउथ-फलन निम्नलिखित हो जाता है

$$R=\frac{M''^2}{I_3}+\frac{(M'-M''\cos\theta)^2}{I_1\sin^2\theta}-\frac{I_1}{2}\dot\theta^2-\frac{(M'-M''\cos\theta)^2}{2I_1\sin^2\theta}$$

$$-\frac{M''^2}{2I_3}+P\cos\theta$$

$$=-\frac{I_1}{2}\dot\theta^2+\Theta(\theta),\ \Theta=\frac{M''^2}{2I_3}+\frac{(M'-M''\cos\theta)^2}{2I_1\sin^2\theta}+P\cos\theta.$$

तो, $q_k=\theta$ के साथ, ऊपर दी हुई अनुसूची (5) के वाये वर्ग का निचला समीकरण प्रदान करता है—

$$p_k=I_1\dot\theta,$$

और उसी वर्ग का ऊपर वाला समीकरण देता है—

$$I_1\ddot\theta=-\frac{\partial\Theta}{\partial\theta} \qquad (6)$$

जो स्वाभाविकतया "व्यापकीकृत कोल्टा समीकरण" (35.19) से सहमत है। यह दृष्टांत राउथ-विधि की उपयोगिता निर्दशित कर सकेगा। विशेषतया प्रस्तुत किये हुए दृष्टांत से अधिकतर कठिन उदाहरणों में।

सन् १८९१ में बोल्टज़मान[1] ने म्यूनिख विद्यापीठ मे मैक्सवेल[2] के वैद्युत-चुम्बकीय वाद पर कई व्याख्यान लगातार दिये जिनमे के प्रारंभिक व्याख्यानों को दो वैद्युत-परिपथों के बीच अन्योन्य प्रेरणीय प्रभाव का निदर्शन करने के लिए उन्होंने एक द्विगुणित चक्रीय यांत्रिक निकाय का सविस्तर विचार करने मे समर्पित किया था। निदर्शनार्थ एक विशेषतया तैयार की हुई यंत्र-रचना थी जिसमे मुख्यतया अपकेन्द्र नियंत्रकों से युक्त, भिन्न दिशाओं मे घूमनेवाले, कोर मारे हुए दंतुर पहियों के दो जोड़े थे। सावधानता पूर्वक बनाया हुआ यह प्रतिमान हमारे इंस्टीट्यूट[3] के संग्रहालय (अजायब-घर) मे परिरक्षित है। हम लोगों को यह सब स्वयं मैक्सवल के वाद (थ्यूरी) से, जिसको उन्हें निर्दशित करना था, कहीं अधिक पेचीला ज्ञात हुआ था। अतएव हम इस वाद (थ्यूरी) के स्पष्टीकरण के लिए उसका उपयोग न करेंगे, किंतु इसके स्थान पर अनिवार्य मुख्यावयवों मे उससे बहुत कुछ मिलते-जुलते, मोटरगाड़ी के डिफरेंशियल[4] संबंधी एक अनुशीलन का समस्या *VI*. 5 मे लाभ उठायेंगे।

अब आइए अंतत उस गणितीय अनुष्ठान का, जिसने हमे लाग्रांज-समीकरणों से हैमिल्टन और राउथ के समीकरणों तक पहुँचाया, हम दो परिणम्यों (या परिणम्यो के दो जुटों) x और y के एक फलन Z पर विचार करते है और समझ लेते है कि—

$$dZ(x,y) = Xdx + Ydy. \tag{7}$$

यदि x,y को स्वतंत्र परिणम्यों की भांति X,Y द्वारा प्रतिस्थापित करना चाहे तो Z के स्थान पर निम्नलिखित "रूपभेद किये हुए फलन" पर विचार करते है—

$$U(X, Y) = xX + yY - Z(x,y) \tag{8}$$

वास्तव मे (7) के विचार से (8) का अवकलन तुरत ही देता है

$$dU(X,Y) = xdX + ydY \tag{9}$$

समीकरणद्वय (7) और (9) निम्नलिखित "पारस्परिकता संबंधो" के सर्वसम है—

1. Boltzamann 2. Maxwell
3. Institute, संस्थान 4. Differential, एक वैषम्यकारक योक्त्र (दंतुर पहिया)

(10)
$$\frac{\partial Z}{\partial x}=X, \quad \frac{\partial Z}{\partial y}=Y,$$
$$\frac{\partial U}{\partial X}=x, \quad \frac{\partial U}{\partial Y}=y.$$

यदि, दूसरी ओर, प्रारंभ के परिणम्यों में से केवल एक को ही, कहिए कि y को, उसके "वैधिकतया संयुग्मी" Y द्वारा प्रतिस्थापित करना चाहें तो (8) का निम्नलिखित में "रूपभेद" करना होगा—

(11)
$$V(x,Y)=yY-Z,$$

जो प्रदान करता है

(12)
$$dV(x,Y)=-Xdx+ydY,$$

और, साथ ही, निम्नलिखित "पारस्परिकता संबंधगण" भी

(13)
$$\frac{\partial V}{\partial x}=-X, \frac{\partial V}{\partial Y}=y.$$

Z से U के रूपांतरण की तुलना लाग्रांज से हैमिल्टन को रूपांतरण से की जा सकती है और Z से V के रूपांतरण की लाग्रांज से राउथ को रूपांतरण से।

इस प्रकार का स्वतंत्र परिणम्यों का परिवर्तन और लाक्षणिक फलन का आनुषंगिक रूप-भेद लाग्रांज रूपांतरण कहलाता है और वैश्लेषिक गणित में विस्तृत भाग लेता है। यहाँ पर उसका उल्लेख मुख्यतया इसलिए किया गया है कि आगे चलकर (पंचम ग्रंथ में) ऊष्मागतिकी के अपने अध्ययन में उससे काम लेना होगा।

§ ४३. अपूर्णपदीय वेग-परामितियों के अवकल समीकरणवृंद

अब तक जिन अवकल समीकरणों पर विचार किया गया है वे सब व्यापकीकृत निर्देशांकों संबंधी लाग्रांज-समीकरणों के नमूने के थे, परन्तु नचाने के लट्टू के वाद (थ्यूरी) ने हमारा संपर्क बिलकुल भिन्न प्रकार के, बहुत सरलतर गठन के, समीकरणों से कराया, अर्थात्, कोणीय वेगों ω_1, ω_2 और ω_3 के ऑयलर-समीकरणों (26.4) से। तो आइए निर्धारित करें कि लाग्रांज-समीकरणों से उनका क्या संबंध है। दोनो प्रकारों का भेद इस तथ्य से निकलता है कि $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ पूर्णपदीय निर्देशांकगण नहीं हैं जैसे कि $\dot{\theta}, \dot{\psi}, \dot{\phi}$ हैं, किंतु इनके रैखिक फलन हैं जो समय (t) के लिए समाकलनीय नहीं। उनके बीच का संबंध समी० (35.11) देता है। तो तुरत ही असंमित लट्टू पर विचार करिए जिसकी गतिज ऊर्जा है—

(१) $$T=\frac{1}{2}(I_1\omega^2{}_1+I_2\omega^2{}_2+I_3\omega^2{}_3);$$

और, संक्षिप्तता के लिए, बिना बलों के अधीन लट्टू की स्थिति पर ही विचार कीजिए।

निम्नलिखित ϕ-निर्देशांक के लिए हम लाग्रांज-समीकरण से प्रारंभ करते हैं—

(२) $$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}}-\frac{\partial T}{\partial \phi}=0.$$

समी० (35.11) के अनुसार,

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial \dot{\phi}}=\frac{\partial \omega_2}{\partial \dot{\phi}}=0, \quad \frac{\partial \omega_3}{\partial \dot{\phi}}=1,$$

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial \phi}=\omega_2, \frac{\partial \omega_2}{\partial \phi}=-\omega_1, \frac{\partial \omega_3}{\partial \phi}=0.$$

अतएव, (1) के विचार से,

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}}=I_1\omega_1\frac{\partial \omega_1}{\partial \dot{\phi}}+I_2\omega_2\frac{\partial \omega_2}{\partial \dot{\phi}}+I_3\omega_3\frac{\partial \omega_3}{\partial \dot{\phi}}=I_3\omega_3,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \phi}=I_1\omega_1\frac{\partial \omega_1}{\partial \phi}+I_2\omega_2\frac{\partial \omega_3}{\partial \phi}+I_3\omega_3\frac{\partial \omega_3}{\partial \phi}=(I_1-I_2)\,\omega_1\omega_2.$$

तो अब (2) से प्राप्त करते हैं

(3) $$I_3\frac{d\omega_3}{dt}=(I_1-I_2)\omega_1\omega_2.$$

यह तृतीय यूलर समीकरण (26.4) है।

ऐसा ही परिकलन θ-निर्देशांक के लिए प्रदान करता है—

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial \dot{\theta}}=\cos\phi, \frac{\partial \omega_2}{\partial \dot{\theta}}=-\sin\phi, \frac{\partial \omega_3}{\partial \dot{\theta}}=0$$

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial \theta}=\dot{\psi}\cos\theta\sin\phi, \quad \frac{\partial \omega_2}{\partial \theta}=\dot{\psi}\cos\theta\cos\phi,$$

$$\frac{\partial \omega_3}{\partial \theta}=-\dot{\psi}\sin\theta.$$

समी० (1) से हम प्राप्त करते हैं—

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}=I_1\omega_1\cos\phi-I_2\omega_2\sin\phi,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta}=(I_1\omega_1 \sin \phi+I_2\omega_2 \cos \phi)\dot{\psi} \cos \theta - I_3\omega_3 \dot{\psi} \sin \theta.$$

अतएव लाग्रांज समीकरण

(4) $$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}-\frac{\partial T}{\partial \theta}=0$$

निम्नलिखित हो जाता है—

$$0=I_1\frac{d\omega_1}{dt} \cos \phi - T_1 \frac{d\omega_2}{dt} \sin \phi$$

(5) $$-I_1 \omega_1 \sin \phi (\dot{\phi}+\dot{\psi} \cos \theta)$$

$$-I_2 \omega_2 \cos \phi (\dot{\phi}+\dot{\psi} \cos \theta)$$

$$+I_3 \omega_3 \dot{\psi} \sin \theta.$$

परंतु, (35.11) के अनुसार,

$$\dot{\phi}+\dot{\psi} \cos \theta=\omega_3, \dot{\psi} \sin \theta=\omega_1 \sin \phi+\omega_2 \cos \phi,$$

जिस कारण (5) के अंतिम तीन पदों के स्थान पर लिख सकते हैं—

$$(I_3-I_1) \omega_3 \omega_1 \sin \phi-(I_2-I_3) \omega_2 \omega_3 \cos \phi;$$

और, प्रथम दो पदों को इनसे जोड़कर, प्राप्त करते हैं,

(6) $$0=\left\{ I_1 \frac{d\omega_1}{dt}-(I_2-I_3) \omega_2 \omega_3 \right\} \cos \phi$$

$$-\left\{ I_2\frac{d\omega_2}{dt}-(I_3-I_1) \omega_3 \omega_1 \right\} \sin \phi.$$

अंत में, लाग्रांज-समीकरण,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}-\frac{\partial T}{\partial \theta}=0,$$

परिणम्यों के उपयुक्त रूपांतरण के बाद और (3) के विचार से, निम्नलिखित हो जाता है—

(7)
$$O=\left\{I_1\frac{d\omega_1}{dt}-(I_2-I_3)\ \omega_2\ \omega_3\right\}\sin\phi$$
$$-\left\{I_2\frac{d\omega_2}{dt}-(I_3-I_1)\ \omega_3\ \omega_1\right\}\cos\phi$$

(6) और (7) से परिणाम निकलना है कि दोनों {} को अवश्यमेव शून्य हो जाना चाहिए, जिस कारण हम प्रथम और द्वितीय यूलर समीकरण (26 4) प्राप्त करते हैं।

एक विशिष्ट दृष्टांत के लिए जो रूपांतरण किया है, वह बिलकुल व्यापकतया उस स्थिति के लिए भी किया जा सकता है, जब स्वेच्छ संख्या की अपूर्णपदीय वेग-परामितियाँ हों जो वास्तविक वेग-निर्देशांकों के रैखिक (या अधिकतर) व्यापक फलनों द्वारा निश्चित हों।★ यदि, जैसे कि दृढ पिंड के लिए, इन परामितियों में व्यक्त की गयी गतिज ऊर्जा एक विशेषतया सरल रूप धारण करे, तो गति समीकरणों के समाकलन के लिए इस प्रकार के रूपांतरण अपूर्वतया बहुमूल्य हो सकते हैं। वे इसलिए भी उपयोगी हो सकते हैं कि वे अपूर्णपदीय प्रतिबंधों को भी संतुष्ट कर सकते हैं। बोल्ट्ज़मान[1] ने अपूर्णपदीय वेगों के संगत घूर्णों के घटकों को गैसों के गत्यात्मक सिद्धांत में प्रवेश कराना आवश्यक समझा था। इन घटकों को उन्होंने "घूर्णाभ" नाम दिया था।

§ ४४. हैमिल्टन-याकोबी समीकरण

पिछली शताब्दी के प्रारंभ में सैद्धांतिक भौतिकी का सर्वाधिक महत्त्व का प्रश्न था, "प्रकाश का तरंगात्मक वाद किंवा कणात्मक[2] वाद ?" तरंगात्मक वाद की नींव हाइगिंस[3] ने डाली थी और, उल्लिखित काल में टामस यंग[4] के व्यतिकरण संबंधी दृग्विषय के आविष्कार ने उसका पुष्टीकरण किया। दूसरी ओर, कणात्मक वाद को न्यूटन का समर्थन प्राप्त था जो देखने में उस समय आधिकारिक ही प्रतीत होता था। उसी समय हैमिल्टन,[5] खगोलज्ञ तथा गणित के परम विवेचक, आलोक यंत्रों में प्रकाश-

★. मिलाइए, विशेषकर, G. Hamel, *Math, Ann*, 59, (1904) तथा *Sitzungsber. der Berl. Math. Ges.* 37, (1938. और भी देखिए, *Encykl. d. Math. Wiss.* IV. 2. Art. Prange No. 3. and ff.

1. Boltzmann 2. Corpuscular theory 3. Huygens
4. Thomas Young 5. W.R. Hamilton

किरणों के पथों के अध्ययन मे निरत थे। इन अध्ययनों के परिणाम १८२७ में प्रकाशित होने लगे।* लगभग उसी समय तरंगात्मक आलोकिकी[1] के दो प्रधानतम प्रतिपादकों फ्राउनहॉफर[2] और फ्रेनल[3] की मृत्यु प्रायः एक जैसी ही अल्पआयु में हुई। हैमिल्टन का व्यापक गतिकी संबंधी कार्य कुछ बाद में हुआ, परंतु किरण-आलोकिकी[4] पर उनके अनुसंधानों से उसका अंतरग सबध है।‡ प्रस्तुत प्रकरण में इसी गतिकी सबधी कार्य के फलों का छोटा-सा संक्षेपण दिया जायगा।

आइए, अवान्तर रूप से, यह भी कह दें कि प्लाक द्वारा क्रिया के मौलिक क्वाटम के आविष्कार के बाद अब उपर्युक्त प्रश्न भिन्नतया रखा जाना चाहिए। अब यह नहीं पूछते कि "तरग या कण?"; वरन् कहते है कि "तरंग एवं कण!" प्रथम दृष्टि में तो, प्रतीयमान परस्पर-विरोधी इन दो भावनाओं में सामञ्जस्य स्थापित कराना असभव जान पड़ता है। वास्तव मे वे आलोकिकी एव गतिकी दोनों के ही परस्पर-विरोधी नहीं, वरन् पूरक पार्श्व हैं। जैसा कि श्राडिंगर ने स्वीकार किया है, हैमिल्टन के विचारों के तर्कसगत विस्तरण से उनके तथाकथित विरोध का शमन हो जाता है और वह हमें **तरंगात्मक** किंवा **क्वांटमात्मक** यान्त्रिकी तक पहुँचा देता है।

किरण-आलोकिकी प्रकाश-कणों की यान्त्रिकी है। आलोकीयतया विषमांग माध्यमों में इन कणों के पथ सर्वदा ऋजु-रेखीय ही कदापि नहीं होते, वरन् हैमिल्टन के साधारण अवकल समीकरणों द्वारा निर्धारित किये जाते हैं, या हैमिल्टन के सिद्धात द्वारा; और यह सिद्धात उन समीकरणों के समतुल्य ही है। दूसरी ओर, तरगात्मक आलोकिकी के दृष्टिकोण से, प्रकाश-किरणें तरग-पृष्ठों या तरंगाग्रों की परंपरा के लंबकोणिक

* Treatises on ray optics, (किरण-आलोकिकी संबंधी रचनाएँ), *Trans Roy. Irish Acad*. 1827; तथा 1830 और 1832, के शेष पूरक। गतिविज्ञान संबंधी उनकी कृति (work) 1834 तथा 1835 के *Trans. Roy, Soc. London*, में प्रकाशित हुई।

1. Wave optics 1. Fraunhofer
3. Fresnel 4. Ray optics

‡ याकोबी कृत इस विषय के सूत्रीकरण में यह संबंध खो गया है। 1891 में F. Klein, (क्लाइन) ने उसका फिर से उद्धार किया (देखिए *Naturforscher-Ges*. in Halle; *Ges*, *Abbandlt*. Vol. II pp. 601, 603).

प्रक्षेप पदों द्वारा दी जाती है।+ हार्मिज सिद्धातानुसार ये तरगाग्रगण समातर पृष्ठ वृंद होते है। हैमिल्टन ने इस तरग-पृष्ठ-परिवार को एक (वाध्यतया आंशिक) अवकल समीकरण द्वारा निरूपण करने का तथा इस विधि का वहुविमितीय आकाश में किसी-भी यांत्रिक निकाय के q_k ओं को विस्तरण करने का भार उठाया। जैसा कि हम देखेंगे, तरंग-पृष्ठों का परिवार S=नियत द्वारा दिया जाता है, जहाँ S समी० (37·1) का लघुतम क्रिया-फलन है। इन पृष्ठों के लवकोणिक प्रक्षेपपथवृंद निम्नलिखित समीकरण द्वारा निर्धारित किये जाते हैं—

(1) $$p_k=\frac{\partial S}{\partial q_k}$$

अब इसका अनुप्रयोग अविनाशी अर्थात् सरक्षित एवं क्षयशील निकायों के लिए करेंगे।

(१) संरक्षित निकायवृंद

पहले ऐसा निकाय लेते हैं जिसमे ऊर्जा संरक्षित है और एक गतिज अश T तथा एक स्थितिज अंश V में विघटित की जा सकती है। अतएव T, V और H, इनमे का कोई भी t पर सुव्यक्ततया नही निर्भर करता।

आरंभ हम समी० (37·9) से करते हैं और उसके दक्षिणांग के δw को

$$-\delta V=\delta(T-E)=\delta T-\delta E$$

द्वारा प्रतिस्थापित कर लेते हैं। तो (37.9) का दक्षिणांग निम्नलिखित हो जाता है—

(2) $$2\delta T+2T\frac{d}{dt}\delta T-\delta E.$$

तदुपरांत उस समीकरण के वामांग को व्यापकीकृत निर्देशांकों p, q मे रूपातरित कर लेते हैं। यों—

(3) $$\frac{d}{dt}\sum p_k\delta q_k.$$

तो (3) और (2) का समीरकरण प्रदान करता है

+यह आलोकीयतया समदिक् माध्यमों के लिए ही ठीक है। मणिभों अर्थात् क्रिस्टलों जैसे विषमदिक् माध्यमों में किरण और तरंगाग्र के बीच की लंब कोणिकता साधारण युक्लिदीय नहीं रहती वरन् अन युक्लिदीय, (generalised tensor orthogonality) व्यापकीकृत टेन्सर लंब कोणिकता होती है।

$$(4) \qquad 2\delta T+2T\frac{d}{dt}\delta T-\delta E=\frac{d}{dt}\sum P_k\delta q_k.$$

समी० (4) का सीमाओं o और t के बीच t के लिए हम कलित कर लेते हैं, तो प्राप्त करते हैं

$$(5) \qquad \delta S-t\delta E=\sum p\delta q-\sum p_o\delta q_o,$$

जहाँ S तो समी० (37·1) द्वारा निश्चित है और p_o तथा δq_o समाकलन की नीचे वाली सीमा t=o के लिए हैं, p तथा δq ऊपर की सीमा t के लिए।

समी० (5) इंगित करता है कि क्रिया-समाकल S को आदि-स्थान q_o अंतस्थान q तथा ऊर्जा E का फलन समझना चाहिए, अर्थात् हमें समय t के स्थान में स्वेच्छया अभ्यर्पित पूर्ण ऊर्जा E का परिणम्य (चर राशि) की भाँति उपयोग करना पड़ेगा।

$$(6) \qquad S=S\,(q, q_o, E).$$

तो, (5) के अनुसार, समय के फलन की भाँति गति यों दी जायगी

$$(7) \qquad t=\frac{\partial S}{\partial E},$$

जहाँ q और q_o स्थिर रखे जाते हैं। यदि इसके स्थान में E स्थिर रखी जाय और q किवाँ q_o का परिणमन करें, तो (5) प्रदान करता है—

$$(8) \qquad p=\frac{\partial S}{\partial q}, \quad p_o=-\frac{\partial S}{\partial q_o}.$$

इनमें का प्रथम संबंध ऊपर दी हुई अभ्युक्ति, समी० (6) से, सहमत है। रहा दूसरा, उसे शीघ्र ही एक अधिकतर सुभीते के गठन में रूपांतरित कर देंगे।

मानना पड़ेगा कि जब तक S गठन (6) के रूप में न ज्ञात हो- तब तक गति का कुछ बहुत ज्ञान नहीं होता। परंतु ऊर्जा-समीकरण

$$H(q,p)=E$$

का स्मरण कीजिए। इसमें समी० (8) से p का मान प्रतिस्थापित कीजिए। तो प्राप्त होता है—

$$(9) \qquad H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right)=E.$$

समी० (9) को लाक्षणिक फलन S के निर्धारक समीकरण की भाँति समझते हैं।

ल्टन-याकोबी समीकरण कहते हैं। T यदि p के द्वितीय घात में समाग हो (V को p से स्वतंत्र मान सकते हैं) तो वह द्वितीय घात और प्रथम कोटि का होगा।

मान लीजिए कि हमने इस समीकरण का **पूर्ण समाकल** प्राप्त कर लिया है, अर्थात् ऐसा साधन जिसमें अभ्यर्पणीय नियतांकों की संख्या समस्या की स्वतंत्रता-संख्याओं की संख्या के बराबर है। इन नियतांकों को

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_f$$

कहिए। कारण कि S समी० (9) में नहीं आता, उसे (9) के द्वारा केवल एक योगनीय (सकाली) नियतांक[1] तक ही निर्धारित कर सकते हैं। अतएव ऊपर दिये हुए समाकलन में का एक, कहिए कि α_1, फाजिल है और उसके स्थान पर एक ऐसा योगात्मक नियतांक[1] रख सकते हैं जो अनभ्यर्पित[2] रहता है। तो α_1 को अपनी ऊर्जा-परामिति E द्वारा प्रतिस्थापित कर सकते हैं, जिस कारण पूर्ण समाकल यों लिखा जा सकता है—

$$S = S(q, E, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_f) + \text{नियतांक} \tag{10}$$

ऐसे संपूर्ण साधन की प्राप्ति के लिए जो चिरसम्मत विधि है वह **परिणम्यों के पृथक्करण** की विधि है। वह ऐसी विधि है जो बहुधा, परंतु सर्वदा नहीं, अनुप्रयोजनीय है। इस विधि की चर्चा हम § ४६ में करेंगे। § ४५ में हम दिखावेंगे कि समी० (10) निकाय की गति का ज्ञान कैसे कराता है।

(२) क्षयशील निकाय

अब हम यह व्यापक दृष्टिकोण लेंगे कि लाग्रांजीय L और इसलिए हैमिल्टनीय H भी t पर निर्भर करते हैं। इस स्थिति में, व्यापकतया, L और H को T तथा V में विघटित करना असम्भव होता है। यदि किसी विशेष स्थिति में कुछ स्थितिज ऊर्जा V हुई भी, तो उसे समय पर निर्भर करना पड़ता है। यह स्थिति खगोल विद्या की तथा क्वांटमयांत्रिकी की स्थान-च्युति समस्या[3] के लिए महत्त्वपूर्ण है। उस स्थिति में कोई ऊर्जा सिद्धांत नहीं रहता और इसलिए कोई पूर्ण ऊर्जा नियतांक p भी नहीं होता। परिणाम यह होता है कि हम लघुतम-क्रिया-सिद्धांत का उपयोग नहीं कर सकते और हमें हैमिल्टन-सिद्धांत की शरण लेनी पड़ती है। अतः हैमिल्टन सिद्धांत में आये हुए समाकल द्वारा प्रदत्त एक लाक्षणिक फलन S^* को निश्चित करना होता है। यों—

1. Additive constant 2. Unassigned 3. Perturbation Problems

$$(11) \qquad S^* = \int_{t_0}^{t} L dt,$$

और S^* को आदि तथा अंत के स्थानों तथा यात्रा-काल t के फलन की भांति समझना होता है, अर्थात्

$$(12) \qquad S^* = S^* \ (q, q_0, t).$$

इसकी समी० (6) से तुलना करनी है जिसमें (प्रस्तुत स्थिति में अनुपस्थित) निश्चर पूर्ण ऊर्जा E ने t का स्थान लिया था।

तो आइए पहले (11) के द्वारा $\frac{dS^*}{dt}$ का गठन करें—

$$(13) \qquad \frac{dS^*}{dt} = L,$$

तदुपरात (12) की सहायता से, प्राप्त होता है—

$$(14) \qquad \frac{dS^*}{dt} = \sum \frac{\partial S^*}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial S^*}{\partial t} = \sum p_k \dot{q}_k + \frac{\partial S^*}{\partial t}.$$

निम्नलिखित संबंध (15) जो (8) का समधर्मी है और जिसका यहाँ उपयोग हुआ है,

$$(15) \qquad p_k = \frac{\partial S^*}{\partial q_k}$$

सहज में ही सत्यापित[1] किया जा सकता है। केवल मात्र (11) का q_k के लिए अवकल निकालिए और समी० (41,1 e) का स्मरण कीजिए।

तो अब (41-1) वाली H की व्यापक परिभाषा के विचार से, (13) और (14) की तुलना प्रदान करती है—

$$(16) \qquad \frac{\partial S^*}{\partial t} + H = O.$$

अतएव समी० (15) से हम प्राप्त करते हैं

$$(17) \qquad \frac{\partial S^*}{\partial t} + H\left(q, \frac{\partial S^*}{\partial q}, t \right) = O.$$

1. Verified.

यह है **व्यापक रूप में हैमिल्टन-याकोबी समीकरण।** इसमें हमारा पहले का समीकरण (9) एक विशेष स्थिति की भांति सम्मिलित है। इस बात को सिद्ध करने के लिए मान लीजिए कि, पृ० ३१४ के (1) की भांति, H स्वतन्त्र है t से। तो (17) से निकलता है कि t में S^* रैखिक है। अतएव हम रख लेते हैं कि

$$S^*=at+b$$

और (16) से ज्ञात होता है कि $-a=H$, अर्थात् ऊर्जा नियतांक E के बराबर जो अब विद्यमान है। b हमारे पुराने लाक्षणिक फलन S के सर्वसम सिद्ध होता है। इस प्रकार प्रस्तुत स्थिति मे (17) का केवलमात्र विशेष रूप (9) ही रह जाता है।

पिछले उपप्रकरण (1), पृ० ३१४, मे जो कुछ (9) के समाकलन के बारे मे कहा था, वह अधिकतर व्यापक समी० (17) को भी उतना ही लागू है। इसके पूर्ण समाकल मे अब $f+1$ नियताक होते हैं, जिनमे का एक फिर योगनीय होगा तो (10) के स्थान मे अब हम लिख सकते हैं

(18) $$S^*=S^*\ (q,\ t,\ \alpha_1, \alpha_2,\ldots\alpha_f)+\text{नियतांक}।$$

§४५ हैमिल्टन-याकोबी समीकरण के समाकलन के लिए याकोबी का नियम

समीकरणों (44·8) के संबंध मे हमने कहा था कि इनमे के दूसरे का समाकलन तत्क्षणात् नही किया जा सकता। इसका कारण यह है कि हमने अपने आंशिक अवकल समीकरणों का समाकलन (44·6) के रूप मे नही, किन्तु क्रमात्, (44·10) और (44·18) के रूपों मे किया था। समी० (44·7) मे

(1) $$t=\frac{\partial S}{\partial E}\ .$$

दूसरी ओर, हमने एक ऐसा समीकरण प्राप्त किया था, जो सीधे ही सीधे, **समय में** गति का वर्णन करता था। अब यह सिद्ध करेंगे कि यदि S का E के लिए नही, उसके स्थान पर, समाकलनाकों, $\alpha_2, \alpha_3,\ldots\alpha_f$, के लिए अवकलन करें तो निम्नलिखित समीकरणों की प्राप्ति होती है—

(2) $$\beta_k=\frac{\partial S}{\partial \alpha_k}\ , \qquad k=2, 3,\ldots\ldots f.$$

ये समीकरण निकाय के पथ की ज्यामितीय रूप-रचना बताते हैं, **बशर्ते कि β_k को समाकलनांकों का एक दूसरा जुट समझें।** यह है याकोबी का नियम पिछले प्रकरण की

स्थिति (१) के लिए। स्थिति (२) में तो वह और भी सरल निम्नलिखित रूप धारण कर लेता है—

$$(3) \qquad \beta_k = \frac{\partial S^*}{\partial \alpha_k}, \; k=1, 2 \ldots, f.$$

यहाँ एक-जैसी रचना के ये f समीकरणवृंद हैं जो निकाय की गति को कालात्मक एवं स्थानात्मक दोनों मार्ग देते हैं।

ऐसी ही सरलता का स्थिति (१) में भी हम प्रवेश करा सकते हैं यदि औपचारिकतया लिख लें कि—

$$(3a) \qquad \beta_1 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_1} \;,$$

जहाँ हमने $t=\beta_1$ और $E=\alpha$ रख लिया है।

केवल स्थिति (१) के लिए ही इसे सिद्ध करेंगे। स्पर्शात्मक रूपांतरण की परिभाषा (41-11) का स्मरण कीजिए। आगे कही जानेवाली बातों के लिए इसे यों लिख लेंगे—

$$(4) \qquad dF(q, Q) = \sum p_k dq_k - \sum P_k dQ_k$$

इसकी तुलना लाक्षणिक फलन (44.10) के (निम्नलिखित) पूर्ण अवकल से कीजिए—

$$dS(q, E, \alpha) = \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial S}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial S}{\partial E} \delta E + \sum_{k=2}^{f} \frac{\partial S}{\partial \alpha_k} d\alpha_k \;,$$

जो (44.8) और (2) से प्रतिस्थापन करने के बाद, इस प्रकरण का (3a) हो जाता है,

$$(5) \qquad dS(q, \alpha) = \sum_{k=1}^{f} p_k dq_k + \sum_{k=1}^{f} \beta_k \, d\alpha_k$$

यह समीकरण समी० (4) से सहमत है यदि

(6) F को S के, Q_k को α_k के, P_k को $-\beta_k$ के

सर्वसम समझ लें। अब हम जानते हैं कि प्रतिबंध (4) सतुष्ट करते हुए, एक रूपांतरण $q_k p_k \rightarrow Q_k, P_k$ द्वारा हैमिल्टन समीकरणवृंद (41.4)

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}, \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k},$$

से समीकरणों (41.12)

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial Q_k}, \dot{Q}_k = \frac{\partial \bar{H}}{\partial P_k}$$

को जा पहुँचते हैं। प्रस्तुत स्थिति में, (6) के विचार से, ये निम्नलिखित हो जाते हैं--

$$(7) \qquad -\dot{\beta}_k = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial \alpha_k}, \dot{\alpha}_k = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial \beta_k}.$$

परंतु (41.10) से

$$\bar{H}(Q,P) = H(q,p),$$

या, (6) के प्रभाव से,

$$\bar{H}(\alpha - \beta) = E = \alpha_1.$$

तो परिणाम निकलता है कि

$$(9) \qquad \frac{\partial \bar{H}}{\partial \alpha_k} = \begin{cases} 1 \text{ for } k=1, \\ 0 \text{ for } k>1; \end{cases} \frac{\partial \bar{H}}{\partial \beta_k} = \begin{cases} 0 \text{ for } k=1, \\ 0 \text{ for } k>1. \end{cases}$$

इस प्रकार समीकरण (7) निम्नलिखित हो जाते हैं--

$$(10) \qquad \dot{\beta}_k = \begin{cases} 1 \text{ for } k=1, \\ 0 \text{ for } k>0; \end{cases} \dot{\alpha}_k = \begin{cases} 0 \text{ for } k=1, \\ 0 \text{ for } k>0. \end{cases}$$

ये समीकरण α_k ओं के बारे में कोई नयी बात नही बताते, ये केवल इसी बात की पुष्टि कर देते हैं कि ये समाकलनाक हैं। यही बात β_1 के समीकरण के बारे मे भी कही जा सकती है। $\dot{\beta}_1 = 1$ से एक महत्त्वहीन योजनीय नियताक के भीतर ही भीतर केवल $\beta_1 = t$ प्राप्त करते है, जो समी० (3a) को विचार मे रखते हुए, कोई नयी बात नही है। दूसरी ओर, β_k ($k>1$) के लिए समीकरण वृंद (10), याकोबी के नियम का प्रमाण प्रस्तुत करते हैं; वे कहते है कि α_k ओं की भाँति β_k भी समाकलन हैं।

यही उपपत्ति, बिना किन्ही महत्त्वपूर्ण परिवर्तनो के, स्थिति (2) के लिए लागू की जा सकती है, बशर्ते कि स्पर्शात्मक रूपातरण की परिभाषा को कुछ अधिक व्यापक कर ले। परंतु इस फल की यहाँ आगे कोई आवश्यकता न पड़ेगी, अतएव उसके कारण हम यह यहाँ और न रुकेंगे।

§ ४६ केपलर समस्या की चिरसम्मत तथा क्वांटम-सैद्धांतिक विवृति

इस प्रकरण में हम दिखाना चाहते हैं कि किस भांति समाकलन की हैमिल्टन-याकोबी विधि बिना किसी दुविधा के सीधे-सीधे खगोल विद्या की ग्रहीय समस्या के समाधान पर पहुँचा देती है। इसके अतिरिक्त हमें यह देख कर आश्चर्य होगा कि परमाणवीय भौतिकी की आवश्यकता के लिए यह विधि (मानों) जानबूझकर बनवायी गयी है और स्वाभाविक रूप से हमें (पुराने) क्वांटमवाद तक पहुँचा देती है।

विषय का आरंभ हम स्थिर M सूर्य वाले द्वि-पिंड की समस्या के निम्नलिखित ध्रुवी निर्देशांकों में व्यक्त लाग्रांजीय से करते हैं—

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\right) + G\frac{mM}{r}. \tag{1}$$

इससे हम घूर्णों का परिकलन करते हैं कि

$$p_r = m\dot{r},\ p_\phi = mr^2\dot{\phi}. \tag{1a}$$

इनका (1) में परिस्थापन तथा स्थितिज ऊर्जा में चिह्न का परिवर्तन निम्नलिखित हैमिल्टनीय प्रदान करते हैं—

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{1}{r^2}\ p^2_\phi\right) - G\frac{mM}{r}, \tag{1b}$$

और, (44.9) से, हैमिल्टन-याकोबी समीकरण मिलता है—

$$\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2 = 2m\left(E + G\frac{mM}{r}\right). \tag{2}$$

आइए, इस उदाहरण में "परिणम्यों के पृथक्करण" वाली विधि का अनुप्रयोग करें जिसका उल्लेख पृ० ३१५ पर किया था।

अवकल समीकरण (2) को हल करने के लिए निम्नलिखित गठन के साधन से यत्न करते हैं—

$$S = R + \Phi \tag{3}$$

इसमें R केवल r पर और Φ केवल ϕ पर निर्भर करते हैं। यदि (2) के दक्षिणांग को व्यापक फलन $f(r,\phi)$ द्वारा प्रतिस्थापित करें तो हम प्राप्त करते हैं—

$$\left(\frac{dR}{dr}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{d\Phi}{d\phi}\right)^2 = f(r,\phi). \tag{3a}$$

सामान्यतया, ऐसा संबध होता नही। परंतु यदि f ϕ से स्वतंत्र हो, जैसा कि प्रस्तुत

स्थिति में होता है, तो $\frac{d\phi}{dt}$ को किसी नियतांक, कहिए कि C, के बराबर रख देते हैं, (इस C को "पृथक्करण नियतांक" कहते हैं)। तब R निम्नलिखित समीकरण से निर्धारित होता है—

$$\left(\frac{dR}{dr}\right)^2 = f(r) - \frac{C^2}{r^2}, \tag{4}$$

जो क्षेत्रकलन[1] द्वारा निर्धारित किया जाता है जिससे एक पूर्ण समाकल मिलता है। यह अनुमान कि f ϕ से स्वतंत्र प्रकटतया इस तथ्य के तुल्य है कि प्रस्तुत स्थिति में ϕ चक्रीय है, अर्थात् वह अवकल समीकरण में सुस्पष्टतया नहीं होता। तो देखते हैं कि परिणम्यों के पृथक्करण की विधि दिये हुए अवकल समीकरण के समिति संबंधी विशेष गुणधर्मों पर निर्भर करती है, समितीय गुणधर्म जो बहुधा, यद्यपि सर्वदा नहीं, पाये जाते हैं।

अब हम § ४५ के व्यापक रूप पर चलते हैं, C को α_2 के बराबर रख देते हैं और (२) का पृथक्करण यों करते हैं—

$$\frac{\partial S}{\partial \phi} = \alpha_2, \tag{5}$$

तथा

$$\frac{\partial S}{\partial r} = \left[2m\left(E + G\frac{mM}{r}\right) - \frac{\alpha_2^2}{r^2}\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{6}$$

समी० (5) कोणीय संवेग के संरक्षण (अविनाशित्व) का नियम है, अर्थात् केप्लर का द्वितीय नियम पृथक्करण नियतांक, α_2, निश्चर कोणीय संवेग है, जो समी० (6.2) में प्रयुक्त क्षेत्रफलीय वेगांक से सारतः सर्वसम है। समी० (6) परिणम्य त्रिज्या संवेग[2] देता है।

लाक्षणिक फलन S के परिकलन के लिए, हम (5) तथा (6) का समाकल कर (3) का गठन करते हैं। E के स्थान पर α_1 रखकर हम प्राप्त करते हैं—

$$S = \int_{r_0}^{r} \left[2m\left(\alpha_1 + G\frac{mM}{r}\right) - \frac{\alpha_2^2}{r^2}\right]^{\frac{1}{2}} dr + \alpha_2\phi + \text{नियतांक}। \tag{7}$$

1. Quadrature 2. Radial momentum

समाकलन की निचली सीमा स्वेच्छतया कुछ भी निर्वाचित की जा सकती है क्योंकि वह केवल योगनीय नियतांक के परिमाण पर ही प्रभाव डालती है।

इस समय हम ज्यामितीय प्रक्षेप पथ अर्थात् केप्लर के प्रथम नियम पर ही ध्यान देंगे। वैसा ही करने के लिए हम (45.2) का अनुसरण करते हैं और निम्नलिखित गठित करते हैं—

$$(8) \qquad \beta_2=\frac{\partial S}{\partial \alpha_2}=-\alpha_2\int_{r_0}^{r_1}\left[2m+\left(\alpha_1+G\frac{mM}{r}\right)-\frac{\alpha_2^2}{r^2}\right]^{-\frac{1}{2}}\frac{dr}{r^2}+\phi.$$

प्रत्यक्षतः, सुविधाजनक होगा कि समाकलन-परिणम्य के लिए r के बदले $S=\frac{1}{r}$ का प्रवेश कराया जाय और (8) को फिर से यों लिखा जाय—.

$$\beta_2-\phi=\alpha_2\int_{s_0}^{s}\left[2m\left(\alpha_1+GmMs\right)-\alpha_2^2S^2\right]^{-\frac{1}{2}}ds$$

$$(9) \qquad =\int_{s_0}^{s}\frac{ds}{\left[\left(s-s_{min}\right)\left(s_{max}-s\right)\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

यहाँ S_{min} and S_{max} $\left[S_{\text{अल्पतम}}\ S_{\text{महत्तम}}\right]$ सूर्य से अपभानु[1] तथा अभिभानु[2] तक की दूरियों के व्युत्क्रम[3] हैं। दोनों समाकलों की तुलना प्रदान करती है—

$$(10) \qquad s_{min}\, s_{max}=-\frac{2m\alpha_1}{\alpha_2^2}$$

$$s_{min}+s_{max}=\frac{2Gm^2M}{\alpha_2^2}$$

अब हम (9) को सुविधाजनक त्रिकोणमितीय रूप में प्राप्त करना चाहते हैं। इसके लिए निम्नलिखित रूपांतरण सूझ पड़ता है—

$$(11) \qquad s=\frac{s_{min}+s_{max}}{2}+\frac{s_{max}-s_{min}}{2}u.$$

1. Aphelion 2. Perihelion 3. Reciprocals

यह $s=s_{max}$ को $u=+1$ में और $s=s_{min}$ को $u=-1$ में ले जाता है। तो (9) से हम प्राप्त करते हैं—

$$(12) \qquad \beta_2-\phi=\int_{u_0}^{u}\frac{du}{(1-u^2)^{\frac{1}{2}}}$$

और, समाकल की अभ्यर्पणीय निम्न सीमा को 1 के बराबर करने पर प्राप्त होता है

$$(13) \qquad \phi-\beta_2=\cos^{-1}u,\quad u=\cos(\phi-\beta_2).$$

अंत में (11) के मार्ग से u से s को लौट आते हैं और इस बात का ध्यान करते हैं कि आकृति ७ के अनुसार—

$$s_{min}=\frac{1}{a(1+\epsilon)},\quad s_{max}=\frac{1}{a(1-\epsilon)};$$

और इसलिए,

$$s=\frac{1}{a(1-\epsilon^2)}+\frac{\epsilon}{a(1-\epsilon^2)}u\,.$$

तो अब (13) से दीर्घवृत्त का समीकरण निम्नलिखित परिचित रूप में प्राप्त करते हैं

$$(14) \qquad s=\frac{1}{r}=\frac{1+\epsilon\cos(\phi-\beta_2)}{a(1-\epsilon^2)},$$

जहाँ निश्चर β_2 को ϕ की परिभाषा के भीतर रख सकते हैं।

प्रायोगिक हेतुओं के कारण खगोलज्ञ की जिज्ञासा प्रक्षेपपथ के ज्यामितीय रूप म उतनी अधिक नहीं होती जितनी कि समय के फलन के रूप में गति में। यहाँ फिर हैमिल्टन-याकोवी विधि सर्वाधिक सुव्यवस्थित रूप में उत्तर प्रदान करती है, अर्थात् समी० (45.1) के द्वारा कि,—

$$t=\frac{\partial S}{\partial E}=\frac{\partial S}{\partial \alpha_1}\,.$$

इसमें परिणम्य s के प्रतिस्थापन से हम प्राप्त करते हैं—

$$(15) \qquad t=-\frac{m}{\alpha_2}\int_{s_0}^{s}\frac{ds}{S^2[(s-s_{min})(s_{max}-s)]^{\frac{1}{2}}}$$

इस समीकरण से § ६ में दी हुई अपनी पुरानी विवृत्ति पूरी कर देते हैं। वहाँ समय के फलन की भाँति ग्रह का स्थान अनिर्धारित ही छोड़ दिया गया था। समस्या १.१६ की "उत्केंद्र अनमली" को एक नया समाकलन परिणम्य मानकर (उसके संकेतन u तथा समी० (11) के सहायक u में गड़बड़ी न करनी चाहिए), उसकी सहायता से

समी० (15) सादे ही समाकलन द्वारा हल किया जा सकता है और सीधे ही सीधे निम्नलिखित सुविख्यात केप्लर समीकरण की प्रगति करा देता है—

$$nt = u - \epsilon \sin u,$$

जिसका उल्लेख उपर्युक्त समस्या मे किया गया है।

यह भलीभाँति विदित है कि आधुनिक परमाणवीय भौतिकी में भी द्वि- तथा बहु-पिंड समस्याएँ मुख्य भाग लेती हैं। हाइड्रोजन परमाणु में इलेक्ट्रान नाभिक, प्रोटान, के चारों ओर वैसे ही परिक्रमण करता है जैसे कि ग्रह के चारों ओर। यहाँ भी हैमिल्टन-याकोबी विधि आश्चर्यजनक मान की सिद्ध हुई है। वह अक्षरशः उस स्थान को बता देती है जहाँ **क्वांटम-संख्या** को प्रवेश कराना चाहिए।

पुराने क्वांटम वाद में, जब कभी भी स्वतत्रता-संख्याओ की k वी अन्यों से पृथक् की जा सकती थी तब k वीं स्वतत्रता-संख्या का एक कला-समाकल निश्चित किया जाता था (जिसे "क्रिया परिणम्य" भी कहते थे) और जो यो दिया जाता था कि—

$$J_k = \int p_k dq_k. \tag{16}$$

यह समाकल q_k के मानों के सारे अधिक्षेत्र के लिए किया जाता था। तब अभियाचना यह होती थी कि J_k प्लाक के मौलिक क्रिया-क्वाटम का पूर्ण-संख्यक गुणज[1] होवे (देखिए पृ० २४४), अर्थात्,

$$J_k = n_k h, \tag{16a}$$

जहाँ h उपर्युक्त प्लांक का मौलिक क्रिया-क्वांटम है जिसे प्लाक (प्लाक नियतांक) कहते हैं। (16) के p_k को लाक्षणिक फलन S के पदों में व्यक्त कर हम प्राप्त करते हैं—

$$\int \frac{\partial S}{\partial q_k} dq_k = \Delta S_k = n_k h. \tag{17}$$

ΔS_k फलन S का k वाँ "आवर्तत्त्व मापाक" है, अर्थात् q_k के अपने मानो के पूरे चक्र मे जाने में होने वाला S में परिवर्त्तन है।

हाइड्रोजन परमाणु के इलेक्ट्रान के निर्देशाक $q_1 = \phi$ तथा $q_2 = r$ होते हैं। S का अवकल समीकरण (2) और उसका साधन (7) सीधे ही सीधे खगोल विज्ञान से परमाणवीय भौतिकी को स्थानातरित किये जा सकते हैं, बशर्ते कि गुरुत्वाकर्षीय स्थितिज ऊर्जा को कूलम[2] ऊर्जा, $\frac{e^2}{r}$, द्वारा प्रतिस्थापित कर लें।

1. Integral multiple 2. Coulomb

कारण कि, निर्देशांक ϕ का अभिक्षेत्र 0 से 2π तक विस्तरित होता है, अतएव (7) और (17) से प्राप्त करते हैं—

$$\Delta S_{\phi} = 2\pi \alpha_{2} = n_{\phi} h. \tag{18}$$

यह n_{ϕ} दिगंशी क्वांटम संख्या है, α_{2}, जैसा कि हम जानते हैं, दिगंशी[1] संवेग-घूर्ण p_{ϕ} के सवंसम है।

निर्देशांक r के मानों के अभिक्षेत्र का विस्तरण है अल्पतम r (r_{min}) से लेकर महत्तम r (r_{max}) तक और वहाँ से फिर वापस। अतएव समीकरण (7) और (17) से हमें मिलता है—

$$\Delta S_{r} = 2\int_{r_{min}}^{r_{max}} \left[2m\left(E - \frac{\epsilon^2}{r}\right) - \frac{n^2_{\phi} h^2}{4\pi^2 r^2}\right]^{\frac{1}{2}} dr = n_r h. \tag{19}$$

यह n_r त्रिज्य क्वांटम-संख्या है। क्षेत्रफलन की सर्वोत्तम रीति r के समतल में समिश्र समाकलन करना होगा। ऐसा करने पर (19) निम्नलिखित हो जाता है

$$-n_{\phi} h + 2\pi i \frac{m\epsilon^2}{(2mE)^{\frac{1}{2}}} = n_r h. \tag{20}$$

अतएव, हाइड्रोजन इलेक्ट्रन की ऊर्जा, क्वांटम दशा $n_r + n_p$ में, निम्नलिखित होगी,

$$E = -\frac{2\pi^2 m \epsilon^4}{h^2 n^2}. \tag{21}$$

यह ऋणात्मक इसलिए है कि इलेक्ट्रान-प्रोटान के बीच की अनंत दूरी के लिए ऊर्जा को शून्य माना था (देखिए स्थितिज ऊर्जा के उपर्युक्त व्यंजन)।

समीकरण (21) तथा "क्वांटम-छलांगों में ही ऊर्जा-विकिरण" वाली बोर की परिकल्पना, इन दोनों ने ही हाइड्रोजन वर्णक्रम (तथोक्त बामर[2] माला) के पहले-पहल अववोधन पर पहुँचाया और वहाँ से व्यापक रूप में हम वर्णक्रम रेखाओं के आधुनिक वाद तक पहुँच सके।

परमाणुवाद में हुए आधुनिक विकास यहाँ प्रस्तुत की गयी इलेक्ट्रान-कक्षाओं के वर्णन से बहुत आगे चले गये हैं। जैसा कि § ४४ के प्रारंभ में उल्लेख किया गया था, हैमिल्टन की विचार-रेखा के बाद होने वाले अनुसंधानों के परिणाम स्वरूप परमाणवीय प्रक्रियाओं की ओर भी अधिक गम्भीर तरंग-यान्त्रिकीय भावनाओं का प्रादुर्भाव हुआ है।

1. Azimuthal 2. Balmer series

१४ अप्रत्यास्थ टक्कर, इलेक्ट्रान की परमाणु से—एक m संहति तथा v वेग वाला इलेक्ट्रान आदि में विराम दशा के M संहति के एक परमाणु से केंद्रीयतया टक्कर खाता है। परमाणु क्षुब्ध हो जाता है और अपनी भौम दशा से ऊर्जा तक E मात्रकों द्वारा ऊपर उठा दिया जाता है। तो इलेक्ट्रान का अल्पतम वेग v_0 क्या होना चाहिए ?

इलेक्ट्रान तथा परमाणु के अंतिम वेगों, क्रमात् v तथा V, के लिए एक एक वर्गात्मक समीकरण प्राप्त होगा। अल्पतम मान v_0 इस मांग से निकलता है कि v तथा V के व्यंजकों में आयी हुई करणी[1] वास्तविक हों। यदि केवल ऊर्जा के संरक्षण का सिद्धान्त लागू होता तो जिस वेग की प्रत्याशा की जाती उससे v_0 का मान कुछ अधिक होगा, यद्यपि दोनों का अन्तर प्रेक्षणीय न होगा क्योंकि अनुपात $\frac{M}{m}$ $(\geqslant 2000)$ बहुत बड़ा है।

यदि टक्कर लगाने वाले कण की संहति उतनी ही या लगभग उतनी ही बड़ी हो जितनी कि टक्कर खाये हुए कण की, तो जिस अल्पतम ऊर्जा की आवश्यकता होती है वह केवल ऊर्जा-संरक्षण-सिद्धानानुसार प्रत्याशित ऊर्जा से प्राय दूनी होती है।

१.५. राकेट, चंद्रमा को—अनवरत इग्जास्ट[2] दागनों के साथ एक राकेट (हवाई बान) ऊर्ध्वाधर ऊपर को दागा जाता है। समझिए कि राकेट की अपेक्षा में रेचन-वेग a है तथा प्रति सेकंड निष्कासित संहति $\mu = -\dot{m}$ है और मान लीजिए कि दोनों ही समय से नियत (समय के विचार से एक जैसे) रहते हैं। यह भी मान लीजिए कि गति नियत उपेक्षणीय घर्षण के कारण गुरुत्वाकर्षी त्वरण g में होती है। तो गति समीकरण का गठन कीजिए और यह मान कर कि राकेट का आदि-वेग पृथिवी पृष्ठ पर शून्य है, समीकरण का समाकलन कीजिए। यदि μ=आदि की संहति m_0 का $\frac{1}{100}$ वाँ भाग और a=2000 मीटर-सेकंड$^{-1}$ हो तो t= 10, 30, 50 सेकंड में राकेट किस ऊँचाई पर पहुँचता है ?

1. Radical

*केवल हाइड्रोजन परमाणु के लिए ही M/m इससे छोटे, 1847 के बराबर है, हाइड्रोजन से निकटतम संहति वाले परमाणु हीलियम के लिए यह अनुपात कोई 4×1847 के बराबर होगा।

2. Exhaust—रेचक, शून्यकारक

समस्याएँ

प्रथम अध्याय संबंधी

१·१. प्रत्यास्थ टक्कर★—एक ऋजुरेखा में n संख्यक एक-समान संहतियाँ M परस्पर छूती हुई, रखी हैं। दो अन्य M संहतियाँ, वेग v से चलती हुई, बायीं ओर से उन संहतियों की पक्ति से टकराती हैं। प्रकटतया यदि बायी ओर से आयी हुई दो संहतियाँ दायी ओर की दो संहतियों को अपने वेग हस्तांतरित कर दें तो संवेग तथा ऊर्जा नियम संतुष्ट रहते है। दिखलाइए कि यदि दाहिनी ओर से केवल एक सहति ही निकल जाय, या यदि अंतिम दो संहतियाँ विभिन्न वेगों v_1, v_2, से चल निकलें, तो इन नियमों का पालन नही हो सकता।

१.२. प्रत्यास्थ टक्कर-असमान संहतियों में—अब दायी ओर की अंतिम संहति m शेप अन्य संहतियों से कम (संहति, m) रखिए। इस बार वेग v_0 से चलती हुई एक ही संहति M फिर बायी ओर से टकराती है। ऊर्जा और संवेग के सिद्धातो से दिखलाइए कि यह असंभव है कि केवल एक ही संहति m गति में हो जाय। यदि मान लिया जाय कि केवल दो संहतियाँ गतिशील की जाती हैं तो उनके वेग क्या होंगे ?

१.३. प्रत्यास्थ टक्कर-असमान संहतियाँ—दाहिनी ओर की अंतिम संहति M' को शेप अन्यों से बड़ी लीजिए। वे ही सब अनुमान फिर कीजिए जो प्रश्न २ में किये थे। परतु देखिए कि अब दायी ओर की अतिम-से-पिछली संहति अपना संवेग बायी ओर हस्तांतरित करती है। तो M' का वेग तथा पक्ति की बायी ओर की प्रथम संहति क्या होंगे ? यदि M' बहुत ही बड़ा हो तो क्या होता है ?

★—यह अत्यावश्यक है कि प्रश्नावली १·१ से १·३ में वर्णित प्रयोगों को विद्यार्थी स्वयं करे। किसी चिकने आधार पर मुद्राओं द्वारा वे किये जा सकते हैं। या डोरियों से लटकाये हुए प्रत्यास्थ गोलों द्वारा भी वैसा कर सकते हैं। लटकाये हुए गोलों को विराम अवस्था में परस्पर छूते हुए होना चाहिए। अंततः और कुछ नहीं तो, द्रोणिका में रखी हुई मारबिल की गोलियों से ही काम चल सकता है।

१.४. अप्रत्यास्थ टक्कर; इलेक्ट्रान की परमाणु से—एक m संहति तथा v वेग वाला इलेक्ट्रान आदि में विराम दशा के M संहति के एक परमाणु मे केंद्रीयतया टक्कर खाता है। परमाणु क्षुब्ध हो जाता है और अपनी भौम दशा से ऊर्जा तक E मात्रकों द्वारा ऊपर उठा दिया जाता है। तो इलेक्ट्रन का अल्पतम वेग v_0 क्या होना चाहिए ?

इलेक्ट्रान तथा परमाणु के अंतिम वेगों, क्रमात् v तथा V, के लिए एक एक वर्गात्मक समीकरण प्राप्त होगा। अल्पतम मान v_0 इस माँग से निकलता है कि v तथा V के साधनों मे आयी हुई करणी[1] वास्तविक हो। यदि केवल ऊर्जा के सरक्षण का सिद्धात लागू होता तो जिस वेग की प्रत्याशा की जाती उससे v का मान कुछ अधिक होगा, यद्यपि दोनों का अतर प्रेक्षणीय न होगा क्योंकि अनुपात $\frac{M}{m}$ ($\geqslant 2000$) वहुत बड़ा है।

यदि टक्कर लगाने वाले कण की सहति उतनी ही या लगभग उतनी ही बड़ी हो जितनी कि टक्कर खाये हुए कण की, तो जिस अल्पतम ऊर्जा की आवश्यकता होती है वह केवल ऊर्जा-संरक्षण-सिद्धांतानुसार प्रत्याशित ऊर्जा से प्रायः दूनी होती है।

१.५. राकेट, चंद्रमा को—अनवरत इगझास्ट[2] दागनों के साथ एक राकेट (हवाई बान) ऊर्ध्वाधर ऊपर को दागा जाता है। समझिए कि राकेट की अपेक्षा मे रेचन-वेग a है तथा प्रति सेकड निष्कासित संहति $\mu = -\dot{m}$ है और मान लीजिए कि दोनो ही समय मे नियत (समय के विचार से एक जैसे) रहते हैं। यह भी मान लीजिए कि गति नियत उपेक्षणीय घर्षण के कारण गुरुत्वाकर्षी त्वरण g से होती है। तो गति समीकरण का गठन कीजिए और यह मान कर कि राकेट का आदि-वेग पृथिवी पृष्ठ पर शून्य है, समीकरण का समाकलन कीजिए। यदि μ=आदि की सहति m_0 का $\frac{1}{100}$ वाँ भाग और a=2000 मीटर-सेकड$^{-1}$ हो तो t= 10, 30, 50 सेकड में राकेट किस ऊँचाई पर पहुँचता है ?

1. Radical

*केवल हाइड्रोजन परमाणु के लिए ही M/m इससे छोटे, 1847 के बराबर है, हाइड्रोजन से निकटतम संहति वाले परमाणु हीलियम के लिए यह अनुपात कोई 4×1847 के बराबर होगा।

2. Exhaust—रेचक, शून्यकारक

१.६. संतृप्त वायु से गिरता हुआ जल-बिंदु—पानी की एक गोलाकार बूंदिका जलवाष्प से संतृप्त वायु में, बिना घर्षण के, गुरुत्व के वश, गिरती है। आदि ($t=0$) में उसकी त्रिज्या c और उसका वेग v_0 है। संघनन के कारण जल-बिंदु की संहति निरन्तर बढ़ती रहती है, संहति वृद्धि की दर बूंद के पृष्ठ के समानुपाती है। जैसा दिखाया जायगा, उसकी त्रिज्या r की वृद्धि समय t के साथ रैखिकतया होगी। स्वतंत्र चर राशि के लिए t के स्थान पर r लेकर गति के अवकल समीकरण का समाकलन कीजिए। दिखाइए कि $c=0$ के लिए वेग-वृद्धि समय के साथ रैखिकतया होती है।

१.७. गिरती हुई जंजीर—किसी मेज के किनारे पर एक जंजीर रखी हुई है जिसके सिरे के पास का थोड़ा-सा भाग किनारे से लटक रहा है, बाकी सब जंजीर सिकोड़ी हुई है। आदि में लटका हुआ सिरा विराम दशा में है। अब जंजीर की कड़ियाँ एक-एक करके गिरना प्रारंभ करती हैं। घर्षण की उपेक्षा कर दीजिए। चलित रूप में लिखी हुई ऊर्जा यहाँ गति का समाकल नहीं रहती। उसके स्थान में ऊर्जा का शेष भाग लिखने में आवेगी (कार्नो)[1] ऊर्जा-ह्रानि को विचार में लेना होगा।

१.८. गिरती हुई रस्सी—लम्बाई l की एक रस्सी मेज के किनारे से नीचे खसक रही है। आदि में उसका एक टुकड़ा x_0 मेज से बिना गति के लटक रहा था। किसी समय t पर समझिए कि रस्सी की लंबाई x ऊर्ध्वाधर नीचे लटक रही है। मान लीजिए कि रस्सी पूर्णतया नम्य है। दिखलाइए कि $T+V$ नियत के रूप में ऊर्जा सिद्धांत गति-समाकल प्रदान करता है।

१.९. पृथिवी के आकर्षण वश चंद्र का त्वरण—पृथिवी से चन्द्रमा की दूरी लगभग ६० पृथ्वी-त्रिज्याओं की है। मान लीजिए कि चंद्रीय कक्षा वृताकार और २७ दिन ७ घंटे ४३ मिनटों में परिक्रमित है। इससे पृथ्वी की ओर चंद्र का त्वरण (अभिकेंद्र त्वरण) परिकलित किया जा सकता है। न्यूटन के गुरुत्वाकर्षण-नियम से निकाले हुए त्वरण के साथ इस त्वरण की तुलना ने ही प्रथम बार उक्त नियम की सत्यता ठहरायी थी।

१.१०. ऐंठ, सदिश राशिवत्। एक समकोणीय निर्देशांक प्रणाली (x,y,z) लीजिए। इसमें किसी बल $\mathbf{F}$ के, अनुप्रयोग-बिंदु की सदिश त्रिज्या को $\mathbf{r}$ समझिए। अब प्रथम से घूर्णन द्वारा प्राप्त एक दूसरी निर्देशांक प्रणाली (x',y',z') को जाते हैं। दिखलाइए कि प्रथम निर्देशांक प्रणाली के मूल बिंदु के प्रति बल $\mathbf{F}$ का पूर्ण सदिश की

1. Impulsive Carnot energy

भांति रूपांतरित होता है, अर्थात्, $\mathbf{r}=(x,y,z)$ की भांति। इसको सिद्ध करने के लिए यह मान लेना पड़ेगा कि दोनों निर्देशाक प्रणालियां एक ही भाव मे हैं (दोनों दक्षिणावर्त्त या दोनो वामावर्त्त)।

१.११. ग्रह-गति का वेगालेख—समी० (6.5) से, $t=0$ के साथ, ग्रह-गति का वेगालेख[1] निम्नलिखित द्वारा दिया जाता है—

$$\xi=\dot{x}=-\frac{GM}{C}\sin\phi,$$

$$\eta=\dot{y}=+\frac{GM}{C}\cos\phi+B,$$

जहाँ M सूर्य की संहति है; C कोणीय सवेगाक[2] है; ϕ सत्य अनमली[3] है (देखिए आकृति ६); और G तो गुरुत्वाकर्षण है ही। दिखलाइए कि इस बात पर निर्भर करते हुए कि वेगालेख का "ध्रुव" $\xi=\eta=0$ उसके बाहर या भीतर है, प्रक्षेप-पथ अतिपरवलय या दीर्घवृत्त होगा। इस ध्रुव के स्थान के पदो मे सीमात स्थितियो के परवलय और वृत्त का भी वर्णन कीजिए।

१.१२. इलेक्ट्रानों के एक समांतर दंड का आयन-क्षेत्र में से जाना। प्रक्षेप पथों का अन्वालोप[4]—अनन्त दूरी पर स्थित एक उद्गम इलेक्ट्रानों को समातर पथों मे दाग रहा है। प्रत्येक इलेक्ट्रान का आवेश (चार्ज) e, सहति m और आदि-वेग v_0 है। एक आयनित[5] परमाणु A (आवेश E, संहति M) मूल विदु पर स्थित है। यदि e तथा E के चिह्न एक जैसे हों तो A के चारों ओर का कितना क्षेत्रफल इलेक्ट्रान कभी न छू पावेंगे?

y-अक्ष को आपाती कणों की दिशा मानिए और समझिए कि समस्या समतल की है। इलेक्ट्रान का प्रक्षेपपथ ध्रुवी निर्देशाकों मे लिखना और A को निर्देशाक प्रणाली का ध्रुव तथा अतिपरवलयिक प्रक्षेपपथ की नाभि समझना सबसे सरल होगा। उक्त क्षेत्रफल का सीमात ही इलेक्ट्रानीय प्रक्षेपपथों का अन्वालोप होगा। $M \gg m$ के कारण A को विराम दशा में समझ सकते हैं।

दिखलाइए कि यदि e और E विरुद्ध चिह्नों के हों तो भी प्रक्षेपपथों का अन्वालोप वही सीमात देता जान पड़ता है; परंतु अब उसका कोई भौतिकीय आशय नहीं।

1. Hodograph 2. Angular moment
3. True anomaly 4. Envelope 5. Ionized

१.१३. दीर्घवृत्तीय प्रक्षेप-पथ, दूरी के अनुलोमतया केन्द्रीय बल के अधीन—समझिए कि एक संहति m एक स्थिर बिंदु O की ओर निर्देशित बल के प्रभाव में है [O को बल का केंद्र (बल-केंद्र) कहते हैं)। तो

$$\mathbf{F} = -k\,\mathbf{r},$$

जहाँ $\mathbf{r} = \overrightarrow{Om}$, $k =$ एक नियतांक।

दिखलाइए कि m की गति के लिए निम्नलिखित तीन नियम होते हैं :

१. m एक दीर्घवृत्त की रचना है जिसका केन्द्र O है।

२. सदिश त्रिज्या $\mathbf{r}$ समान समय में समान क्षेत्रफल घेरती है।

३. आवर्त्तकाल T दीर्घवृत्त के रूप से स्वतंत्र है और केवल बल-नियम पर निर्भर करता है, अर्थात् k और m के मानों पर।

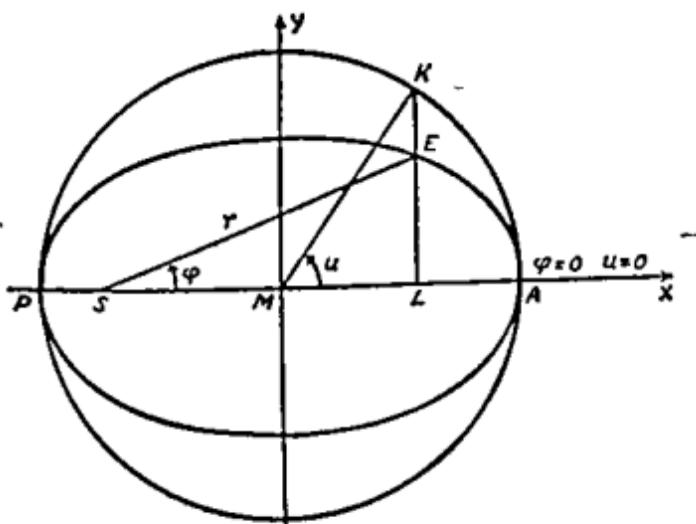
१.१४. लिथियम का नाभिकीय विभंजन[1]—यदि एक हाइड्रोजन-नाभिक [प्रोटान[2] संहति m_p], वेग v_p से, L_i^7 [लिथियम[3] परमाणवीय भार, 7] के नाभिक से टकरावे, तो पश्चोक्त दो α-कणों [α=अल्फा; अल्फा कण, संहति $m_\alpha = 4m_p$] में विभक्त हो जाता है। ये दो α-कण (पूर्णतः तो नहीं पर) करीब-करीब विपरीत दिशाओं में भाग निकलते हैं। मान लीजिए कि α-कण टक्कर-रेखा के विचार से सम्मिततया एक समान वेगों से जाते हैं; तो उनके बीच के कोण 2ϕ का परिकलन कीजिए। देखिए कि प्रोटान की गतिज ऊर्जा E_p के अतिरिक्त; संहति-न्यूनता के कारण, कुछ और ऊर्जा E का मोचन (मुक्ति-प्रदान) होता है जो E से कहीं अधिक है और जो E की ही भाँति उन दो α-कणों को सचारित होती है। अतएव $\cos\phi$ के लिए अतिम उत्तर में न केवल m_p और m_α ही आते हैं, वरन् प्रोटान की गतिज ऊर्जा E_p तथा E भी।

उन मानकों में जो प्रायः परमाणवीय भौतिकी में मिलते हैं $E = 14 \times 10^6 ev$ [electron volts, इलेक्ट्रान वोल्ट]। एक प्रयोग में $E_p = 0.2 \times 10^6 ev$ निकला था। तो v_α और 2ϕ के क्या मान होंगे ?

१.१५. न्यूट्रानों और परमाणवीय नाभिकों के बीच केन्द्रीय टक्करें, पैरेफिन की ईंट का प्रभाव—सीसे (lead, लेड) की पचास सेंटीमीटर मोटी पट्टिका द्वारा

1. Kirchner, Bayer, Akad, 1933 2. Proton, 3. Lithiom

भी न्यूट्रानों का वेग कुछ थोड़ा-सा ही कम होता है; परंतु, इसके विपरीत, पैरेफिन का केवल बीस सेंटीमीटर मोटा स्तर उन्हे पूर्णतया अवशोषित कर लेता है। यह बात सहज ही समझ में आ जावेगी जब स्मरण करेंगे कि केन्द्रीय टक्कर में न्यूट्रान (सहति $m=1$) की गतिज ऊर्जा पैरेफिन के हाइड्रोजन नाभिको (हाइड्रोजन नाभिक= प्रोटान; सहति, $M_1=1$) में के एक को पूर्णतया हस्तांतरित हो जाती है; जबकि न्यूट्रान के सीसे के नाभिक (सहति $M_2=206$) में केंद्रीय टक्कर में जो ऊर्जा हस्तांतरित होती है वह उल्लेखनीय भी नहीं। जो ऊर्जा कि आदि में गतिहीन नाभिक (सहति M) न्यूट्रान (सहति m) से केन्द्रीय टक्कर में प्राप्त करता है उसे अनुपात $\frac{M}{m}$ के फलन की भांति दिखलाते हुए एक वक्र खींचिए।

१.१६. केप्लर-समीकरण—अपनी कक्षा में किसी ग्रह की गति का दीर्घकालिक परिणमन, अवकल रूप में, कोणीय संवेग के सिद्धांत द्वारा निर्धारित किया जाता है। इस दीर्घकालिक परिणमन को समाकल रूप में पाने के लिए, केप्लर का अनुसरण करते हुए, हम निम्नलिखित प्रकार से चल सकते हैं (आ० ५५):

आ० ५५. उत्केंद्र अनमली, u, तथा उसके सत्य अनमली, ϕ, से संबंध के लिए केप्लर-रचना।

दीर्घवृत्त के केन्द्र के चारों ओर दीर्घ अक्ष के व्यास का एक वृत्त खींचिए। अब हम ग्रह के समय t के, उसके दीर्घवृत्त पर के E से वृत्त पर के एक बिंदु K को सहागमित

समझते हैं। यदि दीर्घवृत्त के मुख्याक्षों को निर्देशाक अक्षों की भाँति लें, तो बिंदु K का भुजांक[1] वही होगा जो E का है। E अपने ध्रुवी निर्देशांकों r,ϕ (ध्रुव S) द्वारा प्रदत्त है, तो K, ध्रुवी निर्देशांकों a,u (ध्रुव M) द्वारा निर्धारित होता है। अतएव **सत्य अनमली** ϕ का सहागमी **उत्केन्द्र अनमली** u है (जैसे कि मूल रचना में वैसे ही यहाँ, दोनों ही को अपभानु से ग्रहगति की दिशामें मापते हैं, न कि खगोल-विज्ञान की भाँति जहाँ अनमलियाँ अभिभानु से मापी जाती है; यद्यपि वहाँ भी मापने की दिशा वही है जो यहाँ पर अर्थात् ग्रह की गति की दिशा घटिका-प्रतिकूल।)

ग्रह E के निर्देशाक, x तथा y, एक ओर तो r तथा ϕ के पदो में व्यक्त किये जा सकते हैं; और, दूसरी ओर, दीर्घवृत्त के एक अर्धाक्ष तथा उत्केंद्र अनमली u के पदों में। अतएव जब K दिया हो तो E भी दिया होता है। तो अब वृत्त पर K की गति का अभिक्षेत्र निम्नलिखित विख्यात केप्लर-समीकरण द्वारा प्रदत्त है—

$$nt=(u-\epsilon \sin u),$$

यहाँ ϵ दीर्घवृत्तीय प्रक्षेपपथ की उत्केंद्रता है और

$$n=\left(\frac{GM}{a^3}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{C}{ab},$$

जहाँ a,b अर्धाक्ष है तथा, G है गुरुत्वाकर्षणाक; M सूर्य की सहति; और C क्षेत्रफलीय वेगांक[2]।

केप्लर समीकरण को व्युत्पन्न करने के लिए, S को ध्रुव और किरण SA (A, अपकेंद्र) को ध्रुवी अक्ष लेकर, दीर्घवृत्त के समीकरण से प्रारभ कीजिए। समीकरण है—

$$r=\frac{p}{1-\epsilon\cos\phi},$$

जहाँ p "परामिति" $a(1-\epsilon^2)$ है। अब उपर्युक्त रूपातरण सबंधों का उपयोग कर, ϕ के स्थान पर u रखिए, और निम्नलिखित समीकरण प्राप्त कीजिए—

$$r=a(1+\epsilon\cos u).$$

इन दोनों समीकरणों का अवकलन, r तथा ϕ का निरसन, कोणीय सवेग के सिद्धात का तथा समी० (6.8) का उपयोग अततः एक समाकलन के उपरात, केप्लर-समीकरण की प्राप्ति कराते हैं, बशर्ते कि यह बधेज लगालें कि $t=0$ पर ग्रह अपकेन्द्र पर है।

1. Abscissa 2. Areal velocity constant

द्वितीय अध्याय संबंधी

२.१. **चलते पहिये के अपूर्ण पदीय प्रतिबंध**—पैने किनारे वाला एक पहिया बिना स्खलन किये हुए किसी खुरदुरे समतल आधार पर चल रहा है, (उदाहरणतः किसी बच्चे द्वारा चौरस सडक पर खेल के लिए चलाये हुए एक गोल चक्कर का ध्यान करिए)। पहिये की त्रिज्या a है। उसकी क्षणिक स्थिति के निर्धारण के लिए निम्नलिखित बातों के मानों को ठहरा लेना होगा—

१. पहिये और आधार के स्पर्शविंदु के निर्देशांक x,y एक ऐसे समकोणीय निर्देशांकों की प्रणाली x,y,z को अभिदेशित जिसका xy-समतल आधार का संपाती हो;

२. पहिये की धुरी और z-अक्ष के बीच का कोण θ;

३. पहिये की (x,y पर) स्पर्शरेखा (पहिये के समतल का आधार के समतल से प्रतिच्छेद) और x-अक्ष के बीच का कोण ψ;

४. पहिये के स्पर्श विंदु की त्रिज्या तथा किसी एक स्वेच्छया निश्चित की हुई त्रिज्या के बीच का कोण ϕ, यह कोण धनात्मक समझा जायगा यदि वह, कहिए कि, पहिये के घूर्णन की दिशा में हो।

अतएव, परिमित गति मे, पहिये की स्वतंत्रता सख्याएँ पाँच होगी। परंतु पहिये की चलनशीलता शुद्ध (स्खलन हीन) लुठन के प्रतिबध से निरोधित है, जो कि पहिये और आधार के बीच सर्पी घर्षण[1] के कारण होता है। अतएव यह ठीक है कि पहिये के अपनी क्षणिक दिशा मे घूमते हुए, अपनी स्पर्शरेखा की दिशा पर चली हुई दूरी δs, $a\delta\phi$ के वरावर होगी। इस समीकरण को निर्देशाक अक्षों पर प्रक्षिप्त करने से नियत्रण के वे प्रतिबध प्राप्त करते है जिन्हें δx, δy और $\delta\phi$ को सतुप्ट करना होगा। ये हैं—

$$\delta x = a\cos\psi\,\delta\phi;\quad \delta y = a\sin\psi\,\delta\phi.$$

अतएव लुठन करते हुए पहिये की, अत्यणुगति मे, केवल तीन स्वतंत्रता-सख्याएँ होंगी।

दिखलाइए कि प्रतिवध (1) को स्वयं निर्देशांको के बीच के समीकरणों में नही लिख सकते। ऐसा करने के लिए दिखलाना होगा कि समीकरण $f(x,y,\phi,\psi)=0$ का अस्तित्त्व प्रतिवध (1) से असगत है (θ प्रतिवंध (1) मे नही आता)।

1. Static friction

२.२ द्विदिक क्रियाशील एकाकी सिलिंडर वाले भाफ इंजन के लिए एक गति-पालक चक्र[1] का सन्निकट परिरूप[2] (§९ (४) पृ० ७७, को भी देखिए)। द्विदिक क्रियाशील पिस्टन इंजन ऐसा होता है कि उसके पिस्टन के दोनों ओर पारी-पारी से भाफ प्रवेशित करायी जाती है ताकि पिस्टन के गदत के दोनों प्रहारों में कार्य किया जा सके।

सरलता के लिए मान लेंगे कि प्रत्येक प्रहार में दाव नियत (एक जैसा ही) रहता है (पूर्ण दाव चक्र या डीजल—Diesel—चक्र); और यह भी मान लेंगे कि सवधक दडिका अनन्त लंबाई की है। तो पिस्टन से क्रैंक ईपा को संचारित क्रैंक कोण ϕ के फलनवत् परिणमनीय ऐंठ, उस अर्द्ध चक्र के लिए जिसमें क्रैंक पीछे से आगे के स्तंभ स्थान तक जाता है, निम्नलिखित से दी जाती है (मिलाइए समी० 9.5):

$$L = L_0 \sin \phi.$$

यहाँ L_0 एक नियताक है और ϕ पिछले स्तंभ स्थान से होने वाले घूर्णन की दिशा में मापा जाता है। आगे से पिछले स्तंभ स्थान को जाने वाले दूसरे अर्द्ध चक्र में, उक्त अनुमानों के ही अधीन [अर्थात्, (1) द्विदिक् क्रियाशील इंजन; (2) पूर्ण दाव के अधीन कार्य; (3) अनंत संवंधक दंडिका], ऐंठ उसी नियम के अनुसार बदलती है, बशर्ते कि अब ϕ अगले स्तंभ स्थान से घूर्णन की दिशा में मापा जाय।

समझिए कि इंजन पर का बोझ एक नियत ऐंठ W द्वारा प्रदत्त है; तथा तदनुसार अश्वशक्ति N और प्रति मिनट घूर्णनों की सख्या n है। अतएव चालक ऐंठ L परिणमनीय होगी और बोझवाली ऐंठ ω नियत रहेगी। परिणाम वश इंजन का कोणीय वेग अधिकतम (maximum) मान ω_{max} और अल्पतम (minimum) मान ω_{min} के बीच घटता बढ़ता रहेगा। मध्यमान (mean value) ω_m लगभग यों दिया जावेगा

$$\omega_m = \frac{\omega_{max} + \omega_{min}}{2}$$

आपेक्षिक उच्चावचन अर्थात् इंजन के असंतुलन की मात्रा (δ) यों दी जाती है—

$$\delta = \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{\omega_m}$$

गतिपालक चक्र का काम यह होता है कि इस आपेक्षिक उच्चावचन को एक सीमा

1. Flywheel 2. Approximate design

प्रयुक्त सारे अपकेन्द्र बल के, तथा एक-एक संहति अल्पांशों पर आरोपित अपकेन्द्र बलों के परिणामी घूर्ण के, परिणाम हैं।

पृ० ७४ से हम जानते हैं कि अकेले पिंड के भार की क्या प्रतिक्रियाएँ होती हैं; अतएव उनके प्रभाव को यहाँ छोड़ सकते हैं।

२.७ यो-यो संबंधी वाद—संहति M तथा अवस्थितित्व घूर्ण I वाले एक मंडलकाकार अर्थात् टिकिया के रूप पिंड के माध्यिकायी समतल में अक्ष के लबवत् एक गहरी स-समित नाली खुदी हुई है। नाली में, ईपा पर एक डोरी लपेटी हुई है। ईपा की त्रिज्या r है। डोरी का छुट्टा सिरा हम हाथ से पकड़ते हैं। अब डोरी को सदा कसी रखते हुए पिंड को गिरने देते हैं। जैसे-जैसे पिंड गिरता है, उसे तब तक एक घूर्णनात्मक त्वरण प्राप्त होता रहता है जब तक कि सारी डोरी खुल न जाय। अब एक संक्रमण दशा आती है जिसका पूरा ब्यौरा हम यहाँ न देंगे पर जिसका परिणाम यह होता है कि पिंड डोरी के एक ओर से दूसरी ओर चला जाता है। तदुपरांत डोरी ईपा के चारों ओर दूसरी दिशा में लपटने लगती है और पिंड घूर्णनीय अवत्वरण के साथ अर्थात् वेग कम होते हुए ऊपर उठने लगता है, इत्यादि इत्यादि; तो निम्नलिखित दशाओं में डोरी में तनाव क्या है

(क) उतरने में ?

(ख) चढ़ने मे ?

मान लीजिए कि अक्ष से डोरी के छुट्टा सिरे की दूरी की अपेक्षा r इतना छोटा है कि डोरी को सब समय ऊर्ध्वाधर समझ सकते हैं।

२.८. एक गोले के पृष्ठ पर गतिमान कण—एक संहति बिंदु किसी गोले के ऊपरी आधे के बाहरी पृष्ठ पर चल रहा है। उसका आदि स्थान z_0 और आदि वेग v_0 कुछ-भी होने दीजिए, सिवाय इस बात के कि पश्चोक्त को गोले के पृष्ठ से स्पर्श रैखिक होना होगा, तथा गति को घर्षणहीन, केवल मात्र गुरुत्व के अधीन होना होगा। तो किस ऊँचाई पर संहति बिंदु गोले को छोड़ देगा ?

तृतीय अध्याय संबंधी

३.१. अत्यणु दोलनों युक्त गोलीय लोलक—व्यापकतया गोलीय लोलक के प्रक्षेपपथ के निष्पद बिंदु[1] गति के दौरान में आगे बढ़ते हैं। परंतु पर्याप्त छोटे दोलनों के

1. Nodal points

लिए निष्पंद विदुओं को स्थिर रहना होगा क्योंकि अब एक आवर्त्त दीर्घवृत्तीय गति की बात है। कूतिए कि दीर्घवृत्त के क्षेत्रफल के शून्य होने मे निष्पद विंदुओं का आगे बढ़ना, $\Delta\phi$ किस क्रम मे शून्य होता है।

३.२. प्रणोदित, अवमंदित दोलनों के अनुनाद-शिखर का स्थान—प्रणोदित अनवमदित दोलनों में महत्तम आयाम $\omega = \omega_0$ पर होता है; परतु अवमदनयुक्त प्रणोदित दोलन में इस स्थान पर नहीं होता, वरन् ω_0 से कम पर होता है (देखिए आकृति ३३)। कितना कम, वह अवमदन[1] पर निर्भर करेगा।

ज्ञात कीजिए कि ω के किस मान के लिए $|C|$ महत्तम होगा।

[दिखलाइए कि वेग-आयाम, $|C|\,\omega$, (या गतिज ऊर्जा के समय-औसत) का महत्तम मान ठीक $\omega = \omega_0$ पर ही होता है।]

३.३. गैल्वानोमापी—एक स्विच द्वारा एक गैल्वानोमापी (विद्युत्धार मापी) नियत मान E के वि० वा० ब० (विद्युत् वाहक बल electro-motive force) के एक एक-दिश-धारा दायक उद्गम से संबधित है। समय $t=0$ पर स्विच वद कर दिया जाता है। पर्याप्त अधिक समय के बाद गैल्वानोमापी का विक्षेप अपने अंतिम मान α_∞ पर पहुँचता है। तो उसके आदि के विरामस्थान, $\alpha = 0; \dot{\alpha} = 0$, और अत के स्थान, $\alpha = \alpha_\infty$ के बीच उसकी गति क्या हुई ?

तीन प्रभावों को विचार में लेना होगा। पहले तो विद्युत्-धारा के अतएव वि० वा० ब० के समानुपाती एक बाहरी ऐंठ, अवस्थितित्व-घूर्ण I वाले गैल्वानोमापी पर आरोपित है। दूसरे, कोणीय वेग के समानुपाती एक अवमदक ऐंठ आरोपित है, जो गति को धीमी करती है। तीसरे, अवलवन की ऐंठन एक प्रत्यानयक[2] ऐंठ की भाँति आरोपित रहती है और जो विक्षेप α के समानुपाती होती है। अवमदक ऐंठ के समानुपात-गुणनखड को ρ समझिए, और प्रत्यानयक ऐंठ को ω_0^2 ।

निम्नलिखित तीन स्थितियों का भेद बताइए तथा चित्रों द्वारा उन्हें समझाइए।

(क) दुर्बल अवमदन $(\rho < \omega_0)$,

(ख) अनावर्त्ती ("क्रातिक") अवमदन $(\rho = \omega_0)$,

(ग) सबल अवमदन $(\rho > \omega_0)$।

1. Damping 2. Restoring (torque)

३.४. अवलंबन बिंदु की प्रणोदित गति के अधीन लोलक---दो स्थितियाँ उठायी जाती हैं---

(क) अवितननीय[1] डोरी द्वारा एक कण अवलंबित है और गुरुत्व के अधीन बिना अवमंदन के दोलायमान है। अवलंबन बिंदु, किसी दिये हुए विस्थापन-नियम $\xi = f(t)$ के अनुसार, एक क्षैतिज ऋजुरेखा पर चलाया जाता है।

इस निकाय के गति समीकरण वृंद क्या होंगे ? डोरी की संहति की उपेक्षा कर दीजिए। समीकरणों को या तो दालाँबेर-सिद्धांत द्वारा या लाग्रांज के प्रथम प्रकार के समीकरणों से व्युत्पन्न कीजिए।

गति समीकरण बहुत ही सरल हो जाते हैं यदि हम छोटे-छोटे दोलनों पर चले जायँ, अर्थात् केवल प्रथम कोटि के पदों को ही रहने दें।

यदि एक और अनुमान कर लें कि अवलंबन बिंदु के विस्थापन समय के विचार से आवर्त्ती हैं तो गति-समीकरणों को सहज ही समाकलित कर सकते हैं। लोलक को, कहिए कि, उसके अवलंबन बिंदु की गति के द्वारा, दोलायमान कर दें तो उसकी निजी आवृत्ति उत्तेजित हो उठती है। इस निजी आवृत्ति का आयाम अवमंदन द्वारा शनैः-शनैः निकल जाता है (यद्यपि अपने विश्लेषण में हम अवमंदन की उपेक्षा कर देंगे)। इस प्रकार हम दोलनों की एक स्थिर भाव की दशा को पहुँचते हैं जिसकी आवृत्ति वही होगी जो अवलंबन बिंदु पर प्रणोदित है। दिखलाइए कि जब गति इस प्रकार से स्थिर भाव की हो गयी है तब अवलंबन बिंदु और संहति m अनुनाद आवृत्ति के नीचे तो एक ही दिशा मे, परंतु उसके ऊपर विरुद्ध दिशाओं मे जाते हैं।

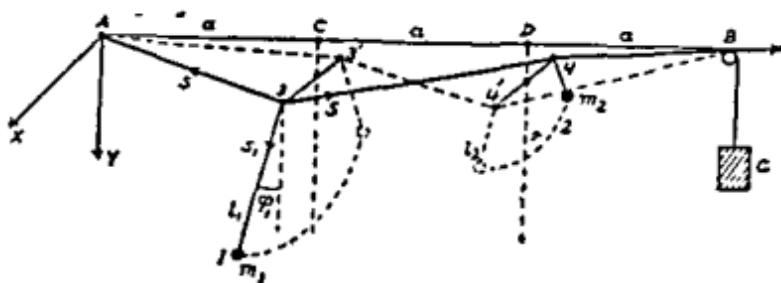
(ख) इसी प्रकार का विश्लेषण उस स्थिति के लिए कीजिए जिसमें *अवलंबन* बिंदु को ऊर्ध्वाधर विस्थापन η दिया जाता है। उस स्थिति पर विशेष जोर दीजिए जिसमें बिंदु पर आरोपित त्वरण नियत रहता है। दोलनों का काल क्या होगा यदि अवलंबन बिंदु त्वरणों $+g$ तथा $-g$ से विस्थापित किया जाय ?

३.५. युग्मित लोलकों की व्यावहारिक (प्रायोगिक) व्यवस्था, (आकृति ५६ *मे यह रेखांकित)---दो स्थिर आधारों A और B के बीच एक भारहीन, नम्य तथा* प्रत्यास्थ तार तना हुआ है। उसका तनाव S एक समजनीय बाट G द्वारा नियामित *किया जाता है जो लौह कोण B के ऊपर से गये हुए लटकते तार के छुट्टा सिरे पर* लगाया हुआ रहता है। दो लोलक द्विसूत्रतया C और D पर लटकाये हुए हैं। C

1. Inextensible

तथा D तार AB को तीन, कहिए कि, बराबर खंडों में विभाजित करते हैं। दोनों द्वि-सूत्री अवलंबन रेखांकन में मादे अर्थात् एकाकी अवलंबनों की भांति ही दिखलाये गये हैं। ये लोलकों को काफी ठीक-ठीक अनुप्रस्थतया, अर्थात् रेखन के समतल में लववत्, झूलने योग्य बना देते हैं। G को अधिक करने से लोलक-द्वय का युग्मन दुर्बलतर हो जाता है (न कि सबलततर, जैसा कि कदाचित् पहले-पहल समझा जाय!)। जो आगे कहना है उसके लिए मान लेंगे कि युग्मन दुर्बल है, जिसका अर्थ यह हुआ कि लोलक-गोलकों के भार की अपेक्षा S बड़ा है। यह भी मान लेंगे कि लोलकों के ऊर्ध्वाधर में विक्षेप कोण ϕ_1, तथा ϕ_2, छोटे-छोटे ही हैं। (सकेतन के लिए आ० ५६ देखिए)। $3'$ और $4'$ अवलबन बिंदुओ C तथा D के 3 और 4 के स-समिततया अभिमुख विक्षेप हैं।) तो ये कोण निम्नलिखितों के सन्निकट होंगे—

$$\sin\phi_1 = \phi_1 = \frac{x_1 - x_3}{l_1}, \ \cos\phi_1 = 1;$$

$$\sin\phi_2 = \phi_2 = \frac{x_2 - x_4}{l_2}, \ \cos\phi_2 = 1.$$

आ० ५६—तार $ACDB$ को बाट G द्वारा कसा हुआ रखते हैं। उसे $A34B$ में या, अभिमुख विक्षेप के लिए $A3'4'B$ में विरूपित करते हैं। विक्षेप न केवल संहतियों m_1 और m_2 पर गुरुत्त्वाकर्षी क्रिया द्वारा वरन् लोलकों के अवस्थितित्त्व प्रभावों द्वारा भी होता है। लोलकों को 1 और 2 द्वारा सूचित किया है, उनके दैर्घ्य l_1 तथा l_2 हैं, और वे द्विसूत्रतया लटकाये हुए हैं जिस कारण वे रेखन के समतल से लववत् झूलते हैं (आकृति में द्विसूत्र अवलबन नहीं दिखलाये गये हैं)। ϕ_1 तथा ϕ_2 ऊर्ध्वाधर से क्षणिक विक्षेप है।

छोटे दोलनों के लिए y-घटकों की अपेक्षा करते हुए हम m_1, और तथैव m_2 के लिए प्राप्त करते हैं—

(1) $m_1 g = S_1 \cos\phi_1 = S_1$, $m_2 g = S_2 \cos\phi_2 = S_2$; और

(2) $m_1 \ddot{x}_1 = -S_1 \sin\phi_1 = \frac{m_1 g}{l_1}(x_3 - x_1)$,

$$m_2 \ddot{x}_2 = -S_2 \sin\phi_2 = \frac{m_2 g}{l_2}(x_4 - x_2).$$

अवलंबन बिंदुओं C और D पर, किसी भी क्षण, क्रमात् S_1 और S_2, तनाव S साथ साम्यावस्था में होंगे। पश्चोक्त (अर्थात् S) में S_1 और S_2 द्वारा परिवर्त नहीं के बराबर होता है। यह x_1, x_2, x_3 तथा x_4 के बीच दो और प्रतिबं प्रदान करता है। इन्हें x_3 तथा x_4 के लिए हल कर सकते हैं और (2) में उ प्रतिस्थापित कर देते हैं। तब हम युग्मित लोलकों के युगपत् अवकल समीकरण प्राप्त करते हैं। सत्यापित कीजिए कि ये वास्तव में ही समीकरणों (20.10) से सहमत हैं

३.६. दोलन शामक—x-दिशा में दोलनशील एक निकाय (संहति, M प्रत्यानयन बल का समानुपाती नियतांक, K) एक कमानी (नियतांक, k) द्वार एक संहति m से इस भांति युग्मित है कि m भी x-दिशा में दोलन कर सकता है माँग यह है कि जब कोई बाह्य बल $P_x = c \cos\omega t$ संहति M पर आरोपित हो तब यह संहति M विराम में रहे। तो निकाय (m, k) को किन प्रतिबंधों को संतुष्ट करना चाहिए ?

चतुर्थ अध्याय संबंधी

४.१. एक समतलीय संहति-वितरण के अवस्थितित्व घूर्णवृन्द—सिद्ध कीजिए कि कैसे-भी संहति-वितरण के लिए (समतल के लंबवत्) "ध्रुवी" अक्ष के प्रति का अवस्थितित्व-घूर्ण (संहति-वितरण के समतल में, ध्रुवी अक्ष पर प्रतिच्छेद करते हुए) दो परस्पर समकोणिक "निरक्षीय" अक्ष के प्रति के अवस्थितित्व-घूर्णों के योग के बराबर होता है। किसी वृत्तीय मंडलक के लिए इसको विशिष्टीकृत कीजिए।

४.२. लट्टू का अपने मुख्य अक्षों पर घूर्णन—आकृति ४६ क, ख (पृ० १९८) के अनुसार किसी ज-समित लट्टू के घूर्णन अपने सबसे बड़े और सबसे छोटे अवस्थितित्व घूर्ण के अक्षों पर तो स्थायी, पर मझोले अवस्थितित्व घूर्ण के अक्ष पर अस्थायी होते हैं। इसे वैकल्पिक रीति से सिद्ध कीजिए। यूलेर के गति समीकरणों से चलिए और अक्ष के चारों ओर के घूर्णन के कोणीय वेग ω को नियत रख लीजिए ($\omega_1 =$ नियत ω_0)। अन्य दो मुख्य अक्षों के प्रति के कोणीय वेग, ω_2 तथा ω_3 आदि में

तो शून्य होंगे, परंतु किसी स्थान-च्युति के कारण शून्य से अन्य मानों के हो जाते हैं। यदि स्थानच्युति छोटी-सी ही मान लें तो प्रथम यूलेर समीकरण बताता है कि प्रथम सन्निकटता तक ω_1 अपरिवर्तित, $= \omega_0$ रहता है। अन्य दो समीकरणों से ω_2 और ω_3 में प्रथम कोटि के दो रैखिक अवकल समीकरणों की प्राप्ति होती है। अब $\omega_2 = ae^{\lambda t}$ तथा $\omega_3 = be^{\lambda t}$ रख दीजिए, जहाँ a और b कोई-भी (स्वेच्छ) नियतांक हैं, और उन दो समीकरणों मे प्रतिस्थापित कर लीजिए। परिणाम मे निकले λ के लिए वर्गात्मक समीकरणों का विचार-विवेचन उपर्युक्त अभ्युक्ति का प्रमाण प्रदान करता है।

४.३. **बिलियर्ड खेल में ऊँचे और नीचे निशाने**—पिच्छू निशाना तथा खींच निशाना[1]। क्षैतिज क्यू[2] से बिलियर्ड का गेंद उसके माध्यिका-समतल मे, अर्थात् बिना "इंग्लिश" के, मारा जाता है। केन्द्र से कितनी ऊँचाई, h, पर गेंद मारा जाना चाहिए कि शुद्ध (स्खलन हीन) लुंठन प्रारंभ होवे? कपड़े और गेंद के बीच गतिज घर्षण को ध्यान में रखते हुए ऊँचे और नीचे पर मारे हुए गेंद का सिद्धांत निकालिए। ऊँचे निशाने में, जितने समय तक कि घर्षण आरोपित रहता है, उस समय मे, सहति केंद्र का वेग कितना बढ़ेगा तथा नीचे निशाने में कितना कम होगा? केवल शुद्ध लुंठन के ही रह जाने में कितना समय लगता है?

किसी दूसरे गेंद से टक्कर खाने में अर्थात् पिच्छू और खींच निशानों मे, क्या बातें होती हैं यह भी यही विधि समझा देती है।

४.४ **बिलियर्ड गेंद की परवलयिक गति**—गेंद को कैसे मारना चाहिए कि उसके गुरुत्व-केंद्र की आदि की गति और घूर्णन-अक्ष परस्पर अभिलंब न हो? दिखलाइए कि जबतक गेंद स्खलन करता रहता है तब तक घर्षण बल की दशा नियत रहती है। गेंद के केंद्र का प्रक्षेप-पथ क्या होगा? कितनी देर बाद शुद्ध लुंठन होने लगता है?

पंचम अध्याय संबंधी

५.१. **समतल में आपेक्षिक गति**—परिणमनीय कोणिक वेग ω से एक समतल अपने किसी बिंदु o पर खींचे हुए अभिलंब के चारों ओर घूर्णन कर रहा है।

1. Follow shot & draw shot 2. Horizontal cue

अपकेंद्र वल के अतिरिक्त अन्य कौन से वल किसी संहति-विंदुपर अनुप्रयुक्त करना चाहिए ताकि घूर्णनयुक्त समतल में उसके गति-समीकणों का रूप वही हो जाय जो कि स्थानीयतया स्थिर समतल के अवस्थितित्वीय ढांचे में था? सुविधा-जनक होगा कि स्थानीयतया स्थिर समतल में सम्मिश्र परिणम्यों $x+iy$ का और घूर्णनयुक्त समतल में $\xi+i\eta$ का प्रवेश कराया जाय।

५.२ घूर्णनयुक्त ऋजु रेखा पर एक कण की गति—किसी ऋजु रेखा पर एक संहति-विंदु विना घर्षण के चल रहा है। ऋजु रेखा स्वयं नियत कोणीय वेग से अपने लंबवत् उसको प्रतिच्छेद करती हुई एक क्षैतिज अक्ष के चारों ओर घूर्णन कर रही है। घूर्णनयुक्त ऋजु रेखा पर समय के फलन के रूप में कण की गति का परि-कलन कीजिए और दिखलाइए कि नियत्रण वल (गति-नियत्रक वल) तथा इस वल की ओर का गुरुत्वीय आकर्पण का घटक, ये दोनों कॉरिओलिस वल का सतुलन भर कर पाते हैं।

५.३. अपूर्णपदीय निकाय के सरलतम उदाहरणवत् "स्ले" (C. Carathiodory (करायेऑदारी) Z. angew. Math. Mech (13), 71(1933) के आधार पर।) बरफ पर सरकने वाली वे-पहिये की गाड़ी को स्ले कहते हैं। वह एक दृढ़ समतल निकाय की भाँति समझी जाती है जिसकी परिमित गति के लिए तीन स्वतंत्रता सख्याएँ होती हैं तथा अत्यणु गति के लिए केवल एक स्वतंत्रता संख्या होती है। (मिलाइए समस्या २.१ का चलता (लुठन करता) हुआ पहिया जिसकी परिमित गति में पाँच, अत्यणु गति में तीन स्वतत्रता संख्याएँ थी।)

बरफ पर के सर्पी घर्पण की उपेक्षा कर दीजिए, *या, अन्यांतरतया,* समझिए कि सदा के लिए अश्व-कर्पण (घोड़े की खीच) द्वारा उसका प्रतिकार होता रहता है। परतु हाँ, उस घर्पण F को अवश्य विचार में लेना होगा जो बरफ की पथ-नालियाँ स्ले के लबे पटरों के विरुद्ध (जिन पर स्ले सरकती है) पार्श्वतः डालती हैं क्योंकि वही इन पटरों की पार्श्वगति को रोकता है। समझिए कि यह घर्पण एक ही अनुप्रयोग विंदु ० पर सकेन्द्रित है।

स्ले में एक $\xi-\eta$ प्रणाली स्थित की जाती है। ξ–अक्ष लबे पटरों की मध्य-रेखा पर सहतिकेन्द्र G (निर्देशाक $\xi=a$, $\eta=0$) से होता हुआ क्षैतिजतया जाता है; और η–अक्ष क्षैतिजतया F के अनुप्रयोग विंदु O से होता हुआ

जाता है। बरफ के क्षैतिज समतल में एक $x\ y$-प्रणाली स्थिर करते हैं। मान लीजिए कि ξ और x अक्षों के बीच का कोण ϕ है; $\omega = \dot{\phi}$, स्ले का ऊर्ध्वाधर के प्रति क्षणिक कोणिक वेग, M स्ले की संहति है, I उसका केंद्र से जाते हुए ऊर्ध्वाधर के प्रति का अवस्थितित्व घूर्ण बिंदु O (निर्देशांक $\xi = \eta = 0$) के वेग के ξ और η की ओर के घटक u, v हैं।

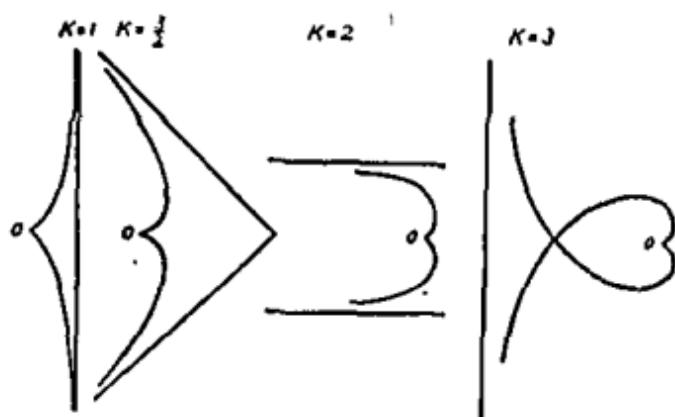
तो अब

(क) समस्या ६.१ की सम्मिश्र परिणामों वाली विधि का उपयोग कर, राशियों u, v, ω के लिए तीनों युगपत् अवकल समीकरण स्थापित कीजिए। F बाह्य बल है;

(ख) अपूर्णपदीय प्रतिबंध $v=0$ का प्रवेश करा कर उन्हें सरलीकृत कीजिए तथा उनसे F निर्धारित कीजिए;

(ग) कोण ϕ के बदले ϕ का समानुपाती एक सहायक कोण प्रवेश करा कर उन्हें समाकलित कीजिए;

(घ) सत्यापित कीजिए कि स्ले की गतिज ऊर्जा नियत रहती है (क्योंकि F कोई कर्म नहीं करता)।

आ० ५६—k के विविध मानों के लिए स्ले के प्रक्षेपपथ, कराथेओदोरी के अनुसार।

(ङ) दिखलाइए कि, समय-मापक्रम का उचित निर्वाचन करने पर, $x\ y$—समतल में बिंदु O के प्रक्षेपपथ में $t=0$ पर एक निशिताग्र[1] होता है और ऋजुरेखाओं $t=\pm\infty$ के वह अनंतस्पर्शतः[2] समीप जाता है जैसा कि कारायेआ-दरी से उद्धृत आ० ५७ के वक्रों में दर्शाया गया है।

षष्ठ अध्याय सम्बन्धी

६.१. हैमिल्टन-सिद्धांत निदर्शक दृष्टांत—निम्नलिखित स्थितियों में हैमिल्टन के समाकल का, सीमाओं $t=0$ तथा $t=t_1$ के बीच, परिकलन कीजिए—

(क) एक गिरते हुए कण की वास्तविक गति के लए, $z=\frac{1}{2}gt^2$;

(ख) दो कपोल-कल्पित गतियों, $z=ct$ तथा $z=at^3$ के लिए, जहाँ नियताको c और a का निर्धारण यों करना है कि आदि तथा अंत-स्थान, हैमिल्टन-सिद्धात के परिणमन-नियमों के अनुसार, वास्तविक पथ के उन स्थानों के सपाती हों। दिखलाइए कि समाकल का मान वास्तविक गति (क) के लिए कपोल कल्पितों (ख) से छोटा है।

६.२. समतल में सापेक्ष गति तथा घूर्णनयुक्त ऋजु रेखा पर गति—एक बार फिर, अब समस्याओं ५.१ तथा ५.२ का लाग्रांज विधि से साधन कीजिए।

६.३. एक बार फिर घूर्णनयुक्त पृथिवी पर स्वतंत्र पतन तथा फूको-लोलक—सत्यापित कीजिए कि ये समस्याएँ भी लाग्राज विधि से, सापेक्ष गति के नियमों के ज्ञान के विना ही हल की जा सकती हैं। यह प्रक्रम[3] चित्ताकर्षक है तथा उसका विचार पंचम अध्याय के प्रक्रम की अपेक्षा सरलतर है। परंतु हाँ, इसमे आने वाले बहुतेरे छोटे-छोटे पदों के सावधानतापूर्वक निरीक्षण की आवश्यकता अवश्य होगी। अवकलों $\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}}$ तथा $\frac{\partial}{\partial q}$ के कर चुकने के उपरांत ही पार्थिव त्रिज्या की विशालता तथा उसके कोणीय वेग की लघुता के कारण सामान्यतः प्रचलित[4] सन्निकटनों को करना होगा; तब तक सभी पदो को रखना होगा।

साधारण गोलीय ध्रुवी निर्देशाकों, r, θ, ψ से प्रारंभ कीजिए, जहाँ r पृथ्वी केंद्र से मापा गया है। फिर आकृति ४९ मे प्रवेशित निर्देशाकों ξ, η, ζ के साथ इनकी तुलना कीजिए। समझिए कि पृथ्वी की त्रिज्या R है और

1. Cusp. 2. Asymptotically 3. Procedure 4. usual

θ_o, ψ_o स्वतन्त्रतापूर्वक गिरते हुए कण के आदिस्थान के, या लोलक के अवलंबन बिंदु के, पृथिवी पृष्ठ पर प्रक्षेप के निर्देशांक हैं। तो पतन या दोलन करते हुए कण m के निर्देशांकों r, θ, ψ तथा ξ, η, ζ के बीच ये संबंध होंगे--

(1) $$\xi = R(\theta - \theta_o),\ \eta = R \sin\theta(\psi - \psi_o),\ \zeta = r - R;$$

तथा

(2) $$\psi_o = \omega t,\ \theta_o = \frac{\pi}{2} - \phi = \theta \text{ अक्षांश-कोटि।}$$

इनसे प्राप्त होते हैं--

$$\dot{\xi} = R\dot{\theta},\ \dot{\eta} = R\sin\theta\ (\dot{\psi} - \omega) + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\ \eta\dot{\theta},\ \dot{\zeta} = \dot{r}\ ;$$

तथा, विलोमतया,

(3) $$r\dot{\theta} = \left(1 + \frac{\zeta}{R}\right)\dot{\xi},\ r\sin\theta\ \dot{\psi} = \left(1 + \frac{\zeta}{R}\right)\dot{\eta}$$

$$+\omega R\left(1 + \frac{\zeta}{R}\right)\sin\theta - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\left(1 + \frac{\zeta}{R}\right)\frac{\eta}{R}\dot{\xi},\ \dot{r} = \dot{\zeta},$$

जिसमें दक्षिणी पार्श्व में आये हुए कोण θ को, (1) के अनुसार ξ का फलन समझना चाहिए।

इन मानों को गतिज ऊर्जा के व्यंजन

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\psi}^2\right)$$

में प्रतिस्थापित करना होगा जो, तब $\dot{\xi}$, $\dot{\eta}$, $\dot{\zeta}$, ξ, η और ζ का फलन हो जाता है। यदि उन पदों को जो पीछे से छोड दिये जायँगे ... .से व्यक्त करें तो T से, उदाहरणत:, हम निम्नलिखित परिकलित कर सकते हैं—

(4) $$\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}} = m\left(1 + \frac{\zeta}{R}\right)^2\dot{\zeta} - m\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\left(1 + \frac{\zeta}{R}\right)\frac{\eta}{R},$$

$$\left\{\ldots\ldots + \omega R\left(1 + \frac{\xi}{R}\right)\sin\theta + \ldots\right\},$$

(5) $$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}} = m\ddot{\xi} - m\omega\cos\theta\ \dot{\eta} + \ldots\ .$$

(6) $$\frac{\partial T}{\partial \xi}=\frac{1}{R}\frac{\partial T}{\partial \theta}=+m\,\omega\cos\theta\,\dot{\eta}+\ldots$$

प्रस्तुत समस्या में स्थितिज ऊर्जा के लिए हम यह ले सकते हैं —

(7) $$V=mg\ (r-R)=mg\ \zeta.$$

सत्यापित करिए कि इस प्रकार स्वतंत्र पतन के लिए समीकरणों (30.5) को और फूको-लोलक के लिए समीकरणों (31.2) को प्राप्त करते हैं जिनसे वे सब परिणाम निकलते हैं जो पहले विकासित किये जा चुके हैं।

६.४. समतल आधार पर लुढ़कते हुए सिलिंडर का "लड़खड़ाना",—त्रिज्या a एक वृत्तीय सिलिंडर का संहति-वितरण विषमांग[1] है जिस कारण सिलिंडर का गुरुत्व केंद्र G अक्ष से s दूरी पर है। एक क्षैतिज समतल पर गुरुत्व के प्रभाव-वश, सिलिंडर लुठन कर रहा है अर्थात् लुढ़क रहा है। समझिए कि सिलिंडर की संहति m है तथा संहति केंद्र से सम्मिति-अक्ष के समांतर जाते हुए अक्ष के प्रति उसका अवस्थितित्व-घूर्ण T है। लाग्रांज विधि से गति का अनुसंधान कीजिए। घूर्णित कोण ϕ का व्यापकीकृत निर्देशांक q की भांति प्रवेश कराइए। गतिज ऊर्जा के परिकलन में, अभिदेश बिंदु को सिलिंडर के

(क) संहति केंद्र पर,

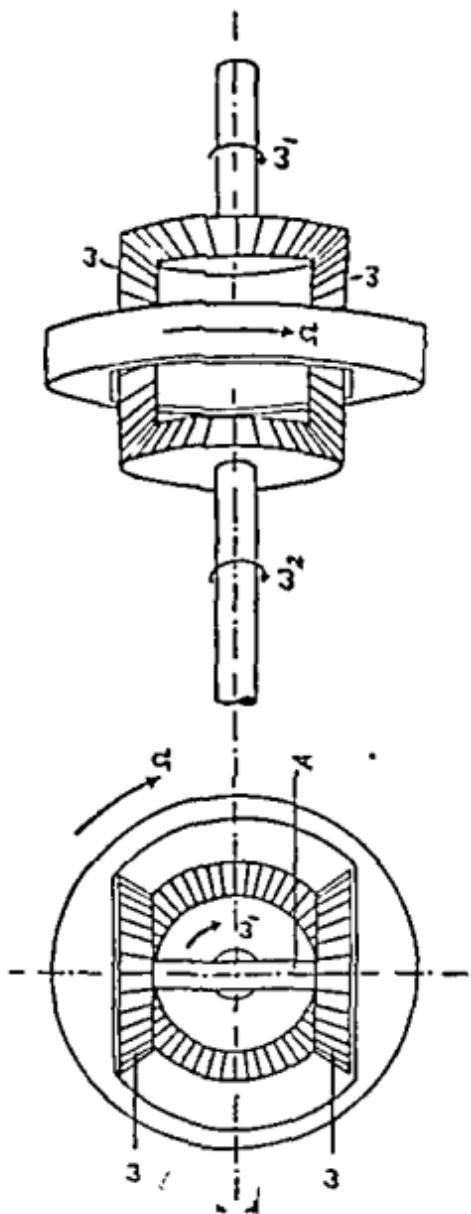
(ख) ज्यामितीय केंद्र पर,

रखिए और सत्यापित कीजिए कि दोनों स्थितियों में ϕ के लिए एक ही अवकल समीकरण निकलता है।

"लघु दोलनों की विधि" से दिखलाइए कि सिलिंडर की साम्यावस्था स्थायी होगी जब G निम्नतम स्थान मे होगा तथा जब G उच्चतम स्थान में होगा तब वह अस्थायी होगी।

६.५. मोटरकार का "डिफरेंशियल" (वैषम्य कारक)। मोटरकार के वे पहिये जिनके द्वारा गाड़ी चलती है अर्थात् जो पिस्टन से संबंधित होते हैं, उन्हे चालित पहिये कहेंगे। यदि चालित पहियों को बिना स्खलन किये हुए चलाना है तो किसी वक्र पर उनको अलग-अलग चालों से जाना होगा। यह काम डिफरेंशियल (आ० ५८) द्वारा प्राप्त किया जाता है। (इसीलिए उसका नाम यहाँ वैषम्य कारक

1. Inhomogeneous

है।) इंजन तो चालित पहियों (Ω) को चलाता है (परन्तु गाड़ी के लिए ये चालन-पहिये होते हैं। आकृति में एक पहिया दिखलाया है)। इन्हीं में

आकृति ५८

मोटरगाड़ी का वैषम्यकारक (डिफरेंशियल)। साथ ही यही (बोल्ट्ज़मान के) दो युग्मित परिपथों के प्रेरण-प्रभाव का प्रतिमान भी है। बायें, गाड़ी की पिछली धुरी का दृश्य। दायें, इस धुरी का पार्श्व दृश्य।

धुरी A लगी हुई होती है। दो कोर-योक्त्र[1] (भिन्न दिशाओं में घूमने वाले कोरदार पहिये), (ω) धुरी A पर इस प्रकार बैठाये होते हैं कि वे A के चारों ओर परस्पर स्वतन्त्रतया घूम सकें। ये स्वयं कोर-योक्त्रों के एक जोड़ (ω_1, ω_2) से फँसे होते हैं जिनपर वे, A के घूमने पर, लुंठन कर सकते हैं (देखिए आ० ५८ के दायें को)।

मोटरगाड़ी के पिछले पहियों की धुरी मध्य में कटी हुई होती है (आ० ५८, दायां)। उसके दक्षिणार्ध के दायें सिरे पर कोर-योक्त्र (ω_1) लगा है, वामार्ध के दायें सिरे पर कोर-योक्त्र (ω_2), अतएव पिछली धुरी के दो अर्ध वैषम्यकारक द्वारा इस प्रकार से युग्मित हो गये कि वे विभिन्न कोणीय वेगों से घूम सकते हैं।

कोणीय वेगों Ω, ω, ω_1 और ω_2 के बीच के चलात्मक संबंधों को स्थापित कीजिए। तदुपरांत, आभासी कर्म के सिद्धात का उपयोग कर, (Ω) पर आरोपित चालन ऐंठ L और (ω_1) तथा (ω_2) पर आरोपित ऐंठे L_1 तथा L_2 के बीच साम्यावस्था का प्रतिबंध व्युत्पन्न कीजिए।

निकाय का गति-समीकरण क्या है? (ω_1) तथा (ω_2) के अवस्थितित्व घूर्णों को क्रमात् I_1 तथा I_2 लीजिए, योक्त्र-जोड़ (ω) का A के अक्ष के प्रति का अवस्थितित्व घूर्ण I और उसी (ω) का चालन-पहिये के अक्ष के प्रतिका I' लीजिए। I' के लिए (Ω) के अंशदान की उपेक्षा कर दीजिए।

यदि एक पिछला पहिया त्वरित हो जाय, उदाहरणतः घर्षण के कम हो जाने से, तो दूसरा पहिया मंदित हो जाता है चाहे चालन–ऐंठ और घर्षणीय ऐंठ वहाँ बराबर भी रहें।

1. Bevel gears

समस्याओं को हल करने के लिए संकेत

इन समस्याओं के प्राय. सभी सख्यात्मक परिकलन स्लाइड-रूल (सर्पी पटरी-विसर्पी गणक) की सहायता से पर्याप्त यथार्थता के साथ किये जा सकते हैं। शीघ्रतापूर्वक सन्निकट हल प्राप्त करने के लिए इस उपयोगी करण (टूल) की ओर स्पष्टतया ध्यान दिला देना चाहिए।

१.१ इसका प्रमाण कि $v_1=v_2=v$ या तो बीजत या ज्यामितीयतया व्युत्पन्न किया जा सकता है। पश्चोक्त रीति में किसी समतलीय रेखाचित्र में v_1 तथा v_2 का समकोणीय निर्देशाकवत् व्यवहार कीजिए।

१.२ वहिष्कृत सहतियों के वेग क्रमात् ये हैं—

$$\frac{2M}{M+m}\,v_o \quad \text{तथा} \quad \frac{M-m}{M+m}\,v_o$$

१.३ यहाँ हम १.२ के सूत्रों को चिह्न-परिवर्तन के साथ प्राप्त करते हैं।

१.४. सत्यापित कर लीजिए कि V का वर्गात्मक समीकरण उसी लघुतम मान v_o को पहुँचाता है जो v के लिए है।

१.५. जिस अवकल समीकरण का समाकल करना है वह है

$$m\dot{v}-\mu a=-mg.$$

t के स्थान में $m=m_o-\mu t$ को स्वतंत्र चर-राशि लेने से हम प्राप्त करते हैं

$$v=-a\ln\left(1-\frac{\mu}{m_o}t\right)-gt;$$

तथा, एक और समाकलन के बाद (z=पृथवी तल से ऊँचाई) ;

$$(1)\qquad z=\frac{am_o}{\mu}\left\{\left(1-\frac{\mu}{m_o}t\right)\ln\left(1-\frac{\mu}{m_o}t\right)+\frac{\mu}{m_o}t\right\}-\tfrac{1}{2}gt^2.$$

छोटे t के लिए, t के उच्चतर घात वाले पदों की उपेक्षा कर, प्राप्त करते हैं—

$$(2)\qquad z=\left(\frac{\mu a}{m_o}-g\right)\frac{t^2}{2}\,.$$

समीकरण (1) का संख्यात्मक परिकलन प्रदान करता है

t	10 सेकंड	30 सेकंड	50 सेकंड
z	0.54 किलो मीटर	5.65 किलो मीटर	18.4 किलो मिटर

१.६ जल का आपेक्षिक गुरुत्व 1 होने के कारण, विंदु की संहति $m=\frac{4\pi}{3}r^3$ है, अर्थात्, $dm=4\pi r^2 dr$ परतु, दूसरी ओर, संघनन[1] में, $dm=4\pi r^2\alpha dt$, जहाँ समानुपातीय—गुणनखंड के लिए α लिया गया है। इससे निकला कि $dr=\alpha dt$ तो r के पदों मे अवकल समीकरण होगा

$$\alpha\frac{d}{dt}\left[r^3v\right]=r^3g.$$

आदि-दशाओं में $r=c$ के लिए $v=v_0$ होने के कारण, इसका साधन होगा

$$v=\frac{g}{\alpha}\frac{r}{4}+\frac{c^3}{r^3}\left[v_0-\frac{g}{\alpha}\frac{c}{4}\right].$$

तो $c=0$ और $v_0=0$ के लिए प्राप्त करते है, क्रमात्,

$$v=\frac{g}{\alpha}\frac{r}{4},\qquad v=\frac{g}{\alpha}\frac{r}{4}\left(1-\frac{c^4}{r^4}\right).$$

१.७ जंजीर के नीचे लटकती हुई तात्कालिक लंबाई x लीजिए। यदि जंजीर की प्रति मात्रक लंबाई की सहति को 1 रख लें तो गति-समीकरण होगा—

$$\frac{d}{dt}\left[x\dot{x}\right]=x\ddot{x}+\dot{x}^2=gx.$$

इसका समाकलन ज़रा कठिन होने के कारण प्रतिस्थापन $x=u^{\frac{1}{2}}$ के बाद दीर्घवृत्तीय समाकल प्राप्त हो जाता है—हमें इसी से सतोष कर लेना होगा कि राशियों $\dot{T}, \dot{V}$ तथा $\dot{Q}$ (प्रति मात्रक समय में कार्नो ऊर्जा हानि) को x, $\dot{x}$ तथा $\ddot{x}$ के पदों मे रख लें और यह दिखला दें कि गति-समीकरण द्वारा निम्नलिखित की प्राप्ति होती है

$$\dot{T}+\dot{V}+\dot{Q}=0;$$

1. Condensation

और इसलिए,

$$\dot{T}+\dot{V}\neq 0.$$

१.८. यहाँ गति-समीकरण है, $l\ddot{x}=gx$. नियत गुणाकों वाले इस गति-समीकरण का साधन (3.24 b) के रूप का होगा। ऊर्जा-सिद्धात की वैधता या तो गति-समीकरण से अवकल रूप मे या उसके निम्नलिखित साधन से समाकल रूप में पढ़ी जा सकती है—

$$x=a\left(e^{\alpha t}+e^{-\alpha t}\right),\ \alpha^2=\frac{g}{l},\ \ a=\frac{x_0}{2}.$$

१.९. समस्या मे दिये हुए सख्यात्मक न्यास (दत्त—data) से चद्र का अपकेन्द्र त्वरण m. sec^{-2} $\left[\text{सहति}\times\frac{1}{\text{सेकड}^2}\right]$ में परिकलित किया जा सकता है। पृथिवी की त्रिज्या r के लिए उसकी प्रारम्भिक परिभाषा ले सकते है कि $r=\frac{2}{\pi}\ 10^7$ मीटर। दूसरी ओर, पृ० २६ की भाँति g के द्वारा गुरुत्वाकर्षणांक G के निरसन के बाद, गुरुत्वाकर्षण नियम प्रदान करता है कि अपकेन्द्र त्वरण $\frac{g}{60^2}$ है। इस प्रकार जो दो संख्यात्मक मान प्राप्त होते है उनमे सतोषजनक सहमति है।

१.१०. निर्देशांकों के लिए रूपातरण समीकरणो का स्थापन कीजिए जैसे कि (2.5) मे परंतु $\alpha_0=\beta_0=\gamma_0=0$ रख दीजिए। देखेगे कि रूपातरित घूर्ण $\mathbf{L}$ के घटक L के घटकों के रैखिक पदपुज होंगे जिनके गुणाक रूपातरण व्यवस्था के समगुणन खडों के बराबर होगे। रूपातरण व्यवस्था के लिए ये संबध है—

$$\rho\gamma_1=\begin{vmatrix}\alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_2 & \beta_3\end{vmatrix},\ \rho\gamma_2=\begin{vmatrix}\alpha_3 & \alpha_1\\ \beta_3 & \beta_1\end{vmatrix},\ldots\ldots\ldots$$

इन्हें लव कोणीयता के प्रतिबंधो द्वारा सिद्ध करना होगा। यहाँ $\rho=\pm 1$, इस बात के अनुसार कि रूपांतरित प्रणाली उसी भाव मे है जिसमे कि प्रारंभिक प्रणाली (इसे "माप एक का रूपातरण" कहते है) या प्रतिकूल भाव मे।

१.११. समी० (6.8) से निम्नलिखित प्राप्त करते हैं [आ० ७ तथा समी० (6.5) के अनुसार, B ऋणात्मक है]

$$\epsilon = \frac{-B}{\frac{GM}{C}} = \frac{|B|}{\frac{GM}{C}}.$$

परिणामवश, दीर्घवृत्त ($\epsilon < 1$) के लिए $\frac{GM}{C} > \left|B\right|$, तथा अतिपरवलय ($\epsilon > 1$) के लिए $\frac{GM}{C} < \left|B\right|$, परंतु $R = \frac{GM}{C}$ वेगालेख वृत्त[1] की त्रिज्या है और $|B|$ केन्द्र की ध्रुव से दूरी। इससे प्रश्न के सिलसिले में किया गया दृढ़ कथन तुरत ही निकल आता है।

नीचे दी हुई सारणी, जिसमें

$$v_0 = \frac{GM}{C} + |B|,$$

से अभिभानु पर ग्रह के वेग का मतलब है, दिखलाती है कि वृत्त तथा परवलय वाली सीमात स्थितियाँ व्यवस्था मे आ जाती हैं।

ग्रहीय प्रक्षेप पथ	ϵ	$\lvert B \rvert$	वेगालेख	v_0
वृत्त	$=0$	$=0$	केन्द्र ध्रुव पर	$\frac{GM}{C}$
दीर्घवृत्त	<1	$<R$	ध्रुव वेगालेख के भीतर	$<\frac{2GM}{C}$
परवलय	$=1$	$=R$	वेगालेख ध्रुव से होकर जाता है	$=\frac{2GM}{C}$
अतिपरवलय	>1	$>R$	ध्रुव वेगालेख के बाहर	$>\frac{2GM}{C}$

1. Hodograph circle.

१.१२. अवकल समीकरणों (6.4) में GM के स्थान पर $\pm \frac{eE}{m}$ रखना होगा, जहाँ उपरला चिह्न (आकर्षण) धनात्मक आयन के लिए है, निचला चिह्न (प्रतिकर्षण) ऋणात्मक आयन के लिए। देखिए कि यहाँ $\dot{x}=0$, $\dot{y}=-v_0$ और ϕ का मतलब वही है जो आ० ६ में है, जिस कारण, समीकरण (6.5) $\phi=\frac{\pi}{2}$ के लिए प्रदान करते हैं—

$$A=\pm\frac{eE}{m}C\,,\quad B=-v_0$$

और तब समी० (6.6) निम्नलिखित हो जाता है—

$$(1) \qquad \frac{1}{r}=\pm\frac{eE}{m_0C^2}(1-\sin\phi)-\frac{v_0}{C}\cos\phi.$$

C एक प्रक्षेपपथ से दूसरे को, y–अक्ष से परे की निशाना लगाने की दिशा की दूरी के साथ, बदलता रहता है। इससे परिणाम यह निकलता है कि ऊपर दिया हुआ समीकरण (1) वक्रों का एक परिवार निरूपित करता है। इस परिवार के अन्वालोप की प्राप्ति के लिए समी० (1) का C के लिए अवकलन करिए और फिर इससे तथा प्रारंभिक समीकरण से C का निरसन कर प्राप्त करिए

$$(2) \qquad x^2=p^2-2py,\quad p=\pm\frac{4eE}{m_0v_0^{\,2}}\,.$$

देखिए कि कोई भी इलेक्ट्रान-पथ अतिपरवलय की केवल एक शाखा ही होता है, परन्तु (1) दोनों शाखाएँ निरूपित करता है। सत्यापित कर लीजिए कि समी० (2) इलेक्ट्रानों के वास्तविक पथों का अन्वालोप केवल प्रतिकर्षण की स्थिति में ही है—सत्यापन सरलतमतया सगत वक्र परिवारों के आलेख्य द्वारा किया जा सकता है।

१.१३. यहाँ § ३ (४) के सरलावर्त दोलनों की विधि का उपयोग सबसे अधिक सुखसाध्य होगा। परन्तु शिक्षाप्रद होगा कि जाँच कर ली जाय कि § ६ की विधियाँ भी वांछित नतीजे पर पहुँचाती है।

१.१४. यहाँ दी हुई नाभिकीय प्रतिक्रिया प्रत्यास्थ टक्कर नहीं है और न ही वह अप्रत्यास्थ टक्कर है। उसे, कहने के लिए, "अतिप्रत्यास्थ" टक्कर कह सकते हैं, क्योंकि यहाँ नाभिकीय बंधन ऊर्जा E को प्राथमिक (प्राइमरी) ऊर्जा E_p

के साथ जोड़ देना होता है। अल्फा-कणों की गतिज ऊर्जा चिर-सम्मत रूप $E_{\alpha}=\frac{1}{2}m_{\alpha}\ v^2_{\alpha}$ में परिकलित की जा सकती है।

तब ऊर्जा तथा संवेग के समीकरणों द्वारा स–संमिति स्थिति के लिए किर्शनर (Kirchner) के फल की प्राप्ति होती है कि

$$\cos\phi=\left(\frac{m_p}{2m_\alpha}\ \frac{E_p}{E+E_p}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

समस्या में कहा हुआ ev (इलेक्ट्रान-वोल्ट) वह ऊर्जा है जो एक वोल्ट ($=10^8$ विभव के वैद्युत चुवकीय मात्रकों) विभवनिपात में से होकर जाने वाले इलेक्ट्रानीय आवेश e ($=1.6\times10^{-20}$ आवेश के वैद्युत चुवकीय मात्रक) को प्राप्त होती है। अतएव एक ev (इलेक्ट्रान-वोल्ट)$=1.6\times10^{-12}$ अर्ग[1]।

प्रोटान की सहति है $m_p=1.65\times10^{-24}$ ग्राम। अतएव अल्फाकण की सहति हुई $m_{\alpha}=6.6\times10^{-24}$ ग्राम। पश्चोक्त की आवश्यकता इसलिए है कि E_{α} पहले ev में व्यक्त की गयी और फिर अर्ग में परिवर्तित की गयी, और Ev से वेग v_{α} को निकालना है। इस प्रकार से प्राप्त हुआ v_{α} का मान के चिरसम्मत रूप को ठीक ठहराता है और दिखलाता है कि समी० (4.11) का आपेक्षिकता-शोधन उपेक्षणीय है।

१.१५. द्वितीय समी० (3.27) में $V_0=O$ रख लीजिए और, कहिए कि $v_0=1$, ताकि मारे हुए कण की टक्कर के बाद की गतिज ऊर्जा $\frac{1}{2}MV^2$ को तुरंत ही $x=\frac{M}{m}$ के फलनवत् परिकलित कर सकें। विशेष बात यह है कि $x=1$ के लिए वह महत्तम निकलती है तथा $x=206$ के लिए छोटी-सी ही— महत्तम मान की केवल १.९ प्रतिशत अर्थात् १.९/१०० मात्र।

इस प्रकार के विचारों से चलते हुए फर्मी ने १९३५ में "उष्मीय" न्यूट्रानों के उत्पादन की अपनी विधि निकाली, अर्थात् एक-समान वेग के मंदग न्यूट्रान वृंद जो बारबार टक्करों द्वारा पैरेफिन में समायी उष्मीय ऊर्जा वाले प्रोटानों के साथ सामता में पहुँच गये हैं।

१.१६. E के निर्देशांक हैं—

1. Erg

(1a) $x = ML = a \cos u$

$= SL - SM = r \cos\phi - \epsilon a,$

(1b) $y = EL = r \sin\phi = b \sin u.$

दीर्घवृत्त का r, ϕ में ध्रुवी समीकरण इस रूप मे लिखिए—

(1) $r = \epsilon r \cos\phi + p, \quad p = a(1 - \epsilon^2).$

इसमें (1a) से $r \cos\phi$ का मान प्रतिस्थापित कर प्राप्त कीजिए

(2) $r = \epsilon(a \cos u + \epsilon a) + a(1 - \epsilon^2) = a(1 + \epsilon \cos u)$

इस समी० (2) का अवकलन प्रदान करता है

(3) $dr = -\epsilon a \sin u du$

समी० (1) का अवकलन देता है

$$\epsilon \sin\phi \, d\phi = -p \frac{dr}{r^2}.$$

इससे प्राप्त होता है

(4) $\frac{-p}{\epsilon \sin\phi} \dot{r} = r^2 \dot{\phi} = C,$

जहाँ C क्षेत्रफलीय वेगांक है। समीकरणों (1b) और (3) से समी० (4) यों रूपांतरित हो जाता है

$$\frac{pa}{b} r\dot{u} = C.$$

अंततः (2) से r को प्रतिस्थापित कर लीजिए कि निम्नलिखित अवकल समीकरण की प्राप्ति हो जाय —

(5) $(1 + \epsilon \cos u) du = n \, dt.$ (6) $n = \frac{Cb}{pa^2}$

इस (5) का समाकलन प्रदान करता है

$$u - \epsilon \sin u = nt.$$

यहाँ समाकलनांक लुप्त हो जाता है क्योंकि हमने मान लिया था कि समय को इस प्रकार मापेंगे कि $u=0$ के लिए $t=0$. राशि nt को माध्य अनमली कहते हैं और, खगोल विज्ञान मे अन्य अनमलियों की भांति, वह अभिमानु से मापी जाती है। नाम इस बात से निकला कि समी ०(6.9) द्वारा ऊपर दिये हुए (6) का दक्षिणाग $\frac{2\pi}{T}$ में रूपांतरित हो जाता है।

के साथ जोड़ देना होता है। अल्फा-कणों की गतिज ऊर्जा चिर-सम्मत रूप $E_\alpha = \frac{1}{2} m_\alpha \ v^2_\alpha$ में परिकलित की जा सकती है।

तब ऊर्जा तथा संवेग के समीकरणों द्वारा स-समिति स्थिति के लिए किर्श्नर (Kirchner) के फल की प्राप्ति होती है कि

$$\cos\phi = \left(\frac{m_p}{2m_\alpha} \ \frac{E_p}{E+E_p}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

समस्या में कहा हुआ ev (इलेक्ट्रान-वोल्ट) वह ऊर्जा है जो एक वोल्ट ($=10^8$ विभव के वैद्युत चुबकीय मात्रकों) विभवनिपात में से होकर जाने वाले इलेक्ट्रानीय आवेश e ($=1.6\times10^{-20}$ आवेश के वैद्युत चुबकीय मात्रक) को प्राप्त होती है। अतएव एक ev (इलेक्ट्रान-वोल्ट) $=1.6\times10^{-12}$ अर्ग[1]।

प्रोटान की संहति है $m_p = 1.65\times10^{-24}$ ग्राम। अतएव अल्फाकण की संहति हुई $m_\alpha = 6.6\times10^{-24}$ ग्राम। पश्चोक्त की आवश्यकता इसलिए है कि E_α पहले ev में व्यक्त की गयी और फिर अर्ग में परिवर्तित की गयी, और Ev से वेग v_α को निकालना है। इस प्रकार से प्राप्त हुआ v_α का मान के चिरसम्मत रूप को ठीक ठहराता है और दिखलाता है कि समी० (4.11) का आपेक्षिकता-शोधन उपेक्षणीय है।

१.१५. द्वितीय समी० (3.27) में $V_o = O$ रख लीजिए और, कहिए कि $v_o = 1$, ताकि मारे हुए कण की टक्कर के बाद की गतिज ऊर्जा $\frac{1}{2}MV^2$ को तुरत ही $x = \frac{M}{m}$ के फलनवत् परिकलित कर सकें। विशेष बात यह है कि $x = 1$ के लिए वह महत्तम निकलती है तथा $x = 206$ के लिए छोटी-सी ही— महत्तम मान की केवल १.९ प्रतिशत अर्थात् १.९/१०० मात्र।

इस प्रकार के विचारों से चलते हुए फर्मी ने १९३५ में "उष्मीय" न्यूट्रानों के उत्पादन की अपनी विधि निकाली, अर्थात् एक-समान वेग के मदग न्यूट्रान वृद जो बारंबार टक्करों द्वारा पैरेफिन में समायी उष्मीय ऊर्जा वाले प्रोटानों के साथ सामता में पहुँच गये हैं।

१.१६. E के निर्देशांक हैं—

1. Erg

(1a) $x = ML = a \cos u$

$= SL - SM = r \cos\phi - \epsilon a,$

(1b) $y = EL = r \sin\phi = b \sin u.$

दीर्घवृत्त का r, ϕ में ध्रुवी समीकरण इस रूप में लिखिए—

(1) $r = \epsilon r \cos\phi + p, \quad p = a(1 - \epsilon^2).$

इसमे (1*a*) से $r \cos\phi$ का मान प्रतिस्थापित कर प्राप्त कीजिए

(2) $r = \epsilon (a \cos u + \epsilon a) + a(1 - \epsilon^2) = a(1 + \epsilon \cos u)$

इस समी० (2) का अवकलन प्रदान करता है

(3) $dr = -\epsilon a \sin u\, du$

समी० (1) का अवकलन देता है

$$\epsilon \sin\phi\, d\phi = -p\frac{dr}{r^2}.$$

इससे प्राप्त होता है

(4) $$\frac{-p}{\epsilon \sin\phi}\dot{r} = r^2\dot{\phi} = C,$$

जहाँ C क्षेत्रफलीय वेगांक है। समीकरणों (1*b*) और (3) से समी० (4) यों रूपातरित हो जाता है

$$\frac{pa}{b} r\dot{u} = C.$$

अंततः (2) से r को प्रतिस्थापित कर लीजिए कि निम्नलिखित अवकल समीकरण की प्राप्ति हो जाय—

(5) $(1 + \epsilon \cos u)du = n\, dt.$ (6) $n = \dfrac{Cb}{pa^2}$

इस (5) का समाकलन प्रदान करता है

$$u - \epsilon \sin u = nt.$$

यहाँ समाकलनांक लुप्त हो जाता है क्योंकि हमने मान लिया था कि समय को इस प्रकार मापेंगे कि $u=0$ के लिए $t=0$. राशि nt को माध्य अनमली कहते हैं और, खगोल विज्ञान मे अन्य अनमलियों की भाँति, वह अभिभानु से मापी जाती है। नाम इस बात से निकला कि समी ०(6.9) द्वारा ऊपर दिये हुए (6) का दक्षिणाग $\frac{2\pi}{T}$ में रूपातरित हो जाता है।

२

२.१ प्रश्न के प्रथम प्रतिबंध द्वारा समीकरण

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial f}{\partial \phi}\,\delta\phi + \frac{\partial f}{\partial \psi}\,\delta\psi$$

को ऐसी स्थिति में पहुँचाइए कि दक्षिणांश के लिए निम्नलिखित की प्राप्ति हो

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} a \cos\psi + \frac{\partial f}{\partial y} a \sin\psi + \frac{\partial f}{\partial \phi}\right)\delta\phi + \frac{\partial f}{\partial \psi}\delta\psi.$$

अब $\delta\phi$ तथा $\delta\psi$ को अलग-अलग $=0$ रख सकते हैं। अतएव

$$(2) \qquad \frac{\partial f}{\partial \psi} = 0;$$

तथा

$$(3) \qquad a\frac{\partial f}{\partial x}\cos\psi + a\frac{\partial f}{\partial y}\sin\psi + \frac{\partial f}{\partial \phi} = 0.$$

पिछला समीकरण सब ψ यों के लिए वैध है और इसलिए ψ के लिए अवकलित किया जा सकता है। समी० (2) की सहायता से यह प्रदान करता है—

$$(4) \qquad -a\frac{\partial f}{\partial x}\sin\psi + a\frac{\partial f}{\partial y}\cos\psi = 0;$$

तथा, ψ के लिए एक और अवकलन के बाद,

$$(5) \qquad a\frac{\partial f}{\partial x}\cos\psi + a\frac{\partial f}{\partial y}\sin\psi = 0.$$

अब (4) और (5) से निकलता है

$$(6) \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

तो (3) के अनुसार,

$$(7) \qquad \frac{\partial f}{\partial \phi} = 0.$$

भी होना चाहिए। समीकरण वृंद (2), (6) और (7) दिखलाते हैं कि x, y, ϕ तथा ψ पर निर्भर करता हुआ कोई प्रतिबंध $f=0$ होता ही नहीं, अर्थात् यह कि हमारा निकाय अपूर्णपदीय है। यह उपपत्ति G. Hamel, (हामल) की "Elementare Mechanik" (प्रारंभिक यांत्रिकी) 2nd Ed., Leipzig 1922 की है।

२.२. इजन का "कर्म चित्र"[1] खीच लीजिए अर्थात् 0 से π तक के क्रैंक-कोण[2] के भुजाकों पर L-वक्र तथा W-रेखा। लक्ष्य कीजिए कि L-वक्र और भुजाक के बीच का क्षेत्रफल एव W-रेखा तथा भुजाक के बीच का क्षेत्रफल, ये दोनों क्षेत्रफल बराबर होगे। इससे L_0 और W के बीच एक सबध की प्राप्ति होती है। महत्तम और अल्पतम कोणीय वेग, ω_{max} तथा ω_{min} से सबधित कोण, ϕ_2 तथा ϕ_1, रेखाचित्र मे L-तथा W-वक्रो के प्रतिच्छेद-बिंदु हैं; $\sin\phi_1=\sin\phi_2=\frac{2}{\pi}$; $\phi_2=\pi-\phi$; $\phi_1=39°33' = 0\ 69$ रेडियन। कोणों ϕ_2 और ϕ_1 के बीच गतिपालक चक्र की गतिज ऊर्जा निर्धारित कीजिए और उसे I, ω_m तथा δ के पदों मे व्यक्त कीजिए। उसी अतराल के लिए लिखा हुआ ऊर्जा समीकरण आकाक्षित I का मान इस रूप मे, करता है—

$$I=\frac{W}{\delta\omega_m^2}\left(\pi\cos\phi_1-\pi+2\phi_1\right)=\frac{0.66}{\delta\omega_m^2}W.$$

यदि

$$N=\frac{W\omega}{75}HP \text{ (अश्व शक्ति) तथा } n=\frac{60}{2\pi}\omega.r.p.m. \text{ र.प.म.—घूर्णन}$$

प्रति सेकड) तो, मात्रकों की व्यावहारिक पद्धति में, प्राप्त होता है:

$$I\cong 43{,}400\frac{N}{\delta n^2}\ kg.m.sec^2.$$

(किलोग्राम-मीटर-सेकंड²)।

२.३. पृथिवी की त्रिज्या के मान के लिए प्रश्न १.९ देखिए। दिन के दैर्घ्य के संख्यात्मक परिकलन में $(8\pi)^{\frac{1}{2}}=5$ रख लीजिए।

२.४. (क) यदि तुलादड को अपने स्थान मे स्थिर समझ लें तो चरखी (घिरनी) के आभासी घूर्णन $\delta\phi$ में केवल गुरुत्व तथा चरखी पर के अवस्थितित्व-बलो के बीच की साम्यावस्था का ही विचार करने की आवश्यकता हे (ऐठ समीकरण)। इस प्रकार बाटों के त्वरण $\ddot{x}$ की प्राप्ति होती है जो g का एक छोटा सा अश मात्र निकलता है।

1. The work diagram   2. Crank angle

(ख) तुला दंड के एक आभासी घूर्णन को ऊपर दिये हुए से जोड़ दीजिए। यहाँ अवस्थितित्व बलों के तुलादड के आलव के प्रति के घूर्णो का प्रवेश कराना पड़ता है। तो ज्ञात होता है कि साम्य नही रहता। जब तक वाट p गिरता रहता है तुला दड का पलडे की ओर नीचे को विक्षेप होता है। भाराधिक्य के मानांकन में तुलादंड की लंबाई की अपेक्षा में घिरनी (चरखी) के व्यास की उपेक्षा कर सकते हैं। उसी सन्निकटन का उपयोग करते हुए एक अन्य प्रक्रम यह होगा कि पलड़े पर के बाट की तुलना तुलादड के दूसरे सिरे पर के बाटों और अवस्थितित्व-बलों कारित बोझ से की जाय।

२.५. नत समतल का समीकरण यह लीजिए—

(1) $$F(z,x,t)=z-ax-\phi(t)=0.$$

यह $a=\tan\alpha$ नत समतल का क्षैतिज समतल से नियत नति-कोण α को निर्धारित करता है; $\phi(t)$ उसका z-अक्ष से प्रतिच्छेद है जो समय के साथ बदलता रहता है। लाग्रांज के प्रथम प्रकार के समीकरण (12.9a) प्रदान करते हैं—

(2) $\ddot{x}=-\lambda a, \quad \ddot{z}=\lambda-g.$

λ को निर्धारित करने के लिए, (1) को t के लिए दो बार अवकलित कीजिए जिससे प्राप्त होता है—

(3) $\ddot{z}-a\ddot{x}=\ddot{\phi}(t).$

(2) का (3) में प्रतिस्थापन λ प्रदान करता है और अब (2) का समाकलन सहज ही किया जा सकता है। आदि प्रतिबंधों के ये होते हुए कि $t=0$ पर $\dot{x}=\dot{z}=0$, $x=x_o$, $z=z_o$, प्राप्त होते हैं

$$x=x_o-\frac{a}{1+a^2}\left(\phi(t)-\phi(0)-\dot{\phi}(0)t+g\frac{t^2}{2}\right),$$

$$z=z_o+\frac{1}{1+a^2}\left(\phi(t)-\phi(0)-\dot{\phi}(0)t-ga^2\frac{t^2}{2}\right)$$

इनसे $\ddot{\phi}=+g$ के लिए प्राप्त करते हैं—

$$x=x_o-g\frac{t^2}{2}\sin 2\alpha, \quad z=z_o+g\frac{t^2}{2}\cos 2\alpha;$$

तथा, $\ddot{\phi}=-g$ के लिए,

$$x=x_o, \quad z=z_o-g\frac{t^2}{2},$$

जैसे कि स्वतंत्र पतन में। $\lambda=0$ केवल अंतिम अनुमान में; अन्यथा λ स्खलन करते हुए पिंड के प्रतिकूल एक दाब की भांति काम में आता है और इसलिए कर्म करता है।

यह समस्या दालांबेर-सिद्धांत द्वारा, λ का प्रवेश कराये बिना ही, हल की जा सकती है। कारण कि समय का परिणमन नहीं करना है (देखिए पृ० ९२), आभासी विस्थापनों के लिए ऊपर दिये (१) से प्राप्त करते हैं कि $\delta_z=a\delta x$. तो दालांबेर सिद्धांत से यह परिणाम निकलता है कि—

$$\ddot{x}+(g+\ddot{z})a=0.$$

(3) के साथ इस समीकरण द्वारा $\ddot{x}$ और $\ddot{z}$ को सीधे ही सीधे परिकलित कर सकते हैं। यह उदाहरण निर्दर्शित करता है कि लाग्राज समीकरणों की अपेक्षा दालांबेर-सिद्धांत द्वारा अधिकतर सीधे-सीधे और अधिकतर सहजतया समस्याएँ हल की जा सकती हैं। परंतु, दूसरी ओर, पूर्वोक्त (लाग्राज समीकरण) का यह लाभ है कि नियंत्रण बलों का मात्रात्मकतया निर्धारण हो जाता है।

२६. प्रकरण ११ के (१) में किसी बाह्य ऐंठ के प्रभाव के अधीन घूर्णन करते हुए निकाय के त्वरण समीकरण को व्युत्पन्न करने के लिए दालांबेर सिद्धांत का उपयोग किया गया था। वहाँ घूर्णन अक्ष के प्रति एक आभासी घूर्णन $\delta\phi$ का प्रवेश कराया था। उस अक्ष को यहाँ अपना x-अक्ष लेंगे। केवल स्पर्शीय अवस्थितित्व बल ही प्रासंगिक थे क्योंकि अभिलंब अर्थात् अपकेंद्र बल घूर्णन $\delta\phi$ में कोई कर्म न करते थे।

यहाँ वे बल चाहिए जो किसी एक-समान घूर्णन में धुराधारों A और B पर पड़ते हैं, या, उनके स्थान, वहाँ की प्रतिक्रियाएँ A और B । यहाँ केवल अपकेन्द्र बलों से ही मतलब है, स्पर्शीय अवस्थितित्व-बल एक-समान घूर्णन में नहीं आते। यदि आभासी स्थानांतरणों δy, δz का प्रवेश करावे तो आभासी कर्म δy और δz तथा एक-एक सहति अल्पांशों पर आरोपित अपकेंद्र बलों के y- और z- घटकों के योग का गुणनफल हो जाता है। ये बल हैं—

$$dmy\omega^2,\ dmz\omega^2,$$

एक समाकलन संपूर्ण सहति m की साधारण झूलनगति के अवस्थितित्वीय घटकद्वय Y और Z प्रदान करता है जिन्हें सहति केन्द्र पर अनुप्रयुक्त समझना होगा।

तदनन्तर y- तथा z- अक्षों के प्रति के आभासी घूर्णनों, क्रमात्, $\delta\phi_y$ और $\delta\phi_z$ का प्रवेश कराते हैं । इनमें किया गया आभासी कर्म

$$-\delta\phi_y \int dm\ xz\omega^2 \text{ तथा } \delta\phi_z \int dm\ xy\omega^2$$

द्वारा दिया जायगा। वे निम्नलिखित ऐंठों के समान हैं—

$$L_y = -I_{xz}\omega^2 \text{ तथा } L_z = I_{xy}\omega^2.$$

धुरायार प्रतिक्रियाओं A और B के निर्धारण के लिए, xyz निर्देशांक प्रणाली का मूल-बिंदु, कहिए कि, धुराधार A पर स्थापित कीजिए, दोनों धुराधारों के बीच की दूरी को l और संहति केंद्र के y- तथा z- दिशाओं के निर्देशांकों को η तथा ζ कहिए। तो चार अज्ञातों, Ay, Az, By, Bz को जानने के लिए दो घटक समीकरणों,

(1)
$$A_y + B_y = -m\eta\omega^2,$$
$$A_z + B_z = -m\zeta\omega^2$$

तथा दो घूर्ण समीकरणों

(2)
$$lB_z = -I_{xz}\omega^2,$$
$$lB_y = -I_{xy}\omega^2,$$

की प्राप्ति होती है।

स्पष्ट होगा कि इजीनियरी के दृष्टिकोण से धुराधारों में आवर्ततः परिणमन करती हुई ये प्रतिक्रियाएँ वांछित नही हो सकती। उन्हें हटाने के लिए केवल यही नही आवश्यक है कि संहति-केन्द्र घूर्णनाक्ष पर स्थित हो, अर्थात् समी० (1) में $\eta = \zeta = 0$; वरन् यह भी कि घूर्णनाक्ष सहति-वितरण का मुख्याक्ष हो अर्थात् समी० (2) में $I_{xz} = I_{xy}$, इस संबध में देखिए चतुर्थ अध्याय, २२वाँ प्रकरण, समी० (15a) के पास। इस दूसरे प्रतिबध का परिपूर्णन उतने ही महत्त्व का है जितना कि पहले का परिपूर्णन। दोनों प्रतिबंधों के परिपूर्णन को घूर्णनयुक्त पिंड का "सतुलन" कहते हैं।

२.७. समझिए कि रज्जु (डोरी) मे तनाव S और किसी दिये हुए क्षण में उसके खुल गये हुए भाग की लवाई z है। तो स्थिति (m) के लिए,

$$I\dot{\omega} = Sr, \quad S = m(g - \ddot{z})$$

जहाँ $\dot{z}$ तथा $\ddot{z}$ धनात्मक हैं। $\dot{z} = r\omega$ के कारण,

(1)
$$\ddot{z} = r\dot{\omega} = \frac{Sr^2}{I},$$

और

(2) $$S=\frac{mg}{1+\frac{mr^2}{I}},$$

स्थिति (ख) में—

घूर्णन ω उसी दिशा में रहता है। रज्जु के तनाव की ऐंठ ω के विरुद्ध काम करती है। $\dot{z}$ ऋणात्मक हो जाता है और प्राप्त करते हैं—

(3) $$\dot{z}=-r\omega,\ \ddot{z}=-r\dot{\omega},=+\frac{Sr^2}{I},$$

तथा

(4) $$S=\frac{mg}{1+\frac{mr^2}{I}}$$

दोनों स्थितियों (क) तथा (ख) मे रज्जु-तनाव वही है और समय में नियत रहता है। घूर्णनयुक्त पिंड के भार से वह कम है।

(क) और (ख) के बीच के सक्रमण अवस्थान मे हाथ पर लक्षणीय कर्पण का अनुभव होता है जो धनात्मक सवेग $m\dot{z}$ से ऋणात्मक हो जाने के सगत है। इस अतराल मे S समी० (2) मे दिये हुए से अधिक हो जाता है।

२.८. समीकरण (18.7) के अनुसार कण के गोल-पृष्ठ को छोड़ देने का प्रतिबंध यह है कि—

$$\text{या तो } \lambda=0 \text{ या } R_n=0,$$

जिस कारण (18.6) से

(1) $$mg\frac{z}{l}=-\frac{m}{l}(x\ddot{x}+y\ddot{y}+z\ddot{z}).$$

अब, गोले पर प्रत्येक पथ के लिए

$$x\dot{x}+y\dot{y}+z\dot{z}=0$$

अर्थात्

$$x\ddot{x}+y\ddot{y}+z\ddot{z}=-(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)=-v^2;$$

जिस कारण, (1) के स्थान मे हम लिख सकते है

(2) $$\frac{mgz}{l}=\frac{mv^2}{l}.$$

दक्षिण पार्श्व पथ पर के अपकेन्द्र वल के बराबर नहीं, क्योंकि प्रस्तुत स्थिति में पथ भूरेखा नहीं है। प्रकरण, ४० के मन्या प्रमेय से सहमत होते हुए भी वह इस अपकेन्द्र-वल के गोलीय पृष्ठ के अभिलंब पर प्रक्षेप के बराबर है।

ऊर्जा-समीकरण से

(3) $$v^2 = v_0^2 - 2g(z - z_0).$$

अतएव समी० (2) आदि मानों v_0, z_0 के पदों में यों लिखा जा सकता है—

(4) $$3z = 2z_0 + \frac{v_0^2}{g} = 2(z_0 + h_0),$$

जहाँ $h_0 = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g}$ = वेग v_0 से संगत स्वतत्र पतन की ऊँचाई।

३

३.१. प्राय. ऊर्ध्वाधरतया लटकते हुए लोलक के निर्देशांक x तथा y प्रथम कोटि की अल्प राशियाँ होंगे और z तो द्वितीय कोटि की अल्प राशियों तक $-l$ के बराबर होगा। इस कारण (18.2) का तीसरा समीकरण, द्वितीय कोटि की राशियों तक, निम्नलिखित का प्रदान करता है—

(1) $$\lambda = -\frac{mg}{l};$$

और (18.2) के प्रथम दो समीकरणों द्वारा, समस्या १.१३ की भाँति, नीचे दी हुई वृत्तीय आवृत्ति की एक सरल आवर्त दीर्घवृत्तीय गति का निर्धारण करते हैं। वृत्तीय आवृत्ति है—

(2) $$\frac{2\pi}{T} = \left(\frac{g}{l}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

दीर्घवृत्तीय गति के क्षेत्रफलीय वेगाक C के लिए निम्नलिखित होगा—

(3) $$C = \frac{2\pi ab}{T} = \left(\frac{g}{l}\right)^{\frac{1}{2}} ab \to 0;$$

और ऊर्जांक E के लिए (आदि दशा, $\theta_0 = \epsilon$, $\dot{\theta}_0 = 0$,)

(4) $$E = T + V = mgl\left(-1 + \frac{\epsilon^2}{2}\right).$$

1. Meusnier

तो $u=\eta-1$ के साथ (18.11) से प्राप्त होता है

$$U=-\frac{4g}{l}\left(\eta-\frac{\epsilon^2}{2}\right)\eta-\frac{C^2}{l^4}=\frac{4g}{l}\left(\eta_1-\eta\right)\left(\eta-\eta_2\right).$$

जहाँ

$$\eta_{1,2}=\frac{\epsilon^2}{4}\pm\left(\frac{\epsilon^4}{16}-\frac{C^2}{4gl^3}\right)^{\frac{1}{2}}$$

तो अब हम (18.15) से प्राप्त करते हैं—

(5) $$2\pi+\Delta\phi=\frac{C}{l(lg)^{\frac{1}{2}}}\int_{\eta_2}^{\eta_1}\frac{d\eta}{\eta[(\eta_1-\eta)(\eta-\eta_2)]^{\frac{1}{2}}}.$$

समी० (46.11) के नमूने का एक प्रतिस्थापन (5) के समाकल को निम्नलिखित सुज्ञात समाकल में रूपांतरित कर देता है—

$$\int_0^{\pi}\frac{dv}{A+B\cos v}=\frac{\pi}{(A^2-B^2)^{\frac{1}{2}}},$$

जहाँ

$$A=\frac{\epsilon^2}{4};\ B=\left(\frac{\epsilon^4}{16}-\frac{C^2}{4gl^3}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

तो अब (5) प्रदान करता है कि $\Delta\phi=0$ और यही सिद्ध करना था।

३.२. समस्या का प्रथम दृढ़-कथन, $|C|$ के समीकरण (19.10) का ω के लिए अवकलन द्वारा, तुरंत ही सिद्ध कर दिया जा सकता है। द्वितीय दृढ़ कथन भी उसी प्रकार $|C|\ \omega$ को ω के लिए अवकलन करने से सिद्ध किया जाता है।

३.३. अवमदन-ऐंठ तथा प्रत्यानयन-ऐंठ के समानुपातीयता-गुणनखंडों को क्रमात् $2\rho I$ तथा $\omega_o^2 I$ से सूचित कीजिए। तो समी० (19.9) को थोड़े से भेदों के साथ गैल्वानोमापी के गति-समीकरण की भाँति प्राप्त करते हैं। भेद यह है कि दक्षिणाग अब एक नियतांक C हो जाता है और संकेतन में x के स्थान α हो जाता है। निम्नलिखित व्यापक साधन

$$\alpha=C+e^{-\rho t}(a\cos[(\omega_o^2-\rho^2)^{\frac{1}{2}}t]+b\sin[(\omega_o^2-\rho^2)^{\frac{1}{2}}t]$$

के नियतांकों a तथा b को इन प्रतिबंधों के अनुकूल कर लीजिए कि $t=0$ पर $\alpha=\dot{\alpha}=0$ एवं नियतांक C को इस प्रतिबंध के अनुकूल कि जैसे $t\to\infty$ वैसे $\alpha\to\alpha_\infty$

स्थिति (क) में कम होते हुए दोलनों वाली एक क्षणभंगुर गति की प्राप्ति होती है और स्थिति (ग) में, अंतिम स्थान की ओर एकैक दिग्गामी एक क्षणकालिक गति। स्थिति (ख) को (क) किंवा (ग) की सीमांत स्थिति समझना चाहिए। उसके लिए एक दीर्घकालिक पद की प्राप्ति होती है जिसमें t गुणनखंडवत् आता है।

३४. समस्या के (क) भाग में दालंबेर सिद्धांत (x, y=दोलायमान संहति-बिंदु के निर्देशांक, y ऊपर की ओर धनात्मक) की अभियाचना है कि—

$$\ddot{x}\delta x+(\ddot{y}+g)\delta y=0. \tag{1}$$

नियंत्रण-समीकरण निम्नलिखित है—

$$(x-\xi)^2+y^2=l^2 \tag{2}$$

इसका परिणमन (t, और इसलिए ξ भी, स्थिर रखते हुए) देता है

$$(x-\xi)\delta x+y\delta y=0 \tag{3}$$

(1) तथा (3) के संयोग का परिणाम होता है

$$y\ddot{x}-(x-\xi)(\ddot{y}+g)=0. \tag{4}$$

(2) का t के लिए दो बार अवकलन x तथा y का द्वितीय समीकरण प्रदान करता है। यह (4) के साथ, समस्या का यथार्थ अवकल समीकरण प्रस्तुत करता है।

छोटे-छोटे कंपनों की स्थिति को जाते समय स्मरण रखना चाहिए कि $(x-\xi)$ प्रथम कोटि की अल्प राशि है जिस कारण, (2) के अनुसार, अल्प राशियों की द्वितीय कोटि तक $y=-l$ और तब $\dot{y}$ तथा $\ddot{y}$ द्वितीय कोटि की अल्पराशियाँ होंगी। अतएव (4) निम्नलिखित हो जाता है—

$$l\ddot{x}+(x-\xi)g=0. \tag{5}$$

इस $x-\xi$ को u के बराबर रख, विषमाग लोलक समीकरण की प्राप्ति होती है—

$$\ddot{u}+\frac{g}{l}u=-\ddot{\xi}, \tag{6}$$

जो दिखलाता है कि $m\ddot{\xi}$ चालन बल की भाँति काम करता है। समाकलन पृ० १३६ की भाँति किया जाता है। अवलंबन बिंदु तथा संहति बिंदु की गतियों के बीच का कला-संबंध, जिस पर समस्या की मूल रचना में जोर दिया गया था, आकृति ३१ (पृ० १३७) के अनुरूप है। शिक्षाप्रद होगा कि एक प्रयोग किया जाय जिसमें एक डोरी के निचले सिरे पर कोई बाट बँधा हो और जिसका उपरला सिरा हाथ में लिया हुआ इधर-ऊधर क्षैतिजतया चलाया जाय। जब हाथ जल्दी-

जल्दी चलाते हैं (अनुनाद की स्थिति से ऊपर) तब दोनों बिंदुओं की कला-विरुद्ध गति बिलकुल साफ दिख जाती है।

लाग्राज के प्रथम प्रकार के समीकरणों वाली विधि का उपयोग करते हुए, y के लिए लाग्राज-समीकरणों से ज्ञात होता है कि द्वितीय कोटि की अल्प राशियों तक $\lambda=-\frac{g}{l}$ और x-समीकरण से समी० (5) प्राप्त होता है।

समस्या के (ख) भाग में समी० (1) वैध रहता है। प्रतिबंध (2) निम्नलिखित हो जाता है—

$$x^2+(y-\eta)^2=l^2. \tag{7}$$

इसका परिणमन, (4) के स्थानमें निम्नलिखित प्रदान करता है—

$$(y-\eta)\ddot{x}-x(\ddot{y}+g)=0. \tag{8}$$

यदि x को प्रथम कोटि की अल्पराशि की भांति ले लेवें तो (7) से, द्वितीय कोटि की अल्प राशियों तक, प्राप्त होता है—

$$y-\eta=-l, \ddot{y}=\ddot{\eta}. \tag{9}$$

इससे (8) हो जाता है—

$$\ddot{x}+\frac{\ddot{\eta}+g}{l}\,x=0. \tag{10}$$

लाग्रांज के प्रथम प्रकार के समीकरणों से भी यही परिणाम प्राप्त होता है, क्योंकि y-समीकरण निम्नलिखित मूल्य प्रदान करता है—

$$\lambda=-\frac{\ddot{\eta}+g}{l}, \tag{11}$$

बशर्ते कि सन्निकटन (9) का उपयोग किया जाय जिससे कि x-समीकरण (10) के सर्वसम हो जाता है।

यदि अवलम्बन बिंदु ऊपर को $+g$ के नियत (निश्चर) त्वरण से उठाया जाय तो परिणाम निकलता है कि गुरुत्व बल दूना हो गया ज्ञात होता है। यदि यह बिंदु नीचे को $-g$ से चलाया जाय तो गुरुत्व बल निरस्त हुआ जान पड़ता है। यह गुरुत्व तथा त्वरण के बीच एक तुल्यता की ओर लक्ष्य करता है, जिसने ही, गुरुत्वीय तथा अवस्थितित्वीय सहतियों की समता (पृ० २४) के साथ, आइन्सटाइन के गुरुत्वाकर्षणवाद की नीव डाली थी।

३.५ बिंदुओं C तथा D पर तनावों की साम्यावस्था (अवश्यंभावी, क्योंकि तार भारहीन है!) अभियाचना करती है कि—

(3)
$$S_1\frac{x_1-x_3}{l_1}=S\frac{x_3}{a}+S\frac{x_2-x_4}{a},$$
$$S_2\frac{x_2-x_4}{l_2}=S\frac{x_4}{a}+S\frac{x_4-x_3}{a}$$

जिस कारण, समस्या मे दिये समी० (1) से, और
$$\sigma_1=\frac{m_1g}{S}\frac{a}{l_1} \quad \text{तथा} \quad \sigma_2=\frac{m_2g}{S}\frac{a}{l_2}$$
के साथ, प्राप्त करते हैं—

(4)
$$\sigma_1x_1=(2+\sigma_1)x_3-x_4,$$
$$\sigma_2x_2=(2+\sigma_2)x_4-x_3.$$

यह पूर्वकल्पित है कि युग्मन दुर्बल है, जिस कारण σ_1 तथा σ_2 अल्प सख्याएँ हैं और (4) के दक्षिणागो में उन्हें काट सकते हैं। तो x_3, x_4 के लिए हल करने से प्राप्त होता है—

(5)
$$x_3=\frac{2}{3}\sigma_1x_1+\frac{1}{3}\sigma_2x_2,$$
$$x_4=\frac{2}{3}\sigma_2x_2+\frac{1}{3}\sigma_1x_1;$$

और (2) में प्रतिस्थापन प्रदान करता है—

(6)
$$\ddot{x}_1+\frac{g}{l_1}(1-\sigma_1)x_1=\frac{1}{3}\frac{g}{l_1}(\sigma_2x_2-\sigma_2x_1),$$
$$\ddot{x}_2+\frac{g}{l_2}(1-\sigma_2)x_2=\frac{1}{3}\frac{g}{l_2}(\sigma_1x_2-\sigma_2x_2).$$

इन युगपत् अवकल समीकरणों के साथ ठीक (20.10) की भाँति का उपचार करना होगा। प्रस्तुत समस्या के लिए, उसमें प्रवेशित राशियों ω_1, ω_2, k_1, k_2 का मतलब उपर दिये हुए समी० (6) से तुलना करने पर जाना जा सकता है।

३.६ m का M पर प्रभाव $k(X-x)$ द्वारा तथा M का m पर $k(x-X)$ द्वारा निरूपित है। X तथा x के लिए इस प्रकार निकले हुए दो युगपत् अवकल समीकरणों में $X=0$ रख दीजिए। देखेंगे कि आकांक्षित प्रतिबंध—कि केवल m ही

दोलन में भाग ले—अनुनाद की अभियाचना प्रदान करता है कि निकाय (m, k) के निजी दोलन की वृत्तीय आवृत्ति वाह्य बल की वृत्तीय आवृत्ति ω के बराबर हो।

इंजीनियरी के कामों में इस प्रकार की व्यवस्था का "दोलन-शामक" की भाँति व्यवहार किया जाता है। इस प्रकार से उसका उपयोग क्रैंक ईषा में किया जा सकता है जहाँ गति-पालक चक्र निश्चर कोणीय वेग ω से घूम रहा हो। वहाँ शामक परिणमनीय घूर्णन योग्य एक युक्ति होती है। वह क्रैंक के साथ युग्मित होती है और उसका काम क्रैंक के दोलनों का अवशोषण कर लेना होता है। ऐसी स्थिति में प्रस्तुत समस्या के निर्देशांक x का स्थान घूर्णन किया हुआ कोण ले लेता है।

४

४.१ समतलीय संहति वितरण के अवस्थिति घूर्णों का महत्त्व प्रत्यास्थता वाद (इस माला की द्वितीय पुस्तक) में दंडों की ऐंठन तथा उनके झुकने में है। $r^2=x^2+y^2$ होने के कारण,

$$I_p=\int r^2dm=\int x^2dm+\int y^2dm=I_x+I_y.$$

होता है। प्रत्यास्थता संबंधी प्रश्नों में दंड की अनुप्रस्थ काट पर संहति को एकसमानतया, घनत्व एक के साथ, वितरित हुआ समझना होता है जिस कारण $dm=dS=$ क्षेत्रफल का अल्पांश। तो त्रिज्या a तथा क्षेत्रफल $S=\pi a^2$ वाले वृत्ताकार मंडलक के लिए प्राप्त होता है—

$$I_p=\int r^2dS=2\pi\int_0^a r^3dr=\tfrac{1}{2}Sa^2$$

और इस लिए

$$I_x=I_y=\tfrac{1}{4}\,Sa^2.$$

४.२ यहाँ तीनों मुख्य अवस्थितित्व घूर्णों के परिमाणों का अनुपात अंत तक कुछ भी रख लेते हैं। इस प्रकार तीनों स्थितियाँ बस एक ही परिकलन के अंतर्गत हो जाती हैं जिनमें A ही सबसे बड़ा, सबसे छोटा और मँझोला मुख्य अवस्थितित्व घूर्ण रहता है।

५.३ आवेग[1] Z गेंद (त्रिज्या a,) को दोनों प्रकार के संवेग, स्थानांतरणीय एवं घूर्णनीय, प्रदान करता है। इस प्रकार

(1) $$Mv = Z,$$

तथा

(2) $$I\omega = Zh,$$

जहाँ h केन्द्र से ऊपर की ऊँचाई है जहाँ पर क्षैतिजतया पकड़ा हुआ क्यू गेंद को मारता है। ω का अक्ष माध्यिका समतल से लंबवत् है। निम्नतम विंदु का परिमापी[2] वेग u माध्यिका समतल में होता है और $a\omega$ के बराबर होगा। यह बात न केवल $t=0$ (संघात के समय) पर वरन् $t>0$ पर भी रहती है।

(11.12a) के अनुसार $I = \frac{2}{5}Ma^2$ है, $t=0$ के लिए समी० (2) तथा (1) से

(3) $$\tfrac{2}{5}\, Mau = Zh = Mvh$$

देखिए कि u को v से प्रतिकूल दिशा में धनात्मक लिया है। ऊँचे निशानों के लिए $h > \frac{2}{5}\,a$ और गेद तथा कपड़े के बीच का स्खलन वेग $u-v$ शून्य से अधिक तथा v के प्रतिकूल है। अतएव घर्षण v की रेखा में और μMg के परिमाण का है। केन्द्र के प्रति का उसका घूर्ण μMga घूर्णन ω के प्रतिकूल काम करता है।

नीचे निशानों के लिए घर्षण इससे प्रतिकूल प्रकार से निर्देशित होता है। व्यापकता उपरला चिह्न ऊँचे निशाने के लिए, निचला नीचे निशाने के लिए समझ सकते हैं और $t>0$ के लिए लिख सकते हैं

(4) $$\dot{v} = \pm\, \mu g, \quad \text{तथा}$$

(5) $$\dot{u} = \pm \frac{5}{2}\, \mu g$$

ग्राफ (लेखाचित्र) द्वारा विवेचन— t के भुजाकों[3] पर u तथा v को कोटयांकों की भाँति खींचिए। दोनों ऋजुरेखाओं द्वारा निरूपित होंगे जो, ऊँचे निशानों की तथा नीचे निशानों की भी स्थिति मे, परस्पर प्रतिच्छेद करेंगे।

1. आवेग impulse, संवेग moment; वेग velocity.
2. Peripherical 3. Abscissa

प्रतिच्छेद-बिंदु $u=v$ पर शुद्ध लुंठन होता है। यहाँ से u तथा v सपाती रहते हुए एक क्षैतिज ऋजु रेखा में जाते हैं। प्रतिच्छेद का भुजांक है—

$$(6) \qquad \tau = \pm \frac{5h-2a}{7a} \cdot \frac{Z}{\mu g M}.$$

देखिए कि नीचे निशाने के लिए प्रथम भिन्नांश ऋणात्मक है क्योंकि h होता है—a तथा $\frac{2}{5}a$ के बीच मे; अतएव यहाँ के लिए दक्षिणांश का ऋणात्मक चिह्न केवल औपचारिक है। ऊँचे और नीचे निशानों के लिए वेग का आधिक्य या न्यूनत्व क्रमात् $\Delta v = \pm \mu g \tau$ द्वारा दिया जाता है। शुद्ध लुंठन का अंतिम वेग

$$v+\Delta v = \frac{5}{7} \cdot \frac{h+a}{a} \cdot \frac{Z}{M}$$

हो जाता है, अर्थात् संघात्-बिंदु के कपड़े के ऊपर की ऊँचाई, $h+a$,,के समानुपाती।

पिच्छू निशाने का का सिद्धांत[1]। कालांतर $t<\tau$ मे, जिसमे $u>v$ है, ऊँचे पर मारा हुआ गेंद एक अन्य गेंद से मध्यवर्ती टक्कर में मिलता है। समझिए कि संघात-क्षण पर u और v के मान u_0 और v_0 है। तो v_0 दूसरे गेंद को हस्तांतरित हो जाता है। (4) के अनुसार तब प्रथम गेंद $v=0$ से त्वरित होता है; (5) से उसका u वेग u_0 से नीचे को जाता है। एक नया लेखाचित्र (ग्राफ) दिखलाता है कि एक ऐसा प्रतिच्छेदन है जिस पर शुद्ध लुठन होने लगता है। प्रतिच्छेद बिंदु के भुजांक तथा शुद्ध लुंठन वेग क्रमात्, निम्नलिखित हैं—

$$(7) \qquad \tau_1 = \frac{2}{7} \frac{u_0}{\mu g}, \quad v_1 = \mu g \tau_1 = \frac{2}{7} u_0.$$

खींच निशाने का सिद्धांत। फिर, चलाया हुआ गेंद कालांतर $t<\tau$ मे दूसरे गेंद से टकराता है, परंतु अब $u<v$ है। पहले से ही मान लेंगे कि निशाना बहुत ही नीचा है। इसके लिए, वास्तव मे, u ऋणात्मक है अर्थात् उसकी दिशा वही है जो v की है। समझिए कि संघात क्षण से जरा-सा पहले u और v के मान u_0 और v_0 है। v_0 फिर दूसरे गेंद को संचारित हो जाता है। (4) से, प्रथम गेंद ऋणात्मक भाव मे $v=0$ से त्वरित होता है अर्थात् वह पीछे को जाता है। समी० (5) बताता है कि u अपने ऋणात्मक आदि के वेग u_0 से धनात्मक वेगों की ओर बढ़ता है, अर्थात् उसका

1. Theory of the follow shot

निरपेक्ष मान घटता है। v तथा u की ऋजुरेखाएँ प्रतिच्छेद करती हैं (नया रेखांकन); प्रतिच्छेद बिंदु का भुजांक तथा शुद्ध लुठन का वेग अब निम्नलिखित हो जाते हैं—

(8) $$\tau_2 = \frac{2}{7}\frac{|u_0|}{\mu g},\ |v_2| = \frac{2}{7}|u_0|\ .$$

४.४ अब क्यू को ४.३ की भांति क्षैतिज नहीं रखते, वरन् क्षैतिज समतल से वह एक कोण बनाता है। प्रत्यक्ष है कि अब क्यू गेंद के ऊपरी गोलार्द्ध के किसी बिंदु पर लगता है जैसे कि पहले के "ऊँचे निशानों" में। आवेग के क्षैतिज घटक की दिशा में x-अक्ष रखिए और z-अक्ष को उर्ध्वाधर की ओर। तो आवेग Z के घटक होंगे (Z_x, O, Z_z) ; और, गेंद के केन्द्र (जो x, y, z प्रणाली का मूल-बिंदु भी है) के प्रति की आवेगी-ऐंठ N के घटक होंगे—

$$N_x = yZ_z,\ N_y = zZ_x - xZ_z,\ N_z = -yZ_x\ .$$

यहाँ x, y, z क्यू तथा गेंद के संघात-बिंदु के निर्देशांक हैं। इन N_x, N_y से निम्नलिखित कोणीय वेग प्राप्त होते हैं—

$$\omega_x = \frac{5}{2}\ \frac{N_x}{Ma^2}\ ,\ \omega_y = \frac{5}{2}\ \frac{N_y}{Ma^2}\ .$$

गेंद के सबसे निचले बिन्दु P पर संगी परिमापी वेग ये होंगे।

(1) $$u_x = -a\omega_y,\ u_y = +a\omega_x\ .$$

N_z तथा ω_z से हमें मतलब नहीं; वे P पर कोई स्खलन नहीं उत्पन्न करते, केवल मात्र एक "छेदक" घर्षण, जिसकी उपेक्षा कर देंगे। समझिए कि कपड़े पर स्खलन गति के घटक हैं—

(2) $$v_x - u_x = -\rho\cos\alpha,\ v_y - u_y = -\rho\sin\alpha.$$

वह एक घर्षण R का उत्पादन करती है जो x-अक्ष से एक कोण $\pi+\alpha$ बनाता है और जिसका मान μgM है। समय $t>0$ के लिए स्थानांतरण तथा घूर्णन पर उसका प्रभाव निम्नलिखित से निर्धारित होता है—

$$M\dot{v}_x = R_x,\quad M\dot{v}_y = R_y;$$

$$I\dot{\omega}_x = aR_y,\quad I\dot{\omega}_y = -aR_x\ .$$

इसका परिणाम होता है कि—

(3) $$\dot{v}_x = -\mu g\cos\alpha,\quad \dot{v}_y = -\mu g\sin\alpha\ ;$$

और, (1) तथा (2) के प्रभाव से,

(4) $$\dot{u}_y = -\frac{5}{2}\mu g \sin\alpha, \ \dot{u}_x = -\frac{5}{2}\mu g \cos\alpha;$$

तथा

(5) $$\dot{v}_x - \dot{u}_x = -\frac{d}{dt}(\rho\cos\alpha) = -\frac{7}{2}\mu g\cos\alpha,$$

$$\dot{v}_y - \dot{u}_y = -\frac{d}{dt}(\rho\sin\alpha) = -\frac{7}{2}\mu g\sin\alpha.$$

समीकरणों (5) के अंतिम दो अंगों में $\dot{\alpha}$ तथा $\dot{\rho}$ के लिए साधन निम्नलिखित प्रदान करता है —

(क) $\dot{\alpha}=0$. घर्षण की दिशा नियत रहती है, उसका परिमाण भी नियत रहने के कारण, बिंदु P का क्षैतिज तल समतह में पथ परवलय[1] होगा। परवलय का अक्ष स्खलनीय गति की आदि दिशा α से समांतर है, जिसे Z तथा N के घटकों से निर्धारित कर सकते हैं।

(ख) $\dot{\rho} = -\frac{7}{2}\mu g$; समय $t=\tau=\frac{2}{7}\,\frac{\rho_o}{\mu g}$ पर $\rho=0$, यह ρ_o स्खलनीय वेग का आदि-परिमाण है जो भी उसी भांति Z तथा N से निर्धारित किया जा सकता है। समय के T से अधिक होने पर (अर्थात् $t<\tau$ के लिए) स्खलन एवं घर्षण सदा के लिए शून्य होंगे। गेंद परवलय को स्पर्श करती हुई एक ऋजुरेखा पर जाता है।

५

५.१ स्थिर समतल की अपेक्षा घूर्णनयुक्त समतल जिस कोण से घूमा है उस तात्क्षणिक कोण को ϕ लीजिए। तो हम रख लेते हैं कि—

(1) $$x+iy=(\xi+i\eta)e^{i\phi}.$$

t के लिए इसके दो अवकलन, $\phi=\omega$ के साथ, प्रदान करते है—

(2) $$\ddot{x}+i\ddot{y}=\{\ddot{\xi}+i\ddot{\eta}+2i\omega(\dot{\xi}+i\dot{\eta})+i\dot{\omega}(\xi+i\eta)-\omega^2(\xi+i\eta)\}e^{i\phi}.$$

यह $\xi+i\eta$ घूर्णनयुक्त समतल से प्रेक्षित (सम्मिश्र) सदिश $\mathbf{r}$ है; $\dot{\xi}+i\dot{\eta}=\dot{\mathbf{r}}$ उसी समतल से प्रेक्षित उसका वेग; इत्यादि। कारण कि—

1. Parabola

$i(\dot{\xi}+i\dot{\eta})=(\dot{\xi}+i\dot{\eta})e^{i\frac{\pi}{2}}$ पश्चोक्त (समतल) से लंबवत् एक सदिश है, इसलिए लिख सकते हैं कि—

$$2i\omega(\dot{\xi}+i\dot{\eta})=2\omega\times\dot{\mathbf{r}},$$

$$(3)\qquad i\dot{\omega}(\xi+i\eta)=\dot{\omega}\times\mathbf{r};$$

जहाँ, निस्संदेह, ω सम्मिश्र समतल के अभिलंब की ओर निर्देशित है। जैसे पृ० २२२ पर, $(\dot{x}+i\dot{y})$ को स्थिर समतल से प्रेक्षित वेग (**w**) कहिए। परंतु घूर्णनयुक्त समतल संबंधी समय-अवकलजों के लिए उपरि लेख्य के बिंदुओं वाला संकेतन वही सवेगों, जैसा कि ऊपर दिये हुए समीकरण (3) मे लिखा गया था। तो समी० (2) निम्नलिखित में, (29.4) के अनुरूप, रूपांतरित हो जाता है—

$$(4)\qquad \dot{\mathbf{w}}=\{\ddot{\mathbf{r}}+2\omega\times\dot{\mathbf{r}}+\dot{\omega}\times\mathbf{r}-\omega^2\mathbf{r}\}e^{i\phi}$$

यदि $\mathbf{F}=F_x+iF_y$ स्थिर समतल को अभिदेशित बल है तथा $\Phi=F_\xi+iF_\eta$, घूर्णनयुक्त समतल को अभिदेशित बल, तो (1) से प्राप्त होता है

$$\mathbf{F}=\Phi e^{i\phi},$$

जिस कारण

$$(5)\qquad \Phi=\mathbf{F}e^{-i\phi}$$

तो (4) तथा (5) के प्रकाश मे हम $m\dot{\mathbf{w}}=\mathbf{F}$ से प्राप्त करते हैं कि

$$(6)\qquad m\{\ddot{\mathbf{r}}+2\omega\times\dot{\mathbf{r}}+\dot{\omega}\times\mathbf{r}-\omega^2\mathbf{r}\}=\Phi.$$

इस समीकरण द्वारा समस्या में आकांक्षित अतिरिक्त बलों का निर्धारण कर लिया। विशेष बात यह है कि बाँयी ओर के द्वितीय पद में करिओलिस् (corilis) बल पहचाना जा सकता है।

हमने यह समस्या जान बूझकर सम्मिश्रण संकेतन की सहायता से हल की है, इस बात पर जोर देने के लिए कि द्वि-विमितीय सदिशों को सम्मिश्र परिणम्यों द्वारा ही सबसे भली-भांति निरूपित कर सकते हैं।

५.२ जिन समतल में ऋजुरेखा घूर्णन करती है उसे हम xy-समतल निर्वाचित करेंगे, x-अक्ष को क्षैतिज तथा y-अक्ष को ऊर्ध्वाधर ऊपर की ओर। ऋजुरेखा x-अक्ष से जो कोण बनाती है उसे $\phi=\omega t$ लेंगे। यह समस्या पहले वाली (५.१)

हो ही जायगी यदि घूर्णनयुक्त ऋजुरेखा को एक उर्ध्वाधर, $\xi\eta$-समतल में स्थित मान लें। तब इस $\xi\eta$-समतल को नियत कोणीय वेग ω से x-y समतल में घूर्णन करना होगा। सुविधाजनक होगा कि ξ अक्ष घूर्णनयुक्त ऋजुरेखा की ओर ही ले लिया जाय। गुटिका बिन्दु का ξ-अक्ष पर ही रहने के लिए उस पर η-अक्ष की दिशा में एक नियंत्रण बल लगाना होगा। तो लगने वाला बल Φ दो बलों का योग होगा, एक तो वही गुरुत्व बल mg और दूसरा यह नियंत्रण बल जिसे mb कहेंगे। प्रश्न ५.१ के समी० (1) में, गुरुत्व बल का Φ को अवदान होगा — $imge^{-i\phi}$. दोनों के योग से प्राप्त होता है

$$\Phi = \Phi_\xi + i\Phi_\eta = -mg \sin \omega t - img \cos \omega t + imb.$$

इससे पहले के प्रश्न के समी० (6) में $\mathbf{r} = \xi$ रख सकते हैं और, वहीं के (3) के प्रभाव से, $2\omega \times \dot{\mathbf{r}} = 2i\omega\dot{\xi}$; अपितु $\omega = 0$ रख देना होगा। तो प्राप्त होता है—

(1) $$\ddot{\xi} + 2i\omega\dot{\xi} + \omega^2\xi = -mg \sin \omega t + i\,(b - g \cos \omega t).$$

इसका वास्तविक भाग देता है—

(2) $$\ddot{\xi} - \omega^2\, \xi = -g \sin\, \omega t.$$

यह एक अवकल समीकरण है जिसका हल है—

(3) $$r = A \cosh \omega t + B \sinh\, \omega t + \frac{g}{2w^2} \sin\, \omega t.$$

यदि (1) के काल्पनिक भाग को शून्य के बराबर रख दे तो नियंत्रण बल, गुरुत्व तथा कोरिओलिस बल के बीच के प्रश्न में दिया हुआ निम्नलिखित संबंध प्राप्त हो जाता है—

(4) $$b = g \cos \omega t + 2\omega\dot{\xi}.$$

५.३ (क) समझिए कि xy–समतल में O का स्थान $x_0 + iy_0$ निर्धारित करता है। तो हम प्राप्त करते हैं—

(1) $$\dot{x}_0 + i\dot{y}_0 = (u + iv)\, e^{i\phi}$$

$$\ddot{x}_0 + i\ddot{y}_0 = \left\{ \dot{u} + i\dot{v} + i\omega\, (u + iv) \right\} e^{i\phi}$$

अब xy-समतल में G का स्थान $x + iy$ द्वारा निर्धारित कराइए तो

$i(\dot{\xi} + i\,\dot{\eta}) = (\dot{\xi} + i\,\dot{\eta})e^{i\frac{\pi}{2}}$ पश्चोक्त (समतल) से ल है, इसलिए लिख सकते हैं कि—

$$2i\omega(\dot{\xi} + i\,\dot{\eta}) = 2\omega \times \dot{\mathbf{r}},$$

(3) $$i\dot{\omega}(\xi + i\,\eta) = \dot{\omega} \times \mathbf{r};$$

जहाँ, निस्संदेह, ω सम्मिश्र समतल के अभिलंब की ओर निर्देशित है

पर, $(\dot{x} + i\dot{y})$ को स्थिर समतल से प्रेक्षित वेग (**w**) कहिए। समतल संबंधी समय-अवकलजों के लिए उपरि लेख्य के बिंदुओं वा संवेगों, जैसा कि ऊपर दिये हुए समीकरण (3) में लिखा गया था। निम्नलिखित में, (29.4) के अनुरूप, रूपांतरित हो जाता है—

(4) $$\dot{\mathbf{w}} = \{\ddot{\mathbf{r}} + 2\omega \times \dot{\mathbf{r}} + \dot{\omega} \times \mathbf{r} - \omega^2 \mathbf{r}\}e^{i\phi}$$

यदि $\mathbf{F} = F_x + iF_y$ स्थिर समतल को अभिदेशित बल है तथा Φ घूर्णनयुक्त समतल को अभिदेशित बल, तो (1) से प्राप्त होता

$$\mathbf{F} = \Phi\, e^{i\phi},$$

जिस कारण

(5) $$\Phi = \mathbf{F}e^{-i\phi}$$

तो (4) तथा (5) के प्रकाश में हम $m\dot{\mathbf{w}} = \mathbf{F}$ से प्राप्त करते हैं कि

(6) $$m\,\{\ddot{\mathbf{r}} + 2\omega \times \dot{\mathbf{r}} + \dot{\omega} \times \mathbf{r} - \omega^2 \mathbf{r}\} = \Phi.$$

इस समीकरण द्वारा समस्या में आकांक्षित अतिरिक्त बलों का निर्धार विशेष बात यह है कि बाँयी ओर के द्वितीय पद में करिओलिस् (पहचाना जा सकता है।

हमने यह समस्या जान बूझकर सम्मिश्रण संकेतन की सहायता इस बात पर जोर देने के लिए कि द्वि-विमितीय सदिशों को सम्मिश्र पर ही सबसे भली-भाँति निरूपित कर सकते हैं।

५.२ जिस समतल में ऋजुरेखा घूर्णन करती है उसे हम xy-समत करेंगे, x-अक्ष को क्षैतिज तथा y-अक्ष को ऊर्ध्वाधर ऊपर की ओर x-अक्ष से जो कोण बनाती है उसे $\phi = \omega t$ लेंगे। यह समस्या पहले व

(1) $$x+iy=x_0+iy_0+ae^{i\phi},$$

$$\dot{x}+i\dot{y}=\left\{u+iv+i\omega a\right\}e^{i\phi},$$

(2) $$\ddot{x}+i\ddot{y}=\left\{\dot{u}+i\dot{v}+i\dot{\omega}a+i\omega\ (u+iv)-\omega^2a\right\}e^{i\phi}.$$

xy-समतल में वाह्य बल **R** के अनुरूप निम्नलिखित सम्मिश्र राशि है—

(2′) $$\mathbf{F}=\mathbf{R}\ ie^{i\phi}.$$

समीकरणों (2) तथा (2′) से द्वितीय नियम, कि

$$\ddot{x}+i\ddot{y}=\frac{\mathbf{F}}{M}\ ,$$

निम्नलिखित समीकरण को पहुँचाता है—

$$\dot{u}+i\dot{v}+i\dot{\omega}a+i\omega\ (u+iv)-\omega^2a=i\frac{R}{M},$$

या, घटकों में विघडित,

(3) $$\dot{u}-\omega v-\omega^2a=o,$$

तथा

(4) $$\dot{v}+\dot{\omega}a+\omega u=\frac{R}{M},$$

इसके अतिरिक्त हम, कोणीय सवेग के नियम से, प्राप्त करते हैं

(5) $$I\dot{\omega}=-Ra.$$

(ख) प्रतिबधों $v=o, \dot{v}=o$ के कारण समी॰ (3) तथा (4) का निम्नलिखित सरल रूप हो जाता है—

(3′) $$\dot{u}-\omega^2a=O$$

और

(4′) $$\dot{\omega}a+\omega u=\frac{R}{M}\ .$$

(4′) और (5) से R का निरसन हमें देता है—

(6) $$\dot{\omega}a\left(1+\frac{I}{Ma^2}\right)+\omega u=O.$$

अब रख लीजिए कि $I=Mb^2$ (यह b घूर्णन-त्रिज्या है) और

(7) $$k^2 = 1 + \frac{b^2}{a^2} > 1 .$$

ये (6) को

(6') $$k^2 \dot{\omega}\, a + \omega\, u = 0$$

में रूपांतरित कर देते हैं। युगपत् समीकरणों (3') तथा (6') के समाकलन से R का निर्धारण (4') या (5) में हो जाता है।

(ग) समीकरणों (3') तथा (6') से u का निरसन प्रदान करता है

(8) $$k^2 \frac{d}{dt}\, \frac{\dot{\omega}}{\omega} = -\omega^2$$

$\frac{\dot{\omega}}{\omega}$ से गुणा करने पर यह समीकरण समाकलनीय हो जाता है और प्रस्तुत करता है—

(9) $k^2 \left(\frac{\dot{\omega}}{\omega}\right)^2 = k^2 c^2 - \omega^2$, तथा (9') $k\, \dot{\omega} = \omega\, (k^2 c^2 - \omega^2)^{\frac{1}{2}}$

जहाँ c एक समाकलनांक है। यदि

(10) $$\omega = kc \cos \psi$$

रख लें तो वर्गमूल से भी छुटकारा मिल जाता है। वर्गमूल के चिह्न के उपयुक्त निर्वाचन से (9') निम्नलिखित हो जाता है—

(10') $$\dot{\psi} = c \cos \psi$$

या $$c\, dt = \frac{d\psi}{\cos \psi} ,$$

और

(11) $$c\, t = \tfrac{1}{2} \log \frac{1 + \sin \psi}{1 - \sin \psi} .$$

इस प्रकार ψ को t के फलन की भाँति निर्धारित कर लिया। अब हम सभी राशियों को ψ के पदों में व्यक्त कर सकते हैं; (10) से ω; (6') तथा (4') से u और R; यों—

(12) $u = ak^2 c \sin \psi$ तथा (12') $R = \frac{M}{2} a\, k\, (k^2 - 1)\, c^2 \sin 2\psi .$

यह समाकलन को पूरा कर देता है।

$\omega=\dot{\phi}$ होने के कारण, (10) तथा (10′) की तुलना अंततः यह संबंध प्रदान करती है कि $\dot{\psi}=\frac{\dot{\phi}}{k}$. अतएव हमारा सहायक कोण ψ घूर्णन कोण ϕ के समानुपाती है, अर्थात्

$$\psi=\frac{\phi}{k} \quad , \tag{13}$$

क्योंकि x-अक्ष की स्वेच्छ दिशा के उपयुक्त निर्वाचन से समाकलनांक शून्य किया जा सकता है।

(घ) समी० (1′) से, $v=0$ के लिए,

$$|\dot{x}+i\dot{y}|^2|=\dot{x}^2+\dot{y}^2=u^2+\omega^2a^2$$

अतएव

$$T=\frac{M}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\tfrac{1}{2}\omega^2=\frac{M}{2}\,(u^2+\omega^2a^2)+\frac{M}{2}(k^2-1)a^2\omega^2$$

$$=\frac{M}{2}\,(u^2+k^2\omega^2\omega^2). \tag{14}$$

(10) तथा (12) से यह निम्नलिखित के समान है—

$$T=\frac{M}{2}\,a^2k^4c^2\,(\sin^2\psi+\cos^2\psi)=\text{नियत}\,। \tag{15}$$

(च) समीकरणों (1) तथा (12) से

$$\dot{x}_0=ak^2c\sin\psi\,\cos\phi,\ \dot{y}_0=ak^2\,c\sin\psi\sin\phi,$$

अतएव, (10′) तथा (13) के प्रभाव से,

$$\frac{dx_0}{d\phi}=a\,k\tan\psi\ \cos\phi, \frac{dy_0}{d\,\phi}=ak\tan\psi\,\sin\phi\ . \tag{16}$$

समी० (11) बताता है कि—

$$\psi=0 \text{ के लिए } t=0;$$

$$\psi=\pm\frac{\pi}{2},\ t=\pm\infty\,.$$

सपूर्ण प्रक्षेप-पथ

$$-\frac{\pi}{2}<\psi<+\frac{\pi}{2} \text{ तथा} -k\frac{\pi}{2}<\phi<+k\frac{\pi}{2}$$

के बीच रहता है। $t=0$, पर एक निशिताग्र[1] होता है; क्योंकि $\psi=0, \phi=0$ के साथ (16) के अनुसार,

$$\frac{dx_0}{d\phi}=\frac{dy_0}{d\phi}=\frac{d^2y_0}{d\phi^2}=0,$$

परतु साथ ही,

$$\frac{d^2x_0}{d\phi^2} \text{ तथा } \frac{d^3y_0}{d\phi^3}\neq 0.$$

निशिताग्र की दोनों शाखाओं पर की स्पर्श रेखाएँ x-अक्ष के समातर हैं।

$t=\pm\infty$ के लिए पथ अनतस्पर्शीय हो जाता है, क्योंकि ϕ स्थावर हो जाता है, जैसा कि इससे प्रकट है कि समी० (16) से, बिलकुल व्यापकतया

$$\frac{dx_0}{d\phi}=\frac{dy_0}{d\phi}=\pm\infty$$

इसके अतिरिक्त, समी० (16) देता है

$$\frac{dy_0}{dx_0}=\tan\phi=\pm\ \tan k\frac{\pi}{2}.$$

अतएव अनतस्पर्शी x-अक्ष के समिततया स्थित है, उससे कोण $\pm k\frac{\pi}{2}$ बनाते हुए, जैसा कि $k=1,\ \frac{3}{2},\ 2,\ 3$ के लिए आकृति ५७ दिखलाती है।

६

६.१. यदि z को गिरने की दिशा मे अर्थात् नीचे की ओर धनात्मक लें तो $V=-mgz$. आदि-स्थान ($t=0$ पर $z=0$) अत-स्थान ($t=t$ पर $z=z_1$) से ऊपर है।

(क) $z=\frac{1}{2}gt^2$ के लिए हम प्राप्त करते हैं—

$$\int L dt=\int_0^{t_1}\left[\frac{m}{2}(gt)^2+mg\frac{g}{2}t^2\right]dt=\frac{1}{3}mg^2t_1^3.$$

(ख) स्थिति $z=ct$ के लिए, c का निर्वाचन इस प्रकार करना होगा कि $t=t_1$ के लिए

1. cusp

$$z = z_1 = g\frac{t_1^2}{2} \text{ अतएव } c = \frac{gt_1}{2}.$$

इस मान के साथ हम ज्ञात करते हैं कि—

$$\int L dt = \int_0^{t_1} \left[\frac{m}{2}\left(\frac{gt_1^2}{2}\right)^2 + mg\frac{gt_1}{2}\, t \right] dt = \frac{3}{8}\, mg^2 t_1^3.$$

दूसरी ओर, $z = at^3$ के लिए $a = \frac{1}{2}\frac{g}{t_1}$;

$$\int L dt = \int_0^{t_1} \left[\frac{m}{2}\left(\frac{3g}{2t_1}\right)^2 t^4 + mg\,\frac{g}{2t_1} t^3 \right] dt = \frac{7}{20}\, mg^2 t_1^3.$$

जहाँ कि हैमिल्टन-सिद्धात में अत्यणु परिमाणों से ही विभिन्न पथों की तुलना करते हैं, यहाँ $q.\dot{q}$ (जो प्रस्तुत स्थिति में $z, \dot{z}$ हैं) के कला आकाश[1] में (ख) के प्रक्षेप-पथ वास्तविक गति (क) से परिमित परिमाणों से विभिन्न होते हैं। फिर भी, हैमिल्टन समाकल का मान (क) के लिए (ख) की अपेक्षा अब भी कम ही है, क्योंकि—

$$\tfrac{1}{3} < \tfrac{3}{8} \text{ और } \tfrac{1}{3} < \tfrac{7}{20}.$$

यहाँ यह बात पथ के किन्ही ही दैर्ध्यों के लिए भी ठीक है, यद्यपि यह आवश्यक नही कि व्यापक कायदा यही हो (सि० पृ० २८१)

६.२. जैसे कि प्रश्न ५.१ मे, घूर्णनयुक्त समतल में स्थित निर्देशाकों ξ तथा η को लीजिए और इस समतल की अपेक्षा नापे हुए वेग को $\mathbf{u} = (\dot{\xi}, \dot{\eta})$ होने दीजिए। तो स्थिर समतल से सम्बन्ध वेग होगा

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}.$$

[मिलाइए, उदाहरण के लिए, पृ० १८६ पर दी हुई सारणी की प्रथम पक्ति]। घटकों में विखडन प्रदान करता है—

$$\omega_\xi = \dot{\xi} - \omega\,\eta, \quad \omega_\eta = \dot{\eta} + \omega\,\xi,$$

अतएव

1. Phase space

$$\left(1+\frac{\zeta}{R}\right)\dot{\eta} \text{ तथा } -\frac{\eta}{R}\left(1+\frac{\zeta}{R}\right)\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\ \dot{\xi} \text{ हैं।}$$

कोष्ठक { } वाले गुणनखंड से गुणा करने के बाद, t के लिए उनके अवकलन से, वे ξ, η, ζ या उनके अवकलनों के द्वितीय या उच्चतर कोटि के पद प्रदान करेंगे। अवकलित समीकरणों (5) तथा (6) के बारे में कह देना चाहिए कि द्वितीय घात के पदवृंद जैसे कि $\zeta\ddot{\xi}$, $\dot{\zeta}\dot{\xi}$, आदि अवश्य छोड़ दिये गये हैं। यह देखने योग्य बात है कि इस छूट से पृथिवी की त्रिज्या, R, परिणामों से निकल जाती है। पूर्ण समी० (6) में, लिख दिये गये पद के अतिरिक्त, ω^2 में भी एक पद की प्राप्ति होगी, जो है

$$R\sin\theta\,\cos\theta\,\omega^2,$$

और जो प्रत्यक्षतः सामान्य अपकेंद्र बल के ξ-घटक को निरूपित करता है। संगत ζ-घटक $\frac{\partial T}{\partial \zeta}$ में आवेगा। परंतु इन पदों को छोड़ देना होगा क्योंकि वे पहले से ही प्रभावकारी गुरुत्वीय त्वरण g, समी० (30.1) में सम्मिलित कर लिये गये हैं।

फूको-लोलक के सम्बन्ध में प्रत्यक्षतः लाग्रांज-समीकरणों के सामान्य रूप (34.6) का नहीं, वरन् मिश्रित प्रकार के समीकरण (34.11) का, उससे नियंत्रण समीकरण (31.1) को युग्मित करते हुए, उपयोग करना होगा।

एक बात और देखिए कि (1) तथा (2) में दी हुई η और ψ_0 की परिभाषा के कारण यह समस्या उनमें हो जाती है जो समय पर निर्भर करती हैं जिसका विवेचन पृ० २९५ पर हुआ था।

६.४. संहति का केंद्र सिलिंडर के अक्ष के लंबवत् एक समतल में एक "कुतरा हुआ" वृत्तजात[1] रचना है। घूर्णन कोण ϕ के पदों में उसके परामितीय समीकरण "साधारण" वृत्तजात के समी० (17.1) से ही, इस (17.1) के a को उचित स्थानों पर s द्वारा प्रतिस्थापित करने पर, प्राप्त किये जाते हैं। यों

$$\xi=a\phi-s\sin\phi\,,\quad \dot{\xi}=(a-s\cos\phi)\,\dot{\phi}\,;$$
$$\eta=a-s\cos\phi\qquad \dot{\eta}\qquad \dot{\phi}$$

1. Curtate cycloid

(क) यदि संहति-केंद्रको अभिदेश बिंदु O ले लें तो हम प्राप्त करते हैं—

$$T_{\text{transl}} = T_{\text{स्थानांतरणीय}} = \frac{m}{2}\left(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2\right)$$

$$= \frac{m}{2}\left(a^2 + s^2 - 2as\cos\phi\right)\dot{\phi}^2 ,$$

$$T_{\text{rot}} = T_{\text{घूर्णनीय}} = \frac{I}{2}\dot{\phi}^2, \; T_m = 0;$$

$$V = mg\,\dot{\eta} = mg(a - s\cos\phi)$$

देखिए कि $\omega = \dot{\phi}$ प्रारंभ में सिलिंडर का अपने नमिति अक्ष के प्रति का कोणीय वेग है, परंतु, (23.8) के अनुसार वही संहतिकेंद्र से जाते हुए समांतर अक्ष के प्रति का कोणीय वेग भी है।

यदि $I = mb^2$ (b=घूर्णन त्रिज्या) रख लें और $c^2 = a^2 + s^2 + b^2$, तो

(1) $$L = T_{\text{transl}} + T_{\text{rot}} - V = \frac{m}{2}(c^2 - 2as\cos\phi)\dot{\phi}^2 - mg(a - s\cos\phi)$$

तथा

$$\frac{1}{m}\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}} = (c^2 - 2as\cos\phi)\ddot{\phi} + 2as\sin\phi\,\dot{\phi}^2 ,$$

एवं

$$\frac{1}{m}\frac{\partial L}{\partial\phi} = as\sin\phi\,\dot{\phi}^2 - gs\sin\phi.$$

अतएव गतिसमीकरण होगा—

(2) $$(c^2 - 2as\cos\phi)\ddot{\phi} + as\sin\phi\,\dot{\phi}^2 + gs\sin\phi = 0.$$

(ख) यदि यह निर्वाचित कर ले कि संहति केंद्र से जाती हुई अनुप्रस्थ काट का केंद्र अभिदेश बिंदु O है तो पश्चोक्त (संहति-केंद्र) $a\dot{\phi}$ वेग से क्षैतिजतया चलता है। $I' = I + ms^2$ (मिलाइए, 16.8) के साथ अब प्राप्त होता है—

$$T_{\text{transl}} = \frac{m}{2}a^2\dot{\phi}^2, \; T_{\text{rot}} = \frac{I'}{2}\dot{\phi}^2, \; V, \text{ ऊपर ही की भाँति।}$$

परंतु अब T_m शून्य नहीं है वरन् समी० (22.11) से निम्नलिखित से दिया जाता है—

$$T_m = -ma\dot{\phi}^2 s\cos\phi.$$

परिणामवश

(3) $$L = T_{\text{transl}} + T_{\text{rot}} + T_m - V = \frac{m}{2}\left(c^2 - 2as\cos\phi\right)\dot{\phi}^2 - mg(a - s\cos\phi).$$

यह (1) से सहमत है, जिस कारण हम (2) को ही एक बार फिर गतिसमीकरण प्राप्त करते हैं। $\phi = 0$ के प्रति के छोटे-छोटे दोलनों के लिए वह प्रदान करता है—

$$\ddot{\phi} + \frac{g}{l_1}\phi = 0,\ l_1 = \frac{c^2 - 2as}{s} = \frac{(a-s) + b^2}{s} \text{......स्थायित्व।}$$

इसके विपरीत, $\phi = \pi$ के प्रति के अल्प दोलनों के लिए, $\psi = \pi + \phi$ के साथ,

$$\ddot{\psi} - \frac{g}{l_2}\psi = 0,\ l_2 = \frac{c^2 + 2as}{s} = \frac{(a+s)^2 + b^2}{s} \text{......अस्थायित्व।}$$

६५ (क) **कोणीय वेगों के बीच के संबंध**—इन संबंधों का व्युत्पादन सरलतम हो जाता है यदि यह स्मरण रखें कि उन स्थानों पर जहाँ कोरदार योक्त्रों (ω) को एक ओर तो योक्त्र (ω_1) से और दूसरी ओर योक्त्र (ω_2) से फँसाया हुआ है, वहाँ परिमापी वेगों को किसी भी क्षण पर, अवश्यमेव बराबर होना चाहिए। योक्त्र (ω) धुरी A के चारों ओर कोणीय वेग ω से घूर्णन करते हैं। इसके अतिरिक्त, यह धुरी, (ω) के साथ, (Ω), (ω_1) तथा (ω_2) के सार्व ज्यामितीय अक्ष के चारों ओर कोणीय वेग Ω से घूर्णन करती है। यदि कोरदार योक्त्रों (ω), (ω_1) तथा (ω_2) की माध्य त्रिज्याएँ r, r_1, r_2 हों तो स्पर्श बिंदु ($\omega\ \omega_1$) पर $r\omega + r_1\Omega = r_1\omega_1$ तथा स्पर्श बिंदु ($\omega_1\ \omega_2$) पर निम्नलिखित होना चाहिए—

$$-r\omega + r_2\Omega = r_2\omega_2$$

यदि $r_1 = r_2$ हो तो इससे निम्नलिखित संबंधों की प्राप्ति होती है

(1) $$2\Omega = \omega_1 + \omega_2$$

$$2\omega = \frac{r_1}{r}\left(\omega_1 - \omega_2\right).$$

निःसंदेह, ये संबंध आभासी घूर्णनों का प्रवेश कराकर भी व्युत्पन्न किये जा सकते हैं।

(ख) ऐंठों के बीच के संबंध। L के आवेगी घूर्ण को सदैव L_1 तथा L_2 के आवेगी घूर्णों के योग के बराबर होना चाहिए, अर्थात्

$$L\,\Omega\,\delta t = L_1\omega_1\delta t + L_2\omega_2\delta t$$

अब (1) की सहायता से Ω को ω_1 और ω_2 के पदों में प्रतिस्थापित कर लेते हैं और निम्नलिखित पर पहुँचते हैं—

$$\left(\frac{L}{2}-L_1\right)\omega_1+\left(\frac{L}{2}-L_2\right)\omega_2=0$$

किन्हीं-भी अर्थात् स्वेच्छ ω_1, ω_2 के लिए यह केवल तभी संभव है जब कि

$$\frac{1}{2}L=L_1=L_2. \tag{2}$$

तो देखते हैं कि इंजन की चालन ऐंठ एक समान परिमाणों में पिछले पहियों में से प्रत्येक को हमेशा हस्तांतरित होती रहती है, कोणीय वेगों ω_1 तथा ω_2 के मान कुछ भी क्यों न हों।

(ग) निकाय का गतिसमीकरण—यहाँ लाग्रांज के द्वितीय प्रकार के समीकरणों का उपयोग सरलतम होगा। हमें प्राप्त है कि

$$T=\frac{1}{2}\left(I_1\omega_1^2+I_2\omega_2^2+I\omega^2+I'\,\Omega^2\right).$$

अब ω और Ω को हम ω_1 तथा ω_2 के पदों में उनके पदपुंजों द्वारा प्रतिस्थापित कर लेते हैं तथा निम्नलिखित संक्षिप्तिकाओं का प्रवेश कराते हैं—

$$L_{11}=I_1+\frac{I'}{4}+\frac{I}{4}\frac{r_1^2}{r^2},$$

$$L_{22}=I_2+\frac{I'}{4}+\frac{I}{4}\frac{r_1^2}{r^2},$$

$$L_{12}=L_{21}=\frac{I'}{4}-\frac{I}{4}\frac{r_1^2}{r^2}.$$

तो लाग्रांज समीकरण ये हो जाते हैं—

$$\frac{d}{dt}\left(L_{11}\,\omega_1+L_{12}\,\omega_2\right)=\frac{L}{2}-W_1, \tag{3}$$

$$\frac{d}{dt}\left(L_{21}\omega_1+L_{22}\omega_2\right)=\frac{L}{2}-W_2.$$

में W_1 तथा W_2 दो पिछले पहियों पर आरोपित प्रतिरोधक ऐंठें हैं। उनका जन्म भूमि के घर्षण में होता है। यदि चाहें तो उनमें अन्य प्रतिरोधों (वायु आदि) को भी सम्मिलित कर सकते हैं।

यदि L, W_1 तथा W_2 समय के फलनों की भांति दिये हुए हों तो (3) के वामागों के कोष्टको को दक्षिणागों के समय-समाकलों की भांति परिकलित कर सकते हैं, जिस कारण ω_1 और ω_2 समय के ज्ञात फलन हो जाते हैं।

यदि समय पर औसत लगाया जाय तो (3) के दक्षिणांग शून्य के बराबर हो जाते हैं, अतएव ω_1 तथा ω_2 निश्चर हैं। परन्तु यदि एक पहिये पर आरोपित घर्षण कम हो जाय, जैसा कि, उदाहरणतः, होता है। यदि पहिया किसी उभाड़ पर हो कर जाने के कारण सड़क को छूता हुआ नहीं रहता और क्षणभर के लिए वायु में घूमता रहता है ($W=O$), तो यह पहिया तो त्वरित हो जाता है, परंतु दूसरा अवत्वरित।[1]

(घ) वैद्युतगतिकी से सादृश्य। समीकरणों (3) को ऐसे लिखा है कि वे प्रेरणतया युग्मित दो (विद्युत्) धाराओं के बीच मिथक्रिया का स्मरण कराते हैं (देखिए पृ० ३०७ पर बोल्जमान (Boltzmann) के बारे में कही हुई बातें)। यदि L_{ij} ओं को दो परिपथों के बीच के प्रेरण गुणाकों से समीकृत कर लें, तथा ω_1 और ω_2 को उनमें बहती हुई धाराओं से, तो (3) के वामाग वैद्युत-गतिकीय प्रेरण प्रभाव हो जाते हैं। $\frac{1}{2}L$ परिपथों पर आरोपित "प्रभावित वि वा व" के संगत हैं।[2] एवं

$$T=\tfrac{1}{2}L_{11}\omega_1^2+L_{12}\,\omega_1\,\omega_2+\tfrac{1}{2}L_{22}\,\omega_2^2$$

सपूर्ण चुंबकीय क्षेत्र ऊर्जा है। पृ० २६६ के अनुसार, उन निकायों को चक्रीय कहते हैं जिनके लाग्रांजीयों में केवल समय के विचार से निर्देशांकों के अवकलज होते हैं (यहां $\omega_1=\dot{\phi}_1$, $\omega_2=\dot{\phi}_2$)। अतएव वे स्थावर विद्युत् धाराओं के यात्रिकीय सदृश-वस्तु प्रस्तुत करते हैं। वैषम्यकारक यत्ररचना एवं स-समिति लट्टू, दोनों द्विगुणित चक्रीय[3] निकाय हैं।

1. Decelerated 2. Impressed E. M. F.
3. Doubly cyclic

पारिभाषिक शब्दावली

हिन्दी-अंग्रेजी

अकन पद्धति, सकेतन notation
अकितक/लेबल label
अत सागरीय/पनडुब्बी submarine (सबमेरीन)
अतरप्रवेश interpenetration
अतरवर्ती, मझोला intermediate
अतराल interval
अतरिक्षीय Meteorological
अतर्भाग core
अतर्वस्तु content (s)
अश, भाग के विचार से numerator
—, कोटि/घात degree
अशदान contribution
अक्ष axis
—, आकृति a. of figure
—, घूर्णन a. of rotation
—ध्रुवीय polar a.
—, निरक्षीय equatorial a.
—, निर्देशांक a. *of coordinates*
अक्ष-विचलन nutation
अक्षांश latitude
—, भौगोलिक geographical l.

अक्षाश-कोटि co-latitude
अचर/अचर-राशि invariable
अचर/नियत/नियताक constant
अजायबघर, सग्रहालय *museum*
अतिचालकता super conductivity
अतिपरवलय hyperbola
अतिपरवलियक ज्या (अतिज्या) hyperbolic sine (sine h)
अतिपृष्ठ super surface
अतिप्रत्यास्थ super elastic
अदिश scalar
अधिकतम, महत्तम maximum
अधिक्षेत्र range
अधिमान्य-अध्ययन प्रणाली preferable course
अध्यारोपण superposition
अनत infinite
अनन्त दूरी, अनन्त राशि infinity
अनन्त सूक्ष्म infinitesimal
अनन्त स्पर्शत: asymptotically
अनन्त स्पर्शी asymptote
अनन्त स्पर्शीय asymptotic

अनावर्ती aperiodic
अनुगमक cogredient (co+latin; gredi, to walk; hence=subject to the same linear transformation)
अनुज्ञेय permissible, allowable
अनुदैर्घ्य longitudinal
अनुनाद resonance
अनुपरिणम्य co-variant
अनुपात ratio
अनुप्रयोग application
अनुप्रस्थ transverse
अनुमान assumption
अनुरूप analogous
अनुरूप, सगत corresponding
अनुरूपता agreement
अनुरेखण trace
अनुलोमानुपाती directly proportional
अनुशसित recommended
अनुशीलन, अभ्यास exercise
अनुष्ठान formation
अनुसधान investigation
अनुसधानक investigator
अनुसूची scheme
अन्योन्य प्रेरण प्रभाव mutual inductive effect
अन्वालोप envelope
अपकेन्द्र centrifugal
–नियंत्रक c. governor
अपकेन्द्रत्र centrifuge
अपचय, लघुगणकीय decrement, logarithmic
अपभानु aphelion
अपरिणम्य invariant
अपसरण divergence
अपसारण expulsion
अपूर्णपदीय non-holonomic
अपूर्व विन्दु singular point
अभिकथित alleged
अभिकेन्द्र centripetal
अभिदेश reference
अभिप्रयाण, देशान्तरगमन migration
अभिभानु perihelion
अभिमुख/विरुद्ध opposite
–, विकर्णतः diagonally opposite
–, व्यासतः (व्यासाभिमुख) diametrically opp.
अभियाचना demand, requirement
अभिलम्ब normal (noun)
i. e. n. to a surface.
अभिव्यक्ति manifestation
अभिसारी श्रेणी converging series
अभ्यर्पित assigned
अभ्यास, अनुशीलन excercise
अभ्रष्ट non-degenerate
अमूर्त/निगूढ़ abstract
अरैखिकता non-linearity
अर्ग erg
[ग्रीक शब्द (ergon) (कर्मन) से–

आलेखन plot (graphs)
आलोक यंत्र optical instrument
आलोकिकी optics
किरण तथा तरंग ray and waves
आलोकीयतया optically
आवर्त, आवर्ती periodic
आवर्तकाल period
आवर्तत्व मापाक modulus of periodity
आविष्कार discovery
आवृत्ति frequency
आवेग impulse
आवेगी impulsive
आवेश charge
आश्लेपक oscillating
आश्चर्य कार्य feat
इंजीनियरी engineering
इकाई, मात्रक unit
इगझास्ट (रेचक, शून्य कारक) exhaust
इलेक्ट्रान electron
ईंट Block
ईजाद invention
ईषा shaft
–, नोदक propeller s.
उच्चावचन fluctuation
उतराई (अवरोह) descent
उत्केन्द्र, उत्केन्द्रीय eccentric
उत्क्रम inverse
उत्क्रमनीय लोलक reversible pendulum
उत्तोलक lever
उत्थानक यन्त्र elevator
उत्पत्ति origin
उत्प्लावकता buoyancy
उत्सर्जन emission
उद्‌गम origin, source
उपकरण apparatus
उपकरणिका, औजार instrument
उपगोल spheroid
–, उच्चाक्ष prolate s.
–, निम्नाक्ष oblate s.
उपचार (विकृति) treatment
उपज्ञाता inventor
उपनीत cited
उपपत्ति, प्रमाण proof
उपप्रमेय corollary
उपयुक्ततम optimum
उपविभाजन sub-division
उभाड़ protuberance
उल्का meteor
उष्मा, ऊष्मा heat
–, गतिकी thermodynamics
उष्मीय thermal
ऊर्जा energy
ऊर्ध्वाधर vertical
ऋजुरेखीय rectilinear
एकत्रण (समाहरण, सांद्रण) concentration
एकैवदिशागामी monotonic

कोट्यंक ordinate
कोण angle
–, आपतन, आपात a. of incidence
–, दिगश azimuth a.
–, न्यून acute a.
कोणीय angular
–, सवेग angular momentum
क्यू cue
(निशाना लगाने का डंडा, पकड़ने की ओर से मोटा, दूसरी ओर पतला, कुठित नोकदार, जिससे गेंद मारा जाता है।)
क्रमचय permutation
क्रम विनिमयशील commutative
क्रांतिक, गुणदोष-विवेचक critical
क्रांतिवृत्त eccliptic
क्रास हेड cross head
(इतस्तत. गति को वृत्ताकार गति में परिवर्तन करने की व्यवस्था)
क्रिया action
–, का क्वाटम quantum of a.
–, परिणम्य (क्रिया परिणम्य) action-variable
–, फलन, लघुतम least, action function
क्रियाशील active
क्रैंक crank
(धुरे का मुड़ा हुआ भाग, इतस्तत. गति को वृत्तीय में परिवर्तन करने के लिए)

क्लैंप जकड़ clamp
क्वांटम (मात्रिका?) quantum
क्षमता power (of instruments)
क्षय dissipation
क्षयशील dissipative
क्षुरधार knife edge
क्षेत्र field, sphere
–, सदिश vector f.
क्षेत्रकलन quadrature
क्षेत्रफलीय वेग areal velocity
क्षेत्रीय फलन field function
क्षैतिज horizontal
खंड resolved part
प्रकरण section
खंड, निर्देशित directed segment
खगोल the heavens
खगोलज्ञ astronomer
खगोल विद्या, खगोल-विज्ञान astronomy
खगोलीय celestial
–, पिंड c. body.
–यान्त्रिकी c. mechanics
खानि mine
खेलकूद athletics
गठन, रूप form
गठन, अग-संस्थान निर्माण, रचना structure
गणित, अवकल, चलन-कलन differential calculus
गणित, सदिश बीज vector algebra
–, समाकलन=चलराशि कलन, Inte-

gral calculus
गणितीय Mathematical
गति motion
गतिकी, गति-विज्ञान Dynamics
–, चल kinematics
गति-पालक चक्र flying wheel
गवेषण research
–,निबंध, पत्र, रचना या लेख, r. paper
गश्त cycle
गउसीय संकेतन Gaussian notation
गि (जि) वल
(छल्लों आदि युक्त लटकाने की एक युक्ति) gimbal
गुणदोष-विवेचक critical
गुणक multiplier
गुणज multiple
गुण धर्म property
गुणन multiplication
गुणन खंड factor
गुणन फल product
गुणांक co-efficient
गुणात्मक qualitative
गुणोत्तर माध्य geometric mean
–,श्रेणी series, geometric progression
गुरुत्व gravity
–,केन्द्र centre of g.
गुरुत्वाकर्षण gravitation.
गुरुत्वाकर्षी, गुरुत्वीय gravitational
गैल्वानोमापी galvanometer
गोचर-घटना, दृग्विषय phenomenon
गोल, गोला sphere
गोलक bob
गोलाकार spherical
गोलार्द्ध hemisphere (earth's)
गौरव (तौल, बट्टा, बाट) weight
ग्रह परिवार Planetary system
ग्राफ, रेखाचित्र graph
घटक component
घटिका-प्रतिकूल anti clockwise
घनता, घनत्व density
घनात्मक cubical
घर्षणीय वल frictional force
घात power, order
घातीय exponential
घातीयात्मक of exponential character
घिरनी, चरखी pully
घिरनी, रस्सी, काँटा-साधन the block and tackle
घुटनों के वृत्त knee circles
घू-प-म (घूर्णन प्रति मिनट) R. P. M. = rotation per minute
घूमनेवाली यन्त्रिका turn table
घूर्ण moment
घूर्णक rotary
घूर्णन rotation, gyration
–,चाल rotational speed
–,त्रिज्या radius of gyration
घूर्णाक्ष दिक्सूचक gyro compass

–स्थापी gyroscope
–स्थापीयवाद gyroscopic theory
–स्थायी कारक gyro stabilizer
घूर्णाभ momentoid
घूर्णीय दीर्घ वृत्तज momental ellipsoid
घेरा (वलय) ring
चन्द्रीय, चान्द्र lunar
–पातवृन्द lunar nodes
–पुर सरण lunar precession
चक्र cycle
चक्रीय cyclic
–, एक mono-cyclic
–निकाय c. system
–निकाय, द्विगुणित doubly cyclic system
–,निर्देशांक (परिणम्य) c. coordinates (variables)
–, बहु polycyclic
चतु.सदिश four-vector
चतुर्वर्णायन quaternion
चपेट लगाना (उँगली अँगूठे को मिलाकर एक से) flip
चरखी, घिरनी pulley
चरमसीमांत limiting
–,सीमा extreme limit
चरराशि (परिणम्य) variable
चर राशियों का पृथक्करण separation of variables
–चल गतिकी (शुद्ध गतिक) kinematics
–,आकाश में k. in space
चलन कलन = अवकल गणित differential calculus
चलनशीलता movability, mobility
चल-संहति moving mass
चलात्मक kinematic
चाप arc
चापकलन rectification
चार्ज charge
चाल speed
चालन, चलानेवाला (ली) driving
–ऐंठ d. torque
–बल d. force
–यंत्र रचना d. mechanism
–,वैद्युत electric drive
चित्र कर्म work diagram
चिरसम्मत classical
चुम्बक magnet
चुम्बकत्व, भू terrestrial magnetism
छद्म सम पुर:सरण pseudo-regular procession
छिड़काव गाड़ी sprinkler wagon
छिड़काव यंत्र, घास सीचने का lawn-sprinkler
छिद्रक boring, borer
जकड़, क्लैंप clamp
जगत् रेखांश world line element
जनन generation

जनित्र generator
जलवाष्प water vapour
जहाज का पेटा hull
जातिनाम generic name
जाल grid
जिंबल, गिंबल gimbal
जिज्ञासु, अनुसंधानक investigator
जिमनैस्टिक gymnastic
–, उपकरणीय apparatus gymnastic
जीवित प्राणी living being
जुट set
ज्या sine
–,कोटि cosine
ज्यामितीय geometrical
–,प्रक्षेप पथ g. trajectory
ज्या-वक्रीय sinusoidal
ज्वारभाटा tide
झटका jolt
झाड़ फानूस chandelier
झिनगा caterpillar
झिल्ली membrane
झुकाव inclination
झूलन, झूला swing, swinging
टंकी, स्थायीकारक stabilising tank
टक्कर collision
–,अति प्रत्यास्थ superelastic c.
–,अप्रत्यास्थ inelastic c.
टर्बाइन turbine
टिकिया, मंडलक disc
टेन्सर (तानक ?) tensor
–,अनुसूची t scheme
–, कर्ष strain t.
–कलन गणित t. calculus
–, प्रतिबल stress t
–, समित symmetrical t
टेनिस की थापी tennis racket
ट्राइपस tripos
ठेल thrust
डाइन dyne
(यूनानी भाषा में 'बल' अर्थवाले शब्द डाइनमस dynamus से, स० ग० म० पद्धति में बल का मापक)
डाट plug
डिफरेंशियल (वैषम्यकारक) मोटर-गाड़ी का *differential of an automobile*
डोरी, रज्जु string
डोल प्रयोग, न्यूटन का Newtons' pail experiment
ढग mode
ढोल drum
तनाव tension
तरंग wave
–,अग्र (तरंगाग्र) w. front
–,पृष्ठ w. surface
–,यांत्रिकी w. mechanics
तरल fluid
तर्कसंगत *logical*
तर्जनी forefinger
तल surface

–, सम plane
–, स्पर्श सम tangent plane
तागा, धागा thread
ताप temperature
ताल rhythm
तालबद्ध rhythmic
तिरछा oblique
तिरश्चीन skew
तिर्यक्गतिक loxodromic
तुला balance
तुला दंड b. beam
तुल्य, तुल्यात्मक equivalent
तुल्यकालिक isochronous
–, आचरण, निर्दोषतया rigorously isochronous character
तौल, भार, बट्टा बाट weight
त्रिक triplet
त्रिकोणमितीयात्मक of trigonometrical character
त्रिज्य radial
त्रिज्या radius
–, घूर्णन r. of gyration
–, वक्रता r. of curvature
त्रिभुज, त्रिकोण triangle
त्रुटि का कारण source of error
त्वरण acceleration
–, अभिकेन्द्र centrepetal acceleration
दंड beam
दंडिका rod
दंतुर पहिया=योक्त्र (विपरीत दिशाओं में घूमनेवाला परस्पर संबंधित पहिया) gear
दक्षिणावर्त (र्ती) right handed
दशा परिणम्य state variable
दाना bead
दाब pressure
–, अभिलम्ब normal p.
–, की ऊँचाई p. head
–, गत्यात्मक dynamic p.
–, प्रवणता p. gradient
–, भाप steam p.
दाबमापी manometer
दिक्सूचक compass
–, घूर्णाक्ष gyro c.
दिगंश azimuth
दिन (नाक्षत्र) sidereal day
दिशा (दिक्) निर्देशन (बतलाना) direction
दिष्ट [=दिशैव] धारा direct current
दीर्घकालिक secular
दीर्घवृत्त ellipse
–, का चाप कलन rectification of e.
–, 'वामन' dwarfed e.
दीर्घवृत्तज ellipsoid
–, अभ्रष्ट nondegenerated e
–, परिक्रमण e. of revolution
[परिक्रमण दीर्घ वृत्तज=उपगोल जिसे भी देखिए]
दीर्घवृत्तीयता ellipticity

दीर्घीकरण elongation

दुविधा (संदिग्धता) ambiguity

दृग्विषय=गोचर=घटना phenomenon

दृढ़ rigid.

दृढ़ पिंड rigid body

–, का गति विज्ञान dynamics of r

–, की स्थैतिकी statics of r.

दैशिक कोटिज्या direction cosine

दैशिक परामिति direction parameter

दोलन oscillation

–, अनन्त सूक्ष्म infinitesimal o.

–, अनावर्ती aperiodic o.

–, अवमंदित damped o

–, आवर्तकाल period of o. (दोलन काल)

–, घूर्णक rotary o.

–, तुल्यकालिक isochronous o.

–, पहिया (घडी का) balance wheel (of watch)

–, प्रणोदित forced o.

–, मूर्च्छनागत modulated o.

–, युग्मित coupled o.

–, लुठिनी rolling o.

–, लेखी oscillograph (instrument)

–, लेख्य oscillograph (the graph)

–, लोलकीय pendulum o.

–, शक्वाकार (शाकव) conical o.

– शामक o quencher

दोलनशील oscillatory

दोलायमान oscillating

–, सर्पिल कमानी o helical spring

दोहरा योग double sum

दौगान (मार्ग, अध्ययनप्रणाली) course

द्रव fluid

द्रव्य matter

द्रव्यात्मक material

–, युक्ति m device

द्रष्टा, प्रेक्षक observer

द्रुततमपातवक्र brachistochrone

द्रोणिका trough

द्विखंडक bisector

द्विघातीय समीकरण quadratic equation

द्विदिक् क्रियाशील double acting

द्विपदी binomial

द्विसूत्री bifiliar

धक्का push

धागा thread

धातुशोधन metallurgy

धारणा=भावना concept

धारा current

–, दिष्ट (दिशक, एक दिश) direct c.

धारात्मक rheonomous प्रतिबध।

–, प्रतिक्रिया bearing reaction

धुरी axle
ध्रुववृत्त meridian
ध्रुवीय polar
–, उच्चावचन p. fluctuation.
–, सदिश p. vector
ध्रुवपथ polhode
–, (पिंड शंकु) p. (body cone)
ध्वनि sound
ध्वानिकी acoustics
नत समतल inclined plane
नति inclination
नमूना sample
नम्य=लचीला flexible
नाभि, फोकस focus
नाभिक nucleus
नाभिकीय nuclear
–, विभंजन n. disintegration
निकला हुआ किनारा flange
निकाय=समुदाय system
(पद्धति=प्रणाली)
–, अविनाशी (संरक्षित) conservative s.
–, क्षयशील *dissipative s.*
–, चक्रीय cyclic s.
निक्षेप parenthesis
निगमन deduction
निगूढ़ abstract
निजी (अपना) proper
नितंब वृत्त hip circle
निदर्शन demonstration
निपात, विभव potential drop
निम्नतम अवस्था=भौम दशा ground state
–, आवृत्ति fundamental frequency
–, दशा fundamental state
निम्नाक्ष, दे० उपगोल
नियंत्रक governor
–, अपकेन्द्र centrifugal g.
नियंत्रण constraint
–, अपूर्णपदीय nonholonomic c.
–, पूर्णपदीय holonomic c.
–, समय निर्भर, time dependent
–, स्वतन्त्र *time independent*
नियत fixed
नियत=अचर constant
नियतांक constant
नियम law
नियमित regulated
निरक्ष (भूमध्यरेखा) equator
निरक्षीय equatorial
निरपेक्ष absolute
निरसन *elimination*
निरस्त करना eliminate, annul
निरस्त करना=काटना cancel
निराकरण cancellation, elimination
निरूपण representation
निरोध restriction
निर्देशन direction

निर्देशांक coordinate
—, कार्तीय cartesian c.
—, गोलीय spherical c.
—, चक्रीय cyclic c.
—, ध्रुवीय polar c.
—, नैज intrinsic c.
—, पूर्णपदीय holonomic c
—, लवकोणीय orthogonal c.
—, स्थान position c.
—, स्वेच्छ orbitrary c.
—, वक्रीय curvilined c.
निशिताग्र cusp
निश्चर, अपरिणम्य, invariable, invariant
निश्चरता (अपरिणम्यता) की अभियाचना invariance requirement
निषिद्ध forbidden
निष्पन्द node (vibration) [node (astronomy)=पात]
नैज intrinsic
नोक point [point is ordinarily बिन्दु]
नोदक propeller
नोदित propelled
न्यास data
पंख (बरतन आदि के निकले हुए किनारे) flange
पक्ष (समीकरण) side
पक्षान्तरण transpose, transposition
पक्षीदृष्टि, विहगम-दृष्टि (ऊपर से देखा दृश्य) bird's eye-view
पटरा (पटरी) rule, plat form
—, घूर्णन युक्त rotating platform
—, सर्पी slide rule
पटल lamina
पटलीय laminar
पट्टिका plate
पट्टी strip
पतन fall
पथ path
—, का परिगमन, प्रक्षेप variation of trajectory
—, चिह्न track
—, नियन्त्रक बल guiding force
— नियन्त्रक पटरी guiding rails
—, नियन्त्रण guiding
—नियन्त्रित, पथ प्रदर्शित guided
—, निर्दिष्ट prescribed p.
—, परवलयिक parbolic p.
—, प्रक्षेप, दे० प्रक्षेप पथ
पद term
पदपुंज (व्यंजक) expression
पद्धति, प्रणाली system
[परिवार, निकाय, समुदाय, समूह इनके लिए भी system]
—, अंकन या संकेतन notation
—, अभिदेश reference s.
—, गुरुत्वाकर्षी gravitational s.
—, निरपेक्ष absolute s.
—, स० क० स० [सेंटर, किलोग्राम,

सेकंड] m. k. s. s.
—, स० ग्र० स० [सेंटीमीटर, ग्राम, सेकंड] c. g. s. s.
पनडुब्बी=अंतःसागरीय सबमैरीन submarine
परम (निरपेक्ष) absolute
परमाणवीय atomic
—, उत्पत्ति a. origin
—, भौतिकी a. physics
परमाणु-भार atomic weight
परमाणु atom
—, वाद atomic theory
परवलय parabola
परवलयिक parabolic
परस्पर प्रभाव interplay
परामिति (याँ) parameter (s)
—, दैशिक direction p.
परामितीय parametric
—, निरूपण p. representation
परावर्तन reflection
परिकलक calculator
परिकलन calculation
परिकल्पना hypothesis
परिक्रमण revolution
परिगणन enumeration
परिणमन variation
—, कलन calculus of v.
—, दीर्घकालिक secular v.
परिणम्य variant
परिणम्य पर राशि variable
परिणम्य, क्रिया action variable
परिणाम, फल, उपपत्ति result
परिणामगत, परिणामिक resulting
परिणामी resultant
परिधि circumference
परिपथ circuit
—, गौण secondary c.
—, प्राथमिक (प्रारम्भिक) primary c.
—, युग्मित coupled c.
परिभाषा, व्याख्या, अर्थनिर्देश definition
परिमापी बल peripheral force
—, वेग p. velocity
[from परिमा for circumference]
परिमित finite
परिरक्षित preserved
परिरूप design
परिवर्तन दर, समय के विचार से *time rate of change*
परिवार system
—, ग्रह planetary s.
—, सौर *solar s.*
पर्यवलोकन=सर्वेक्षण survey
पलड़ा scale pan, pan of balance
पश्चवर्तिता=पश्चता=पश्चिता lag
पश्चसरण recession
पहिया wheel
—, घूर्णनयुक्त rotating w.
—, दोलन balance w.
—, प्रतिक्रियाकारित जल reaction

water w.
—, भिन्न दिशाओं मे घूमनेवाला gear
—, लुठन युक्त अर्थात् चलता rotating w
पाठ्याक reading
पात node
[कक्षा या क्रान्ति वृत्त या दो वृहद् का परिच्छेद]
—, चन्द्रीय lunar node
—, रेखा (पातों को मिलाने की रेखा) line of node
पारस्परिक व्युत्क्रम mutual reciprocal
पारस्परिकता reciprocity
पारिभाषिकी terminology
पार्थिव terrestrial
पार्श्वगमन side stepping
पार्श्वता side (पक्ष और भुजा के लिए भी)
पिंजरा cage (घूर्णाक्ष स्थायी के लिए)
पिंड body
—, दृढ rigid b.
—, शंकु b. cone
पिटाट नल pitot tube
पिन, क्रैंक की crank pin
पिस्टन piston
—, दंड p. rod
पुनरुक्ति tautology
पुरःसरण precession
—, चन्द्रीय lunar p.
—, छद्म-सम pseudo regular p.
—, विषुवों का p. of the equinoxes
—, सम regular p.
पुश्ता truss
पूरक कोटिपूरक complementary
पूरा सार sum total
पूर्णपदीय holonomic
—नियन्त्रण h. constraint
—प्रतिबंध h. condition.
पृथक्करण, पार्थक्य separation
—नियताक s constant
—, परिणम्यों का s. of variables
पृष्ठ-तल surface
पृष्ठांश surface element
पृष्ठों की परम्परा system of surfaces
पेच विस्थापन screw displacement
पैदल चलनेवाला pedestrian
पैराफिन प्रकाश paraffin light
प्रकाशिकी=आलोकिकी optics
प्रकृत normal
प्रकृति nature
प्रक्रम procedure
प्रक्रिया process
—, परमाणवीय atomic process
—, सीमान्त limitating process
प्रक्षेप projection
प्रक्षेपपथ trajectory
—, की वक्रता curvature of traj.
—, लम्बकोणीय orthogonal traj.
प्रक्षेप्यों का विज्ञान ballistics or the science of ballistic

प्रचारण propagation
प्रणाली, पद्धति system
प्रणाली, बेतार की तार wireless telegraphy
प्रणोदित *forced*
प्रतिकम्पन counter vibration
प्रतिकर्षण repulsion
प्रतिकार compensation
प्रतिकेंद्रज involute
प्रतिक्रिया reaction
प्रतिक्षेप recoil
प्रतिगमक contra gradient
प्रतिघूर्णन counter rotation
प्रतिच्छेद inter section
प्रतिपरिणम्य contravariant
प्रतिबन्ध condition
—, अपूर्णपदीय non-holonomic c.
प्रतिबल stress
प्रतिमान model
प्रतियुक्ति counter measure
प्रतिरूप counter part
प्रतिरूप picture
प्रतिरूपक typical
प्रतिरोध resistance
—, वायव air resistance
प्रतिलोम, विलोम inverse
प्रतिलोमन, प्रतिलोमीकरण inversion
प्रतिसम्मित antisymmetric
प्रतिसमान्तर antiparallel
प्रतिस्थापन *substitution*
प्रत्यवस्थान restitution
प्रत्यानयन restoring
—, ऐंठ r. torque
—, बल r. force
प्रत्यावर्तक *alternator*
प्रत्यावर्ती धारा alternating current
प्रत्यास्थ elastic
प्रत्यास्थता elasticity
—, वाद theory of elasticity
प्रदेशन prescription
प्रधार jet
प्रभावित वि० वा० व० impressed e. m. f.
प्रभेदित distinguished
प्रमेय theorem
प्रयोग experiment
प्रयोगात्मक, प्रायोगिक (व्यावहारिक के लिए भी) experimental, practical
प्रवणता gradient
प्रवाहण transport
प्रवीक्षा, पूर्वभावना, पूर्वज्ञान anticipation
प्रसरण expansion
प्राथमिक primary
प्रामाणिक, मानक standard
प्रिज्म (समपार्श्व) prism
प्रेरण induction
—प्रभाव, अन्योन्य mutual inductive efforts
प्रोटोन *proton*

फंदा loop
फल, उपपत्ति, परिणाम result
फलन function
—, क्षेत्र field f.
—, दीर्घवृत्तीय elliptical f
—, रूपभेद किया हुआ modified f
—, रैखिक सदिश linear vective f
—, लघुतम क्रिया least action f
—, लाक्षणिक characteristic f
—, लाग्राज का (लाग्राजीय) lagranges f.
बधन binding
बटिया (पत्थर का छोटा टुकड़ा) pebble
बट्टा, बाट (तौल, भार, गौरव) weight
बलवृन्द forces
—, अनुप्रयुक्त applied f.
—, अनुरूप analogous f.
—, अपकेन्द्र centrifugal f.
—, अभिकेन्द्र centripetal f.
—, अभिलम्ब normal f.
—, अवस्थितत्व inertial f.
—, आवेगी impulsive f.
—, खोया हुआ lost f.
—गतिकी kinetics
—, गुरुत्वाकर्षी gravitational f.
—, चालन driving f.
—, पथनियंत्रक guiding f.
—, परिमायी peripheral
—, प्रत्यानयन restoring f
—, कल्पित fictitious f.
—, युग्म couple f
—, बहुपदीय polynomial
बहुभुज polygon
बहुविमितीय poly dimensional
बहुप्रसार manifold
चरमतमा extremum
बिन्दु ("बिन्दु" में देखिए)
बीजतः algebraically
बीजातीत वक्र transcendental curve
बेमेल detuned
बैरोमीटर=वायुदाब मापी barometer
बोधगम्य perceptible
ब्रह्माण्ड विज्ञान cosmology
ब्लाक व टैकल (घिरनी-रस्सी-काटा, साधन) Block & tackle
भाग, विभाजन division
भागफल quotient
भाज्य dividend
भाप का इजन steam engine
भिन्न (राशि), उचित proper fraction
भिन्नांश numerator
भुजांक abscissa
भुजाक्ष axis of abscissa
भूकम्पालेख्य seismograph
भूगणित, भूमापविद्या geodesy
भूचुम्बकत्व terrestrial magnetism
भूमण्डल globe
भूमध्यरेखा equator

भूरेखी geodesic
भौतिकीज्ञ *physicist*
भौतिकी physics
–, क्वांटम quantum p.
–, चिरसम्मत classical p.
–, नाभिकीय nuclear p.
–, परमाणवीय atomic p.
–, प्रयोगात्मक experimental p.
–, सैद्धान्तिक theoretical p.
भौतिकी रसायन विज्ञान physical chemisty
भौम दशा *ground state*
भ्रमि spin
भ्रमिक लट्टू spinning top
–,का वाद theory of a spinning top
मण्डलक, टिकिया disc
मदन retardation
मणिभ crystal
मात्रक, इकाई unit
–, काल *time-unit*
–, गोल u. sphere
–, त्रिज्या u. radius
–, वृत्त u circle
–, संहति *u. mass*
मात्रात्मक quantitative
माध्य mean
माध्यम medium
–, समांग, विषमांग homogeneous, heterogeneous (inhomogeneous)
–, समदिक isotropic m.
–, विषमदिक unisotropic m.
माध्यिका medium
माध्यिकायी समतल medium plane
मान value
मानक, प्रामाणिक standard
मानांकन, कूतना valuation
माप *estimation*
मापक्रम, मापनी measure, scale
मापन measurement
मापांक modulus
मार्ग, दौरान, अध्ययन-प्रणाली course
मार्ग पर चलानेवाली यंत्र रचना steering mechanism
मिथक्रिया inter-action
मिथपरिवर्तन=मिथविनिमय inter-*change*
मिलन, रैखिक अल्पाशों का union of linear elements
मिलाना(यथा सुरमिलाना=सम-स्वरण *tuning*
मिले हुए न होना out of tune
मीमासक teleological
–, गुण t. character
मुद्रा *coin*
मूर्च्छना modulation
–, गत modulated
मूल, मौलिक fundamental, original
–,बिन्दु *original co-ordinates*
–, वर्ग square root
मोचन (मुक्ति प्रदान) liberation

मोटरकार, मोटरगाडी automobile
—, का वैषम्य कारक differential of an automobile
यत्रजात machinery
यत्ररचना mechanism
यथातथ precize
यथार्थता accuracy
यांत्रिक mechanical
यात्रिकी mechanics
—, क्वान्टम quantum m.
—, खगोलीय celestial m.
—, चिरसम्मत classical m
—, प्रयोगात्मक experimental m.
—, सैद्धान्तिक theoretical m.
याथातथ्य precision
युक्ति device
—, द्रव्यात्मक material d.
युक्लिडीय, आकाश Euclidean space
युगपत् simultaneous
युग्म couple
—, घूर्णन rotational c
—घूर्णाक्षस्थापी gyroscopic c.
युग्मक (युग्मन) coupling
—मचिका c. stage
—यत्ररचना c. mechanism
युग्मन गुणाक coupling co-efficient
—, त्वरण तथा वेग acceleration and mobility c.
—, स्थिति position c.
युग्मी, युग्मित coupled
योन्त्र, दतुर चक्र (विपरीत दिशाओं मे चलनेवाले पहिये) gear
योगन summation
योगात्मक additive
योजना plan
रटजन, राजन rontgen
रबरेखा rhomb line
रचना, निर्माण construction
रज्जु = डोरी string, rope
रस्सा तारो या सन का बना cable
रिच wrench
रूपभेद modification
रूपरचना configuration
रूपान्तरण transformation
—, स्पर्शात्मक contact t.
रेखन, रेखाचित्रण drawing
रेखाश longitude
—, खगोलीय celestial l.
रेखाकृति diagram
रेखाचित्र graph
रेखान्वित spaded
रेखीय, रैखिक linear
रेचक (शून्यकारक) exhaust
रेडियन radian
रेडियो-तरग radio-waves
रेलगाडी का इजन locomotive
रेलगाडी, वैद्युत electric train
रैखिक linear
लम्ब perpendicular
लम्बकोणिक, लम्बकोणीय orthogonal

medium
विखडन resolution (of forces)
विघटन decomposition
विचलन deviation
विचित्रालय, अजायबघर museum
वितरण distribution
—, भार d. of weight
वितान गणित extension analysis
विद्यापीठ, विश्वविद्यालय university
विद्युत्-पथ electric path
विद्युत् वाहन बल electro motive force
विद्युत्-बल या शक्ति electric power
विनिश्चायक decisive
विनिर्दिष्ट करना specify
विपर्ययतः antonymously
विभजन disintegration
विभव potential
विमान aeroplane
विमिति dimension
विराम rest
विरूपित deformed
विरूप्य deformable
विलोम, प्रतिलोम inverse
विवरणिका report
विवर्तन diffraction
वि० वा० व० E. M. F. impressed E. A. F.
विविक्त discrete
विवृति, उपचार treatment
विवेचन discussion
विश्लेषण analysis
विषमदिक् anisotropic
विषमांग inhomogenous
विषमांगता inhomogenity
विषुव बिन्दु equatorial point
विस्थापन displacement
विस्थिति, क्रान्तिकाल, सकटकाल crisis
विस्फोटन explosion
वृत्त circle
—, खंड segment
वृत्तजात cycloid
वृत्तीय आवृत्ति circular frequency
वेग velocity
वेगलेख hodograph
वैद्युत् गतिकी, वैद्युत गति विज्ञान electro-dynamics
वैद्युत चालन electric drive
वैद्युत धारितायी प्रभाव electric capacitative effects
वैद्युत् स्थैतिकी electro-statics
वैध valid
वैधिक canonical
—, तथा सयुग्मी canonically conjugate
वोल्ट volt
व्यजन, व्यंजक, पदपुंज expression
व्यतिकरण interference
व्यवस्थापन, सूचीकरण formulation

व्यस्तक्रम inverse order
व्यापकीकरण generalisation
व्यापकीकृत generalised
व्यावहारिक, प्रयोगात्मक, प्रायोगिक practical
व्यासाभिमुख diagonally opposite
व्यासिद्ध resolved
व्युत्क्रम (गणित), पारस्परिक reciprocal
व्युत्पत्ति, व्युत्पादन derivation
शांकवीय, शक्वाकार conical
शंकु cone
–आकाश conical space
–, काट, शांकव c section
शसिका, टिप्पणी remark
शक्ति power (dynamics)
–, वाहकतार power line
शर्त, प्रतिवन्ध condition
शांकव conic section (figure)
शामक, दोलन oscillation quencher
शिक्षात्मक, शिक्षा शास्त्रानुसार didactic
शिखर अनुनाद resonance peak
शिल्पिक technical
शिल्प any manual or mechanical art
शीर्षकोण vertex
शून्यप्राय vanishing
शून्य बिन्दु zero point
शून्य होना vanish
शेषपूर्ति, सपूरक supplementary
श्रेणी=माला series
–, अभिसारी converging series
–, गुणोत्तर Geometric series
–, घात power series
षट्क sextet
षड्भुजीय hexagonal
सकर (स्वर) beats
सकेत symbol
सकेतक (प्रतीक) symbol
सकेतन=अकन पद्धति notati n
संकेताक index number
संक्रमण transition
–अवस्थान transitional stage
सगत=अनुरूप compatible, consistant, corresponding
संगामी concurrent
सगी, समागमी associated
संघटन composition
संघनन condensation
संघात impact
संचय combination
सचलन movement
संचारित transmitted
संतुलन balancing
संतुलित equilibrated
संतृप्त saturated
संतोलक equilibrant
सधि (मेल) reconciliation
सधि (शारीरिक जोड़) joint

रीक्षा scrutiny
ात coincidence
ोडन compression
रक, पूरक, शेषपूर्त्ति supplement
धक दण्ड connecting rod
मित, ससमिति symmetrical
मिति symmetry
हीन, असमित unsymmetrical
क्त composite, joint, combined
ग्मी conjugate
ोग, सचय combination
ोजन combination, composition
क्षक, सरक्षित conservative
क्षण, अविनाशित्व conservation
हन (सवहनकारित) convective
ति mass
चर (परिणमनशील) variable mass
चल moving mass
मात्रक unit mass
कोतर socket
ापन verification
दिक्, सदिश vector
, सवेगी ऐठ impulsive torque v.
, फलन रैखिक linear v. function
, बीजगणित v. algebra
दृश वस्तु analogue
निकट approximate

समंजन adjustment
समकाल वक्र tanta chrone
समकोण right angle
समकोणीय, समकोणिक rectangular
समतल plane
—, अपरिणमनीय invariable plane
समदिक् isotropic
समधर्मी analogous
समपार्श्व prism
समवर्ग square
समय time
— अवकलन t. derivative
— निरपेक्ष absolute time
— निर्भर t. dependent
— समाकल t integral
—, स्वतन्त्र t independent
समरूप similar
समरेख co-linear
समवाय group
सम-बाहु equilateral
समसस्थ homologous
समस्या problem
सम-स्वरण tuning
समस्वरित, मिलाया हुआ tuned
समाग (general) समघात (expression) homogeneous
समान्तर चतुर्भुज parallelogram
समान्तर फलक parallelo piped
समाई, आयतन (पुस्तक भी) volume
समाकल integral

–, ऊर्जा का i. of energy
–, कला phase i.
–, दीर्घवृत्तीय elliptical i.
समाकलन integration
समाकल्य integrand
समानकोणिक equiangular
समानुपातीय गुणनखण्ड factor of proportionate digits
समाहृत=सांद्र=एकत्रीकृत concentrated
समीकरण equation
–, चलात्मक kinematic e.
–, चिरसम्मत रूप का e. of classical form
–, दीर्घकालिक secular e.
–, दीर्घवृत्तज का e. of ellipsoid
–, परामितीय parametric e.
–, पूरक complimentary e.
–, वर्गात्मक quadratic e.
समुच्चयन consolidation
समुद्री तार cable
सम्मिश्र complex
–, चर राशि (परिणम्य) c. variable
–, संकेतन c, notation
–, समतल c. plane
सरलावर्त्त simple harmonic
सर्पिल कमानी spiral spring
सर्पी sliding
सर्पी पटरी, स्लाइड रूल slide rule
सर्वसम identical
सर्व समिका identity
सर्वांग समता congruence
सर्वेक्षण, पर्यवलोकन survey
सहखण्ड (सहगुणनखण्ड) cofactor
सहागमी=सगी associated
सहायक auxiliary
सांख्यिकीय statistical
साकार concrete
साधन subject
साधन appliance
साधन solution
साध्य proposition
सापेक्ष, आपेक्षिक relative
सामर्थ्य तुल्यता equipollence
साम्यावस्था equilibrium
सारणिक determinant
सारणी table
सार्व common
सार्वत्रिक universal
सार्वदेशिक सैनिक राजसेवा universal military service
सर्वराष्ट्रीय आयोग international commission
साहुल सूत्र plumb line
सिद्धान्त principle
सीमान्त boundary
सीमान्त=सीमायी=चरम limiting
सीस, सीसा (धातु) lead
सुग्राही sensitive
सुव्यक्त explicit

सूक्ष्ममापी micrometer
सूत्र formula
सूत्रीकरण, व्यवस्थापन formulate
सेतु bridge
सैद्धान्तिक theoretical
सौन्दर्यबोध संपन्न aesthetic
सौर परिवार solar system
स्कीइंग [लकड़ी का लम्बा पटरा एक-एक पैर के नीचे बांधकर बर्फ पर सरकना] skiing
स्केटिंग ['धारदार जूतों' पर बर्फ पर सरकना] skating
स्खलन slipping
स्तंभ, स्थान dead positive
स्तर level
स्थानच्युति perturbation
स्थानभ्रंश dislocation
स्थानान्तरण translation
स्थानात्मक spatial
स्थावर stationary
स्थिति case
स्थिति, स्थान, अवस्थान position
स्थितिज ऊर्जा, देखिए ऊर्जा
स्थिरमान की दशा steady state
स्थूल रेखन, स्थूल वर्णन sketch
स्थैतिक static
स्थैतिकी statics
—, निर्माण सम्बन्धी structural s
—वैद्युत electro statics
स्नेहन lubrication
स्पर्श रेखा tangent
स्पर्शता tangency
स्पर्शीय (स्पर्शात्मक) रूपान्तरण contact transformation
स्वतन्त्रता संख्या degrees of freedom
स्वतः चालित automatic
स्वयंतथ्य (स्वयंसिद्ध) axioms
स्वीकृत postulate
स्वेच्छ, कोई भी, कुछ भी arbitrary
हर denominator
हल, साधन solution
हस्तान्तरण transference
हीलियम helium
हुप hoop

अंग्रेजी-हिन्दी

abscissa भुजांक
absolute (sense of limiting) चरम, परम
absolute (sense, not relative) निरपेक्ष
absorption अवशोषण
acceleration त्वरण
accuracy यथार्थता
acoustics ध्वानिकी
acting forces आरोपित वल
action क्रिया
adjustable समंजनीय
algebraically वीजतः
alpha (α) particle अल्फाकण
alternator प्रत्यावर्तक
amplitude आयाम
analogous अनुरूप, सहधर्मी
analogue सदृश वस्तु
analysis विश्लेषण
anharmonic असरलावर्त
anisotropic विषमदिक्
anomaly कौणिकांतर
anticlockwise वामावर्त्त
antiparallel प्रति-समातर
antisymmetric प्रति समित
antonymously विपर्ययतः
aperiodic अनावर्त्त
aphelion उच्च विन्दु (अपभानु)
apparatus उपकरण
appliance साधन
application अनुप्रयोग
arbitrary स्वेच्छ, कुछ भी, कोई भी इ०
arc चाप
area क्षेत्रफल
argument (trigonometry) आयामांक
arm भुजा, वाहु
associated सगी, सहगामी
assumption अनुमान
astronomy खगोल विज्ञान, –,विद्या
asymptote अनतस्पर्शी
atomic परमाणवीय, परमाणव
automatic (mechanical) यंत्रवत्
automatic (self acting) स्वतःचालित
automobile मोटरकार (गाडी)
auxiliary सहायक
axiom स्वयंतथ्य, स्वयसिद्ध
axis अक्ष

axle धुरी
axle bearing धुराधार
azimuth दिगंश
balance तुला
balance wheel दोलन पहिया
balancing संतुलन
ballistics प्रक्षेप्य विज्ञान
barometer बैरोमीटर, वायुदाबमापी
base आधार
beam दंड
beats (स्वर) मकर
bevel, bevelled कोर मारा हुआ
bifiliar द्विसूत्री
binomial द्विपदी
bisector द्विखंडक
block ईंट, टिल्ली, ब्लाक
block & tackle घिरनी-रस्सी-काटा -साधन
bob गोलक
body पिंड
boring छिद्रक
boundary सीमा, सीमांत
brachistrone द्रुततमपात वक्र
bridge सेतु, पुल
buoyancy उत्प्लावकता
cable केबल, समुद्री तार, सन या तारों का रस्सा
calculation परिकलन
calculus कलन, कलन गणित
calculus, differential अवकलन गणित, चलन-कलन
calculus, integral कलन गणित, चलराशि कलन
calculus of variations परिणमन कलन
canonical वैधिक
capacitive (electrical effect) (वैद्युत) धारितात्मक प्रभाव
capillarity केशिकत्व
causal कारणात्मक
celestial खगोलीय
centrifugal अपकेन्द्र
centripetal अभिकेंद्र
charge आवेश, चार्ज
circle वृत्त
circuit परिपथ
circumference परिधि
clamp क्लैंप, जकड़
classical चिरसम्मत
coefficient गुणांक
cofactor सह (गुणन) खंड
cogradient अनुगमक
coincidence संपात
colatitude अक्षांश कोटि
collinear समरेख
collision टक्कर
combination संचय, संयोग
commutative क्रम विनिमेय
compass दिक् सूची
compensated प्रतिकारित
complement, complimentary

कोटिपूरक, पूरक
complex सम्मिश्र
component घटक
composition संघटन
compound यौगिक
compression संपीडन
concentration समाहरण, सांद्रण
concurrent संगामी
condensation सघनन
condition प्रतिबंध, शर्त
cone शंकु
configuration रूपरचना
congruence सर्वांग समता
conical शाकव, शक्वाकार
conics, conic sections, शाकव
conjugate संयुग्मी
conservation अविनाशित्व, संरक्षण
constant नियत, निश्चर, नियताक
constraint नियंत्रण
contact स्पर्श, संपर्क
contragradient प्रतिगमक
contravariant प्रतिपरिणम्य
convective संवहनकारित
converging अभिसारी
converse विलोम
coordinate निर्देशांक
corollary उपप्रमेय
corpuscular कणिका
cos कोज्या
cosine कोटिज्या.
cosmology ब्रह्माड-विज्ञान
couple युग्म
coupling युग्मन
covariant सहचर, अनुपरिणम्य
crank क्रैंक
critical क्रांतिक, गुणदोप-विवेचक
cross head क्रास हैड
cross-section अनुप्रस्थ काट
crosswise कैंचीवत्
crystal क्रिस्टल, स्फटिक, मणिभ
cue(billiards) क्यू
current, direct दिष्ट धारा
curvature वक्रता
curve वक्र
cusp निशिताग्र
cycle चक्र
cycloid वृत्तजात
cylinder सिलिंडर
damping अवमदन
data दत्त, न्यास
dead position स्तंभ स्थान
deceleration अवत्वरण
decomposition विघटन
decrement अपचय
definition परिभाषा, व्याख्या, अर्थ-निर्देश
deflection विक्षेप
deformation विकृति
deformable विरूप्य
degeneracy भ्रष्टता

degree अंश (भाग), कोटि, घात (राशि, समीकरण)
degree of freedom स्वतंत्रता संख्याएँ
demonstration निदर्शन
denominator हर
derivation व्युत्पत्ति, व्युत्पादन
derivative अवकलज
determinant सारणिक
detuned बेमेल
develop विस्तार करना, विकसित करना
deviation विचलन
device युक्ति
diagonal विकर्ण
diagram रेखाचित्र
diameter व्यास
differential (automobile) वैपम्यवास डिफरेंशियल
differential (mathematics) अवकल
differentiation अवकलन
diffraction विवर्तन
dimension विमिति
direction (guiding) निर्देशन
direction (space) दिशा
disc (k) मंडलक टिकिया
discovery आविष्कार
disintegration विभजन
dislocation स्थानभ्रंश
dispersive विक्षेपक
displacement विस्थापन
dissipation क्षय
distribution वितरण
diverge अपसरण करना
division भाग, भाजन
drawing रेखन
dynamic गत्यात्मक, चलात्मक
dynamics गतिविज्ञान, गतिकी
dyne डाइन
eccentricity उत्केन्द्रता
ecliptic क्रांतिवृत्त
effort आयास
elastic प्रत्यास्थ
elasticity प्रत्यास्थता
electrodynamics वैद्युत गतिकी
electromagnetic वैद्युत् चुम्बकीय
electro motive force विद्युत् वाहक बल
electron इलेक्ट्रान
element अल्पांश
elevator उत्थानक यंत्र
elimination निरसन
ellipse दीर्घवृत्त
ellipsoid दीर्घवृत्तज
ellipticity दीर्घवृत्तीयता
elongation दीर्घीकरण
embankment बाँध, बंध
E. M. F. वि० वा० ब०
emission उत्सर्जन
empirical आनुभविक
energy ऊर्जा

engineering इजीनियरी
enumeration परिगणन
envelope अन्वालोप
equation समीकरण
equator निरक्ष, भूमध्यरेखा
equatorial निरक्षीय
equiangular समान कोणिक
equilateral समबाहु
equilibrant सतोलक
equilibrated सतुलित
equilibrium साम्यावस्था
equinoctial point विषुव-विन्दु
equinox विषुव
equipollence सामर्थ्य तुल्यता
equivalence तुल्यता
equivalent तुल्य, तुल्यात्मक
erg अर्ग
erosion काट
evolute केन्द्रज
exercise अभ्यास, अनुशीलन
exhaust इगझास्ट, रेचक, शून्यकारक
expansion प्रसार
experiment प्रयोग
explosion विस्फोटन
exponential घातीय
expression व्यंजन, पदपुज
extension analysis वितान गणित
extrapolation वहिर्वेगन
extreme चरम सीमा
extremum वाह्यतमी

factor गुणनखंड
feat आश्चर्य कार्य
field क्षेत्र
finite परिमित
fixed नियत, स्थिर
flange निकला हुआ किनारा, पख
flexible नम्य, लचीला
flip चपेट लगाना (अगुली या अगूठे द्वारा)
fluctuation उच्चावचन
fluid तरल
fly wheel गति-पालक चक्र
focus फोकस, नाभि
force वल
forced प्रणोदित
fore finger तर्जनी
formal औपचारिक
formalism अनुष्ठान
formula सूत्र
fraction भिन्न
frame ढाँचा
free स्वतन्त्र
freedom, degree of, स्वतंत्रता संख्या
frequency आवृत्ति
friction घर्षण
fulcrum आलव
function फलन
fundamental मौलिक, निम्नतम
galvanometer गैल्वानोमापी-, विद्युत् धारामापी

gear गीयर, दंतुर चक्र, विपरीत दिशाओं में चलनेवाले पहिये
general व्यापक
generator जनित्र
generic name जाति नाम
geodesic भूरेखा
geodesy भूगणित, भूमाप विद्या
geographic भौगोलिक
geoid भ्वाभ
geometric ज्यामितीय
geometric series गुणोत्तर श्रेणी
gimbals (जि)म्बल, (दर्शक आदि युक्त लटकाने की एक युक्ति विशेष)
global भूमंडलीय
governor नियामक
gradient प्रवणता
graph ग्राफ, लेखाचित्र
gravitation गुरुत्वाकर्षण
gravity गुरुत्व
grid जाल
ground भूमि, निम्नतम
group समवाय
guide पथ (गति) नियामक युक्ति
guideways नियंत्रक पथ
gymnastics जिम्नैस्टिक
gyration घूर्णन
gyrocompass घूर्णाक्ष दिक्सूचक
gyroscope घूर्णाक्ष स्थायी
gyrostabilizer घूर्णाक्ष स्थायीकार
harmonic (simple h) सरलावर्त
helium हीलियम
hexagon षड्भुज
hip circles नितम्ब वृत्त
hodograph वेगालेख
holonomic पूर्णपदीय
homogeneous समांग
homologous समसम्ब
hoop हूप
horizontal क्षैतिज
hull जहाज का पेंदा
hydrodynamics तरल गतिकी
hyperbola अति परवलय
hyper surface अतिपृष्ठ
hypothesis परिकल्पना
identity सर्वसमिका
impact सघात
import आयात
impressed e. m f. प्रभावित वि० वा० व०
impulse आवेग
incidence आपात
inclined plane नत समतल
indeterminate अनिर्धारणीय
index संकेतांक, वर्णानुक्रमणिका
induction प्रेरण
induction, mutual अन्योन्य प्रेरण
induction, self आत्म प्रेरण
inertia अवस्थितित्व
inertia, moment of अवस्थितित्व-

घूर्ण

inextensible अवितननीय

infinite अनन्त

infinitesimal अनंत सूक्ष्म

nfinity अनंत दूरी

nhomogeneous विषमांग

tegral समाकल

tegral number पूर्ण संख्या

egrand समाकल्य

gration समाकलन

nsity तीव्रता

raction मिथक्रिया

change मिथविनमय

erence व्यतिकरण

ediate अंतरवर्ती, मझोला

ay परस्पर प्रभाव

tion प्रतिच्छेद

अंतर (of space) अंतराल

ne) कालांतर

र्नंज

अचर, अचर राशि

अपरिणम्य

ईजाद

जाता, उद्भावक

लोम, विलोम

तिलोमन

अनुसंधान

नुसंधानक, जिज्ञासु

न्द्रज

isochronism तुल्य कालिकता

isochronous तुल्यकालिक

isotropic समदिक्

jet प्रधार

joint (combined) संयुक्त

joint (of body) संधि

jolt झटका

justification समर्थन, ठीक ठहराना

kinematic चलात्मक

kinematics चलगतिकी

kinetic चलात्मक, गत्यात्मक, गतिज

kinetics चलगतिकी

knife edge क्षुराधार

latitude अक्षांश

label लेबल, अंकितक

lag पश्चिता, पश्चवर्तिता

lamina पटल

law नियम

lead (metal) सीस, सीसा

level, energy ऊर्जा, स्तर

limit सीमा

limiting सीमांत, सीमायी

lineal, linear रैखिक, रेखीय

link कड़ी

lithium लिथियम

live सजीव (प्रत्यक्ष), जीवित

load बोझ

logarithm लघुगणक

longitude रेखांश

longitudinal अनुदैर्घ्य

ohmic ओमीय
opposite अभिमुख, विरुद्ध
optical आलोकीय, प्रकाशीय
optics आलोकिकी, प्रकाशिकी
optimum उपयुक्ततम
orbit कक्षा
order कोटि
origin उत्पत्ति, उद्गम, मूल
orthogonal लवकोणीय keeping for rectangular, समकोणीय
oscillating दोलायमान
oscillation दोलन
oscillatory दोलनशील
oscillograph (the instrument) दोलन लेखी
oscillograph (the graph) दोलन लेख्य ।
osculating आश्लेपक
pan (of balance) पलड़ा
parabola परवलय
parabolic परवलयिक
paraffin पैरेफिन
parallel समांतर
parallel, antiparallelogram प्रति समांतर समातर चतुर्भज
parallelopiped समांतर फलक
parameter परामिति
particle कण
path पथ
peak शिखर
pebble वटिया
pendulum लोलक
perfect निर्दोप, यथार्थ
perihelion नीचबिंदु (अभिभानु)
period (periodic time) आवर्तकाल काल
permutation क्रमचय
peripheral परिमापी
perpendicular लंब, लंबवत्
perturbation स्थानच्युति
phase कला
phase difference कलांतर

phenomenon गोचर, घटना, दृग्विपय
philosophy ज्ञान, दर्शनशास्त्र
physicist भौतिकीज्ञ
physics भौतिकी
piston पिस्टन
pivot कीलक
plane समतल
planet ग्रह
plate पट्टिका
platform पटरा, प्लैटफार्म
plot आलेखन
plug डाट
plumb line साहुल सूत्र
point बिंदु
polar ध्रुवीय
polhode ध्रूपथ
polygon बहुभुज

ohmic ओमीय
opposite अभिमुख, विरुद्ध
optical आलोकीय, प्रकाशीय
optics आलोकिकी, प्रकाशिकी
optimum उपयुक्ततम
orbit कक्षा
order कोटि
origin उत्पत्ति, उद्गम, मूल
orthogonal लवकोणीय keeping for rectangular, समकोणीय
oscillating दोलायमान
oscillation दोलन
oscillatory दोलनशील
oscillograph (the instrument) दोलन लेखी
oscillograph (the graph) दोलन लेख्य।
osculating आश्लेपक
pan (of balance) पलड़ा
parabola परवलय
parabolic परवलयिक
paraffin पैरेफिन
parallel समांतर
parallel, antiparallelogram प्रति समांतर समांतर चतुर्भज
parallelopiped समातर फलक
parameter परामिति
particle कण
path पथ
peak शिखर
pebble वटिया
pendulum लोलक
perfect निर्दोष, यथार्थ
perihelion नीचबिंदु (अभिभानु)
period (periodic time) आवर्तकाल काल
permutation क्रमचय
peripheral परिमापी
perpendicular लव, लंबवत्
perturbation स्थानच्युति
phase कला
phase difference कलातर

phenomenon गोचर, घटना, दृग्विषय
philosophy ज्ञान, दर्शनशास्त्र
physicist भौतिकीज्ञ
physics भौतिकी
piston पिस्टन
pivot कीलक
plane समतल
planet ग्रह
plate पट्टिका
platform पटरा, प्लैटफार्म
plot आलेखन
plug डाट
plumb line साहुल सूत्र
point बिंदु
polar ध्रुवीय
polhode ध्रूपथ
polygon बहुभुज

अन्योन्य (number) व्युत्क्रमण
reciprocating (engine) परिपाटीसे पिस्टनों के इतस्ततः गामी
recoil प्रतिक्षेप
rectangle आयत
rectilinear (figure) आयताकार
rectangular समकोण for orthogonal, लंबकोणिक
rectification चापकलन
rectilinear ऋजुरेखीय
reduction लघुकरण
reference अभिदेश
reflection परावर्तन
refraction वर्तन
regular सम
relative आपेक्षिक, सापेक्ष
relativity आपेक्षिकता
relativistic आपेक्षिकतात्मक
representation निरूपण
repulsion प्रतिकर्षण
requirement अभियाचना, माँग
research गवेषणा
resistance (elecrtical) प्रतिरोध, (general) रोध
resolution विखंडन
resolved part खंड
resonance अनुनाद
rest विराम
restitution प्रत्यवस्थान
restoring प्रत्यानयन
restriction निरोध
result फल, उपपत्ति, परिणाम
resultant परिणामी
resulting परिणामिक, परिणामगत
retardation मंदन
reverse उत्क्रम
reversible उत्क्रमणीय
revolution परिक्रमण
revolving door घूमनेवाला दरवाजा
rheonomous धारात्मक
rhumb line रव रेखा (*जहाज मार्ग* रेखा)
rhythm ताल
rhythmic तालबद्ध
right angle समकोण
rigid दृढ़
ring वलय, घेरा
rocket रॉकेट (हवाई बाण)
rolling लुठन, लुढ़कना, लुंठनयुक्त, लुढ़कता
rotating घूर्णनयुक्त
rotation घूर्णन
row पंक्ति
r. p. m. (rotations per minute) घू० प० म० (घूर्णन प्रतिमिनट)
rule कायदा
runners लंबे पट्टे (टिन पर जड़ी एवं सरकती है)
saturated संतृप्त
scalar अदिश

अन्योन्य (number) व्युत्क्रमण
reciprocating (engine) परिपाटीसे पिस्टनों के इतस्ततः गामी
recoil प्रतिक्षेप
rectangle आयत
rectilinear (figure) आयताकार
rectangular समकोण for orthogonal, लंबकोणिक
rectification चापकलन
rectilinear ऋजुरेखीय
reduction लघुकरण
reference अभिदेश
reflection परावर्तन
refraction वर्तन
regular सम
relative आपेक्षिक, सापेक्ष
relativity आपेक्षिकता
relativistic आपेक्षिकतात्मक
representation निरूपण
repulsion प्रतिकर्षण
requirement अभियाचना, मांग
research गवेषणा
resistance (elecrtical) प्रतिरोध, (general) रोध
resolution विखंडन
resolved part खंड
resonance अनुनाद
rest विराम
restitution प्रत्यवस्थान
restoring प्रत्यानयन
restriction निरोध
result फल, उपपत्ति, परिणाम
resultant परिणामी
resulting परिणामिक, परिणामगत
retardation मंदन
reverse उत्क्रम
reversible उत्क्रमणीय
revolution परिक्रमण
revolving door घूमनेवाला दरवाजा
rheonomous धारात्मक
rhumb line रंब रेखा (जहाज मार्ग रेखा)
rhythm ताल
rhythmic तालबद्ध
right angle समकोण
rigid दृढ़
ring वलय, घेरा
rocket रॉकेट (हवाई बाण)
rolling लुठन, लुढ़कना, लुठनयुक्त, लुढ़कता
rotating घूर्णनयुक्त
rotation घूर्णन
row पंक्ति
r. p. m. (rotations per minute) घू० प० म० (घूर्णन प्रतिमिनट)
rule कायदा
runners लंबे पट्टे (टिन पर जड़ी एवं सरकती है)
saturated संतृप्त
scalar अदिश

scale मापक, मापनी
scleronomous स्थिरप्रचर, स्थिरात्मक
screw पेंच
secondary गौण
section काट, प्रकरण
secular दीर्घकालिक
segment वृत्त (वक्र) खंड
seismogram भूकंपलेख
self induction आत्म प्रेरण
seminar विचारगोष्ठी
sensitive सुग्राही
series माला, श्रेणी
set जुट
sextet षट्क्
shaded छायांकित
shaft ईषा
shot निशाना
side (equation) पक्ष
 (figure) भुजा, बाहु
 (spinning motion given to a ball by striking it one side) पार्श्वता
side-stepping पार्श्वगमन
signal संकेत
simultaneous equation युगपत् समीकरण
sine ज्या
singular (point) विचित्र (बिंदु)
sin h ज्याति
sinusoidal ज्यावक्रीय
size आकार
skating, see स्केटिंग दे० स्केटिंग
skew तिरछीन
skiing स्कीइंग, स्की दे०
[illegible] स्कि दे०
slide rule स्लाइड रूल, सर्पिटरी
[illegible] नर्मी
slipping फिसलन
[illegible] मदन
socket सकाट, कोटर
solar system सौर परिवार
solution साधन, हल
source उद्गम
space आकाश
spatial स्थानात्मक
spectrum वर्णक्रम
speed चाल
sphere गोल, गोला
spheroid उपगोल
spin भ्रमि
spinning top भ्रमिक लट्टू
spiral spring सर्पिल कमानी
sprinkler wagon छिड़काव की गाड़ी
square वर्गात्मक
 (n., power) वर्ग
square root वर्गफल
stability स्थायित्व
stabilizer स्थायीकारक
stable स्थायी

standard प्रामाणिक, मानक
stationary स्थावर
statistic (cal) सांख्यिकीय
static स्थैतिक
statics स्थैतिकी
steady स्थिर भावे की
steel फौलाद
steering मार्ग पर चलाना
stiffness कड़ापन
strain कर्ष
street car ट्रामगाडी
strength प्रबलता
stress प्रतिवल
string डोरी, रज्जु
strip पट्टी
stroke प्रहार
subject विषय, साधन
submarine अंतःसागरीय, पनडुब्बी, सबमरीन
subscript निम्नलिखन
substitution प्रतिस्थापन
suffix अनुलिखन
summation योगन
superconductivity अति-चालकता
superelastic अतिप्रत्यास्थ
superposition. अधिष्ठापन
superscript उपरिलिखन
supplement (angle) संपूरक कोण (subject matter) शेषपूर्ति
support आधार
surface पृष्ठ
survey पर्यवलोकन, सर्वेक्षण
suspension अवलंबन
sweep out बुहारना
swing झूलन, झूला
symbol प्रतीक, संकेतक
symmetric (cal) समित, ससमिति
symmetry संमिति
system (method or way) पद्धति, (number of things) निकाय, समुदाय (solar–) परिवार
tangency स्पर्शता
tangent स्पर्श रेखा
tank टंकी
tautochrone समकालवक्र
tautology पुनरुक्ति
technical शिल्पिक
teleological मीमांसक
temperature ताप
temporal कालात्मक
tennis racket टेनिस की थापी
tension तनाव
tensor टेन्सर
term पद
terminology पारिभाषिकी
terrestrial पार्थिव
terrestrial magnetism भूचुंबकत्व
text मूल रचना (लेखीय)
theological आध्यात्मिक

theorem प्रमेय
theoretical सैद्धांतिक
theory वाद, सिद्धान्त
thermal ऊष्मीय
thermodynamics ऊष्मागतिकी
thesis गवेषणा निबन्ध, शोध निबन्ध
thread तागा, धागा
thrust ठेल
tidal ज्वारभाटा [illegible]
time काल, समय
tool करण
top लट्टू
torque ऐंठ
trace (a curve) अनुरेखन
track पथचिह्न
trajectory प्रक्षेप पथ
transcendental बीजातीत
transference स्थानान्तरण
transformation रूपान्तरण
transition संक्रमण
translation स्थानान्तरण
transmitted संचारित
transport प्रवाहण
transpose पक्षान्तर
transverse अनुप्रस्थ
trigonometric त्रिकोणमितीय
triplet त्रिक्
trolley ट्राली
trough द्रोणिका
truss पुश्ता
tune मिलाना
turning [illegible]
turn table घुमाने की मेज
typical प्रतिरूपी, प्ररूप सदृश
uniform [illegible] समान
uniform circular [illegible]
unit मात्रक, इकाई
universal सार्वत्रिक
universe विश्व, विश्वब्रह्माण्ड
valid वैध
value मान
vanish शून्य होना
variant पद, परगति
variable परिणम्य
variation परिणमन
vector सदिश
vectorial सदिक्, सदिशीय, सदिश
velocity वेग
verify सत्यापित करना
vertex शीर्ष
vertical ऊर्ध्वाधर
vibrating कंपायमान
vibration कंपन
vibratory कंपनशील
victim शिकार
virtual आभासी
volt वोल्ट
wave तरंग
wave front तरंगाग्र
weight भार, तौल, बाँट, गौरव

wheel पहिया
"wobbling" लड़खड़ाना
work कार्य, कर्म
world line जगत् रेखा
wrench रिंच
yo-yo यो-यो (एक खिलौना)

रद जोशी

जन्म : 21 मई 1931, उज्जैन (म० प्र०)

शिक्षण : यहाँ वहाँ, पता नहीं कहाँ-कहाँ। अन्त में होल्कर ग्विद्यालय इन्दौर से बी०ए०।

शुरू में कहानियाँ, फिर जुड़ी पत्रकारिता, व्यंग्य लेखन, पाल में सरकारी नौकरी कुछ सालों और अब पिछले पन्द्रह वर्षों स्वतन्त्र लेखन।

पहली किताब—'परिक्रमा'। फिर 'किसी बहाने', 'जीप पर ार इल्लियाँ,' 'तिलस्म', 'रहा किनारे बैठ', 'दूसरी सतह' और छले दिनों'।

नाटकों का चस्का। 'अंधों का हाथी' और 'एक था गधा उर्फ़ ादाद खां' नाटकों के प्रदर्शन सर्वत्र हुए।

फिलहाल बंबई में रहते हैं।

त्रिलोचन :

जन्म : 20 अगस्त 1917, चिरानीपट्टी, कटघरापट्टी, सुल्तानपुर, उ० प्र०।

शिक्षा : बी० ए० तथा एम० ए० (पूर्वार्द्ध) अंग्रेजी साहित्य में।

आज, जनवार्ता, समाज, प्रदीप, चित्ररेखा, हंस और कहानी आदि पत्रिकाओं और समाचार पत्रों का सह-सम्पादन कर चुके हैं।

1952-53 में गणेशराय नेशनल इन्टर कालेज जौनपुर में अंग्रेजी के प्रवक्ता।

1970-72 के दौरान विदेशी छात्रों को हिन्दी, संस्कृत और उर्दू की शिक्षा।

कुछ वर्ष उर्दू विभाग, दिल्ली विश्वविद्यालय की द्वैभाषिक कोश (उर्दू-हिन्दी) परियोजना में कार्य।

सम्प्रति : अध्यक्ष मुक्तिबोध पीठ, सागर विश्वविद्यालय, सागर (म० प्र०)।

प्रकाशित कृतियां :
- धरती (कविता संग्रह 1945, दूसरा संस्करण . 1977)
- गुलाब और बुलबुल (ग़ज़लें और रुबाइयां 1956)
- दिगन्त (सॉनेट . 1957)
- ताप के ताए हुए दिन (कविता संग्रह . 1980)
- शब्द (कविता संग्रह . 1980)
- उस जनपद का कवि हूँ (कविता संग्रह . 1981)
- अरघान (कविता संग्रह . 1984)

पता : सी-50, गौरनगर, सागर विश्वविद्यालय, सागर—470003

डा० रमेशचन्द्र कपूर

आपका जन्म २२ दिसम्बर १९२७ को हुआ। सन् १९४६ में आपने प्रयाग विश्वविद्यालय से प्रथम श्रेणी मे एम०एस-सी० किया। १९४८ मे आपने डो० फिल० और १९५७ में डी० एस-सी० की उपाधि प्राप्त की। सन् १९४७ से ही आप प्रयाग विश्वविद्यालय में रसायन विज्ञान का प्राध्यापन करते रहे हैं।

आप भारत, अमेरिका तथा इग्लैण्ड की कितनी ही प्रसिद्ध वैज्ञानिक सस्थाओ के सदस्य है और आपने उच्च वैज्ञानिक विषयो पर दर्जनो महत्वपूर्ण प्रबन्ध लिखे हैं, जो देश विदेश की प्रमुख वैज्ञानिक पत्रिकाओं मे प्रकाशित हो चुके हैं।

रू०९.००

हिन्दी-समिति-ग्रन्थमाला—५७

परमाणु-विखण्डन

लेखक

डा० रमेशचन्द्र कपूर,

इलाहाबाद विश्वविद्यालय

हिन्दी-समिति-ग्रन्थमाला—५७

परमाणु-विखण्डन

लेखक

डा० रमेशचन्द्र कपूर,
इलाहाबाद विश्वविद्यालय

हिन्दी समिति
सूचना विभाग, उत्तर प्रदेश